$$+\dot{\theta}_z\left[\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{r}k_p\,\varepsilon_0(k_p)\,\delta(\rho'-\rho_p)-\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{m}k'_s\,\varepsilon_0(k'_s)\,\delta(\rho'-\rho'_s)\right]\Gamma_{n,m}.$$

Полагая в (8) $k_1=..=k_n=k'_1=...=k'_m=k$, придем к уравнениям для пространственных корреляционных функций [4]. В частном случае гауссова случайного поля $\delta\varepsilon(\boldsymbol{r})$ уравнения (8) ранее были получены в [5, 6]

Уравнения (8) очень сложны и, в отличие от случая пространственных корреляционных функций, аналитически неразрешимы уже начиная со случая $n=m=1$:

$$\left[\frac{\partial}{\partial z}+\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{k_1}\Delta_{\perp 1}-\frac{1}{k_2}\Delta_{\perp 2}\right)+Q(\rho_1,\rho_2,\ z;k_1,\ k_2)\right]\Gamma_{1,1}(\rho_1,k_1,\rho_2,k_2,z)=0,$$

$$\Gamma_{1,1}(\rho_1,k_1,\rho_2,k_2,z_0)=\delta(\rho_1-\rho_{01})\,\delta(\rho_2-\rho_{02}),$$

где $Q(\rho_1,\rho_2,z;k_1,k_2)=\dot{\theta}_z\left[\frac{k_1}{2}\varepsilon_0(k_1)\,\delta(\rho'-\rho_1)-\frac{k_2}{2}\varepsilon_0(k_2)\,\delta(\rho'-\rho_2)\right]$. Для статистически однородного по поперечным координатам поля $\delta\varepsilon(\boldsymbol{r})$, когда $Q(\rho_1,\rho_2,z;k_1,k_2)=Q(\rho_1-\rho_2,z;k_1,k_2)$, функцию $\Gamma_{1,1}$ можно только факторизовать·

$$\Gamma_{1,1}(\rho_1,k_1,\rho_2,k_2,z)=G_0\left(\frac{k_1(\rho_1-\rho_{01})-k_2(\rho_2-\rho_{02})}{k_1-k_2},\quad z-z_0;\ k_1-k_2\right)f(\rho_1-\rho_2,z;k_1,k_2),$$

где функция $f(\rho,z;k_1,k_2)$ удовлетворяет следующим уравнению и начальному условию:

$$\left[\frac{\partial}{\partial z}+\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{k_1}-\frac{1}{k_2}\right)\Delta_{\perp}-Q(\rho,z;\ k_1,\ k_2)\right]f(\rho,z;k_1,k_2)=0,$$

$$f(\rho,z_0;k_1,k_2)=\delta(\rho-\rho_{01}+\rho_{02}).$$

Уравнения (8) можно вывести и другим путем: преобразуя в интегро-дифференциальные и усредняя соответствующие стохастические уравнения, используя затем условие дельта-коррелированности для расцепления средних от произведений и, наконец, переходя обратно к дифференциальной записи [3] Даже последний шаг для пространственных корреляционных функций в свое время явился нетривиальной задачей: если интегродифференциальный вид уравнений был получен в работе [7], то чисто дифференциальная форма — только позднее в [4].

Применение же КИ сводит процесс вывода к простому алгоритму: сначала получают само решение в форме КИ, а уравнения затем записывают прямо по его виду.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Фейнман Р., Хибс А Квантовая механика и интегралы по траекториям. — М.: Мир, 1968. — 382 с.
2. Попов В. Н Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике. — М.: Атомиздат, 1976 — 256 с.
3. Рытов С. М., Кравцов Ю А., Татарский В И. Введение в статистическую радиофизику II. Случайные поля. — М.: Наука, 1978. — 464 с.
4. Кляцкин В. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1975, 18, № 1, с. 63.
5. Ерухимов Л. М., Зарницына И. Г., Кирш П. И — Изв. вузов — Радиофизика, 1973, 16, № 4, с. 573.
6. Lee L. C — J. Math Phys., 1974, 15, № 9, p. 1431.
7. Кляцкин В. И. — ЖЭТФ, 1969, 57, № 3, с. 952.



Поступила в редакцию
5 июня 1986 г.


---


УДК 621.372.8 029 7


# ВЛИЯНИЕ ВНЕШНИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ НА ФАЗОВЫЙ СДВИГ МОД В ДВУМОДОВОМ ВОЛОКОННОМ СВЕТОВОДЕ


*Ф. А. Шаталов*


Двумодовые волоконные световоды (ВС), в которых распространяются две $LP_{01}$ и $LP_{11}$ линейно поляризованные моды [1], имеют более широкую, чем у многомодовых ВС, полосу пропускания и больший, чем у одномодовых ВС, диаметр сердцевины. Это облегчает согласование таких ВС с оконечными устройствами и является причиной их использования как в широкополосных волоконно-оптических линиях связи [2, 3], так и в интерференционных датчиках физических величин [4–7]. Отсутствие аналитического описания влияния внешних воздействий на фазовый сдвиг $LP_{01}$ и $LP_{11}$ мод в многослойном ВС затрудняет практические оценки уровня межмодовых шумов в таких линиях связи при внешних воздействиях на ВС и фазовой чувствительности интерференционных датчиков на основе двумодовых ВС.

Цель настоящей работы — получить приближенные аналитические выражения для коэффициентов чувствительности фазового сдвига $LP_{01}$ и $LP_{11}$ мод в многослойном двумодовом ВС к изменениям температуры, аксиального растяжения, радиального и гидростатического давлений.

Рассмотрим $q$-слойный ($q=2, 3, 4, \ldots$; первый слой соответствует сердцевине, второй — оболочке и т. д.) двумодовый ВС. Фазовый сдвиг $\varphi$ $LP_{01}$ и $LP_{11}$ мод в таком ВС определяется соотношением

$$\varphi = (\beta_1 - \beta_2)l,$$

где $\beta_1$ и $\beta_2$ — постоянные распространения $LP_{01}$ и $LP_{11}$ мод, а $l$ — геометрическая длина ВС Количественно влияние внешнего воздействия $f$ на фазовый сдвиг $\varphi$ описывается коэффициентом $\varepsilon_f$ чувствительности фазового сдвига к изменению $\Delta f$ этого воздействия:

$$\varepsilon_f = \Delta\varphi/\varphi\Delta f,$$

где $\Delta\varphi$ — изменение фазового сдвига, обусловленное изменением $\Delta f$. В нашем случае в качестве $f$ рассматриваются температура $T$, аксиальное растяжение $g$, радиальное $\rho$ и гидростатическое $p$ давления. Согласно [6, 7] величина коэффициента $\varepsilon_f$ определяется в основном величиной относительного изменения $\Delta l/l$ длины (аксиальной деформацией) ВС Это связано с тем, что в цилиндрическом, аксиально-симметричном ВС относительное изменение разности $\beta_1 - \beta_2$ вследствие изменения показателя преломления и радиуса сердцевины ВС является величиной второго порядка малости по сравнению с величиной аксиальной деформации ВС. Используя аналитические выражения [8] для температурных напряжений в цилиндрических многослойных структурах, граничные условия (1) и (3) из [9] и соотношения связи [10] аксиальной деформации с изменениями [9, 11, 12] механических и температурных напряжений, аналогично [9, 11, 12] получим следующие выражения для коэффициентов $\varepsilon_T$, $\varepsilon_g$, $\varepsilon_\rho$ и $\varepsilon_p$ чувствительности фазового сдвига $LP_{01}$ и $LP_{11}$ мод в двумодовом ВС к изменениям температуры $T$, аксиального растяжения $g$, радиального $\rho$ и гидростатического $p$ давлений:

$$\varepsilon_T = x_1[(1+B_x)/(1+B)]; \tag{1}$$

$$\varepsilon_g = (1/E_1)[(1+S)/(1+S_E)]; \tag{2}$$

$$\varepsilon_\rho = (2\nu_1/E_1)[(1+S_\nu^\rho)/(1+S_E)]; \tag{3}$$

$$\varepsilon_p = (2\nu_1 - 1)/E_1[(1+S_\nu^p)/(1+S_E)], \tag{4}$$

где

$$B = \frac{1-\nu_1}{S_1E_1}\sum_{j=2}^{q}\frac{S_jE_j}{1-\nu_j}, \quad B_x = \frac{1-\nu_1}{S_1E_1x_1}\sum_{j=2}^{q}\frac{S_jE_jx_j}{1-\nu_j}, \quad S = \frac{1}{S_1}\sum_{j=2}^{q}S_j,$$

$$S_E = \frac{1}{S_1E_1}\sum_{j=2}^{q}S_jE_j, \quad S_\nu^\rho = \frac{1}{S_1\nu_1}\sum_{j=2}^{q}S_j\nu_j, \quad S_\nu^p = \frac{1}{S_1(1-2\nu_1)}\sum_{j=2}^{q}S_j(1-2\nu_j),$$

$x_j$, $E_j$, $\nu_j$ и $S_j$ — коэффициент температурного расширения, модуль Юнга, коэффициент Пуассона и площадь поперечного сечения $j$-го слоя ВС

Точность выражений (1)—(4) определяется аналогично [11, 12] точностью аналитических выражений [8] для температурных напряжений и точностью граничных условий (1), (3) из [9] и составляет для обычных ВС около 15%.

Используя (1)—(4), можно целенаправленно выбором структуры покрытия ВС увеличивать или уменьшать одни из этих коэффициентов, оставляя другие практически без изменений. Так, для ВС на основе плавленного кварца с диаметром 120 мкм величина коэффициентов $\varepsilon_T$, $\varepsilon_g$, $\varepsilon_\rho$ и $\varepsilon_p$ определяется в приближении $B_x \simeq B \simeq S \simeq S_E \simeq S_\nu^\rho \simeq S_\nu^p$ величиной множителей $x_1$, $1/E_1$, $(2\nu_1/E_1)$, $(2\nu_1 - 1)/E_1$ в (1)—(4) и составляет соответственно около $5\cdot10^{-7}$ 1/°C, 14 ТПа$^{-1}$, 5 ТПа$^{-1}$ и —9 ТПа$^{-1}$. При покрытии этого ВС силоксаном [13] толщиной 250 мкм коэффициенты $\varepsilon_g$ и $\varepsilon_\rho$ увеличиваются примерно до 373 ТПа$^{-1}$ и 377 ТПа$^{-1}$, а коэффициенты $\varepsilon_T$ и $\varepsilon_p$ изменяются незначительно ($\varepsilon_T \simeq 6\cdot10^{-7}$ 1/°C, $\varepsilon_p \simeq -9{,}3$ ТПа$^{-1}$) Аналогично можно подобрать и другие структуры покрытия этого ВС, когда наиболее сильно изменяется, например, только коэффициент $\varepsilon_p$

Следует отметить, что выражения (1)—(4) пригодны также для оценок изменений межмодовых фазовых сдвигов в многослойных многомодовых ВС.

Таким образом, полученные в работе аналитические выражения (1)—(4) для коэффициентов чувствительности фазового сдвига мод в многослойном двумодовом ВС к изменениям температуры, аксиального растяжения, радиального и гидростатического давлений позволяют проводить практические оценки и оптимизировать структуру таких ВС в соответствующих интерферометрических датчиках и волоконно-оптических линиях связи.

В заключение автор благодарит В. В. Беликова, В. А. Лебедева и В. Н. Цалкова за обсуждение результатов работы.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Shibata N., Tateda M., Seikai S, Uchida N. — Appl. Opt, 1980, **19**, № 9, p. 1489.
2. Kitayama K. I., Kato Y., Seikai S., Uchida N — IEEE J. Quantum Electron, 1981, **QE-17**, № 6, p. 1057.
3. Гордон Г. И., Теумин И. И. — Изв. вузов — Радиоэлектроника, 1983, **26**, № 5, с. 79.
4. McMillan J L., Robertson S. C. — GES J. Reseach, 1984, **2**, № 2, p. 119.
5. Бутусов М. М., Ермакова Н. В., Урванцева Н. Л. — Изв .вузов — Радиоэлектроника, 1982, **25**, № 8, с. 74.
6. Бусурин В. И., Семенов А. С., Удалов Н. П. — Квантовая электроника, 1985, **12**, № 5, с. 901.
7. Layton M. R., Bucaro J. A. — Appl. Opt., 1979, **18**, № 5, p. 666.
8. Scherer G, W. — J. Non-Cryst. Sol., 1979, **34**, № 2, p. 223.
9. Шаталов Ф. А. — Квантовая электроника, 1985, **12**, № 5, с. 1086.
10. Най Дж. Физические свойства кристаллов — М.: Мир, 1967.
11. Шаталов Ф. А. — Радиотехника, 1984, **39**, № 5, с. 76.
12. Шаталов Ф. А. — Радиотехника и электроника, 1984, **29**, № 11, с. 2281.
13. Lagakos N., Bucaro J. A., Jarzynski J — Appl. Opt., 1981, **20**, № 13, p. 2305.


Поступила в редакцию
3 июня 1986 г.

---

УДК 537.874

# СХОДИМОСТЬ МЕТОДА $T$-МАТРИЦ И ГИПОТЕЗА РЭЛЕЯ

*С. О. Квятковский*

Метод $T$-матриц, впервые предложенный в [1] для расчета скалярной дифракции, нашел широкое применение [2]. Тем не менее, вопрос о его сходимости до сих пор окончательно не решен. Под сходимостью метода понимается следующее. Бесконечная матрица $T$ ищется как решение матричного уравнения с бесконечными же матрицами. Однако численно решается уравнение с конечными матрицами, которые образуются из бесконечных отбрасыванием строк и столбцов с номерами, большими некоторого целого числа $N$. Изменяя $N$, получаем, вообще говоря, разные значения для каждого члена матрицы $T$. Рассматривая эти значения для разных $N$ как последовательности, будем говорить, что метод сходится, если последовательности фундаментальны в $l^2$.

Длительное время идет спор о связи сходимости метода $T$-матриц с гипотезой Рэлея. Утверждается, что при выборе сферического базиса метод $T$-матриц будет сходящимся только в случае, если рассеиватель имеет такую форму, что для него выполняется гипотеза Рэлея [3]. Этот вопрос носит принципиальный характер, поскольку доказано, что гипотеза Рэлея выполняется для достаточно узкого класса рассеивателей [4].

Вопрос о связи метода $T$-матриц с гипотезой Рэлея возникает по следующей причине. Поле на поверхности рассеивателя раскладывается по системе функций, полных на ней. Наиболее удобный выбор, с точки зрения практических вычислений, — сферические волновые функции, при этом поле на поверхности рассеивателя запишется в виде $\Phi_+ = \sum_\nu \alpha_\nu \operatorname{Re}\psi_\nu$, функции $\operatorname{Re}\psi_\nu$ будут определены ниже. Система $\{\operatorname{Re}\psi_\nu\}$ будет полна на поверхности рассеивателя произвольной формы [5], но не минимальна, если нарушается гипотеза Рэлея [4]. В связи с этим возникает вопрос о сходимости метода при нарушении гипотезы Рэлея.

Покажем, что существуют рассеиватели, для которых гипотеза Рэлея не выполняется, но метод $T$-матриц сходится. Матрица $T$, связывающая коэффициенты разложения по волновым функциям падающего и рассеянного полей, определяется как решение матричного уравнения [1, 2]

$$T = -Q^{-1}\operatorname{Re}Q. \qquad (1)$$

При ее вычислении сложность состоит в обращении матрицы $Q$, поскольку она близка к вырожденной [3]. Тем не менее, существует случай, когда это не так. Рассмотрим скалярную дифракцию на теле с граничными условиями Дирихле или Неймана. Элементы матрицы $Q$ запишутся в виде [1, 2]

$$Q_{\nu\nu'} = \mp i\frac{\delta_{\nu\nu'}}{2} + \frac{k}{8\pi}\int_S \hat{n}\cdot\nabla(\operatorname{Re}\psi_\nu\,\psi_{\nu'})\,ds,$$