

УДК 621 372 822

**УЧЕТ СИНГУЛЯРНОСТИ ПОЛЯ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ МЕТОДОМ МОМЕНТОВ**

*Г. Н. Парватов, А. А. Попов, М. Ю. Новомейский*

Показана целесообразность и предложена методика учета показателя сингулярности в апертурных дифракционных задачах, решаемых методом моментов. В основе методики — представление поля в раскрыве в виде произведения неизвестной функции на сингулярную и регулярную функции, выделение особенностей в ядре интегрального уравнения и использование квадратур типа Якоби.

В [1] методом моментов с использованием квадратур Гаусса — Кристоффеля решена задача дифракции ТЕМ-волны на раскрыве плоского волновода и проведено исследование поля внутри промежутка интегрирования. В данной работе эта же задача решена с использованием квадратур Якоби с равномерным разбиением интервала интегрирования, что позволило провести исследование поля в раскрыве, включая сингулярные точки.

Как и в [1], запишем коэффициент отражения  $R$  ТЕМ-волны через касательную составляющую в раскрыве  $E_x(x, 0)$  и интегральное уравнение для ее определения в виде

$$R = (\sqrt{a})^{-1} \int_0^a E_x(x', 0) dx' - 1; \tag{1}$$

$$2\tilde{Y}_0\varphi_0(x) = -(\varepsilon/2) \int_0^a \{H_0^{(1)}(k\sqrt{\varepsilon} |x-x'|) + H_0^{(1)}(k\sqrt{\varepsilon} |x+x'|)\} \times \\ \times E_x(x', 0) dx' + \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{Y}_n \varphi_n(x) \int_0^a \varphi_n(x') E_x(x', 0) dx', \tag{2}$$

где  $\tilde{Y}_n = i/\gamma_n$ ;  $\varphi_n(x) = \sqrt{(2-\delta_{0n})/a} \cos(n\pi x/a)$  — собственные функции поля в волноводе;  $i = \sqrt{-1}$ ;  $\gamma_n = -ik$  ( $n=0$ );  $\gamma_n = \sqrt{(n\pi/a)^2 - k^2}$ ;  $\varepsilon$  — относительная диэлектрическая проницаемость среды, расположенной у раскрыва волновода;  $a$  — полуширина плоского волновода;  $k$  — волновое число;  $H_0^{(1)}(z)$  — функция Ханкеля первого рода нулевого порядка;  $x$  — текущая координата в плоскости раскрыва волновода.

При решении (2) методом моментов воспользуемся симметрией задачи относительно оси волновода в плоскости  $x'=0$  и тем, что функция  $E_x(x', 0)$  сингулярна в точке  $x' = a$  с показателем  $\alpha_T = -1 + (2/\pi) \arcsin(\sqrt{(2+\varepsilon)/(1+\varepsilon)})$ . Тогда, делая замену переменных  $x = au$ ,  $x' = au'$  и представляя функцию поля в раскрыве как

$$\sqrt{a} E_x(au', 0) = (1-u')^\alpha u'^{\beta} f(u'), \tag{3}$$

(1), (2) преобразуем к виду

$$R = \int_0^1 (1-u')^\alpha u'^{\beta} f(u') du' - 1; \tag{4}$$

$$-2 = \int_0^1 (1-u')^{\alpha} u'^{\beta} f(u') \{g_1(u', u) + \ln |u-u'| g_2(u', u)\} du', \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} g_1(u', 0) &= -p \varepsilon [I_0(p\sqrt{\varepsilon} u') + iR_0(p\sqrt{\varepsilon} u') + (2i/\pi) \ln(p\sqrt{\varepsilon}/2) \times \\ &\times I_0(p\sqrt{\varepsilon} u')] - 1 + (2ip/\pi) [K(u') - \ln\{\pi(1-u'/2)\}], \\ g_1(u', 0 < u < 1) &= -(p\varepsilon/2) [I_0(p\sqrt{\varepsilon} |u-u'|) + iR_0(p\sqrt{\varepsilon} |u-u'|) + \\ &+ (2i/\pi) \ln(p\sqrt{\varepsilon}/2) I_0(p\sqrt{\varepsilon} |u-u'|)] - (p\varepsilon/2) [I_0(p\sqrt{\varepsilon} [u+u']) + \\ &+ iN_0(p\sqrt{\varepsilon} [u+u'])] - 1 + (ip/\pi) [K(u+u') + K(|u-u'|)] - \\ &- \ln\{\pi^2(u+u')(1-[u+u']/2)[1-|u-u'|]\}, \\ g_1(u', 1) &= -(p\varepsilon/2) [I_0(p\sqrt{\varepsilon} [1-u']) + iR_0(p\sqrt{\varepsilon} [1-u']) + \\ &+ (2i/\pi) \ln(p\sqrt{\varepsilon}/2) I_0(p\sqrt{\varepsilon} [1-u'])] - (p\varepsilon/2) [I_0(p\sqrt{\varepsilon} [1+u']) + \\ &+ iN_0(p\sqrt{\varepsilon} [1+u'])] - 1 + (ip/\pi) [K(1+u') + \\ &+ K(1-u') - 2 \ln\{\pi(1+u')/2\}], \\ g_2(u', 0) &= -(2ip\varepsilon/\pi) I_0(p\sqrt{\varepsilon} u') - (2ip/\pi), \\ g_2(u', 0 < u < 1) &= -(ip\varepsilon/\pi) I_0(p\sqrt{\varepsilon} |u-u'|) - (ip/\pi), \\ g_2(u', 1) &= -(ip\varepsilon/\pi) I_0(p\sqrt{\varepsilon} [1-u']) - (2ip/\pi), \end{aligned} \quad (6)$$

$p=ka$  — дифракционный параметр,  $I_0(z)$ ,  $N_0(z)$  — функции Бесселя и Неймана нулевого порядка,  $R_0(z) = N_0(z) - (2/\pi) \ln(z/2) I_0(z)$  — функция Неймана с исключенной особенностью,  $K(z)$  — из [1].

Неизвестная функция  $f(u')$  в точках  $u'=0$ ,  $u'=1$  может быть сингулярной при  $\beta > 0$ ,  $\alpha > \alpha_T$  и регулярной при  $\beta \leq 0$ ,  $\alpha \leq \alpha_T$ . Разбивая промежуток интегрирования  $[0, 1]$  на равные части и используя квадратурные формулы Якоби, (3), (5) представим в виде

$$R = \sum_{n=0}^N A_n f_n - 1; \quad (7)$$

$$\sum_{n=0}^N (A_n g_{1, n, m} + B_{nm} g_{2, n, m}) f_n = -2; \quad m=0, 1, \dots, N. \quad (8)$$

Здесь  $f_n = f(u_n)$ ,  $g_{1, n, m} = g_1(u_n, u_m)$ ,  $u_n = n/N$ ,  $g_{2, n, m} = g_2(u_n, u_m)$ ,  $u_m = m/N$ . Для определения весов  $A_n$ ,  $B_{nm}$  квадратурных формул использовались стандартные соотношения [2], которые с помощью разработанного в [3] алгоритма сводятся к совокупности интегралов:

$$I_1 = \int_0^1 u^{\beta+l} (1-u)^{\alpha} du = B(\beta+l+1, \alpha+1),$$

$$I_2 = \int_0^1 u^{\beta+l} (1-u)^{\alpha} \ln |u - u_m| du,$$

где  $B(x, y)$  — бета-функция. При  $u_m = u_0 = 0$  и  $u_m = u_N = 1$  интеграл  $I_2$  берется аналитически [4], а при  $0 < u_m < 1$  он определяется численно.

С помощью соотношений (7), (8) численно исследовано поле в раскрыве волновода. Расчеты выполнены для следующих наборов параметров задачи:  $1-\varepsilon=1$ ,  $\alpha=0$ ;  $2-\varepsilon=1$ ,  $\alpha=-1/6$ ;  $3-\varepsilon=1$ ,  $\alpha=-1/3$ ;  $4-\varepsilon=1$ ,  $\alpha=-1/2$ ;  $5-\varepsilon=3$ ,  $\alpha=0$ ;  $6-\varepsilon=3$ ,  $\alpha=\alpha_T/2$ ;  $7-\varepsilon=3$ ,

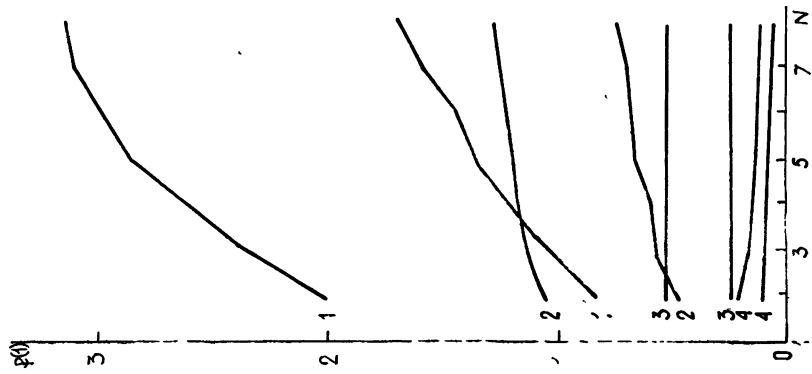


Рис. 1.

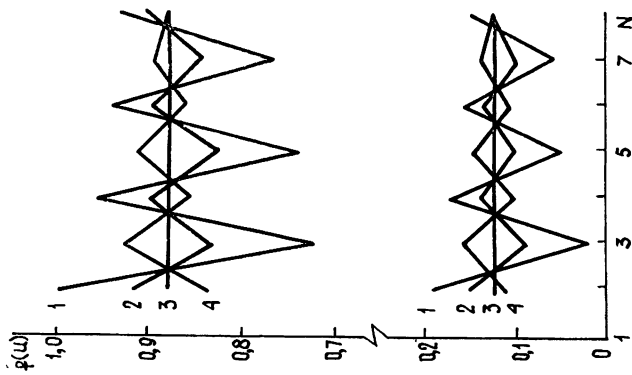


Рис. 2.

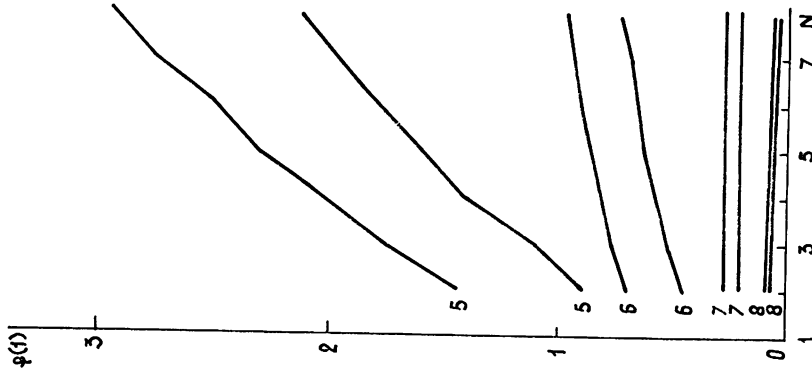


Рис. 3.

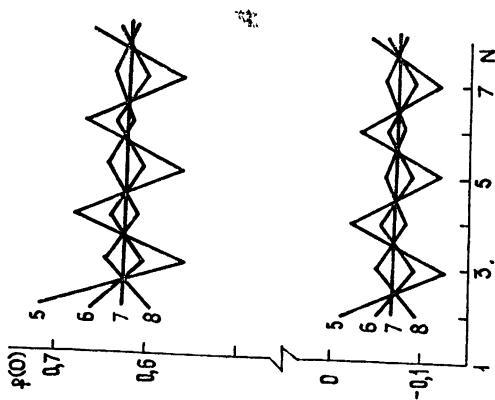


Рис. 4.

$\alpha = \alpha_T$ ,  $\delta - \varepsilon = 3$ ,  $\alpha = (3/2)\alpha_T$ . При этом во всех случаях  $\beta = 0$ ,  $p = 1$ , а количество отрезков  $N$  варьировалось от двух до восьми. Точное значение порядка сингулярности при  $\varepsilon = 3$  равно  $\alpha_T = -1 + (2/\pi) \arcsin(\sqrt{5/8})$  (при  $\varepsilon = 1$ ,  $\alpha_T = -1/3$ ).

На рис. 1—4 представлены значения функции  $f(u)$  на концах промежутка интегрирования ( $u = \pm 1$ ) в зависимости от количества разбиений  $N$ . Номера кривых на графиках соответствуют номерам наборов параметров. Из каждой пары кривых, обозначенных одним номером, верхняя соответствует  $\text{Re}[f(u)]$ , нижняя —  $\text{Im}[f(u)]$ . Наборы параметров 1 и 5 не учитывают факт сингулярности электромагнитного поля на ребре ( $u = 1$ ). Поэтому резкое возрастание кривых 1 (рис. 1) и 5 (рис. 3) объясняется тем, что с ростом  $N$  аппроксимация поля на апертуре становится все более точной, а  $f(1)$  согласно условию на ребре имеет тенденцию роста, в пределе стремясь к бесконечности. Кривые 1 (рис. 2) и 5 (рис. 4) сильно осциллируют около некоторого значения. С ростом  $N$  амплитуды этих осцилляций медленно убывают. Кривые 2 и 6 (рис. 1—4) соответствуют случаю частичного выделения степенной особенности поля вблизи острого ребра. Кривые 3, 7 построены при полном выделении степенной особенности поля. Поэтому значения  $f(1)$  и  $f(0)$  практически не зависят от количества разбиений  $N$ . Кривые 4, 8 соответствуют случаю, когда при решении интегрального уравнения осуществляется избыточное выделение степенной особенности ( $\alpha = \alpha_T + \alpha_T/2$ ). Очевидно, что с ростом  $N$  значение  $f(1)$  стремится к нулю ( $\sim u^{(1/2)|\alpha_T|}$ ). Сравнение кривых 1 (рис. 1) и 5 (рис. 3) при  $\alpha = 0$  показывает, что при  $\varepsilon = 3$  функция  $f(1)$  имеет большую по абсолютной величине степень сингулярности, поэтому при увеличении  $N$  она возрастает быстрее (кривая 5).

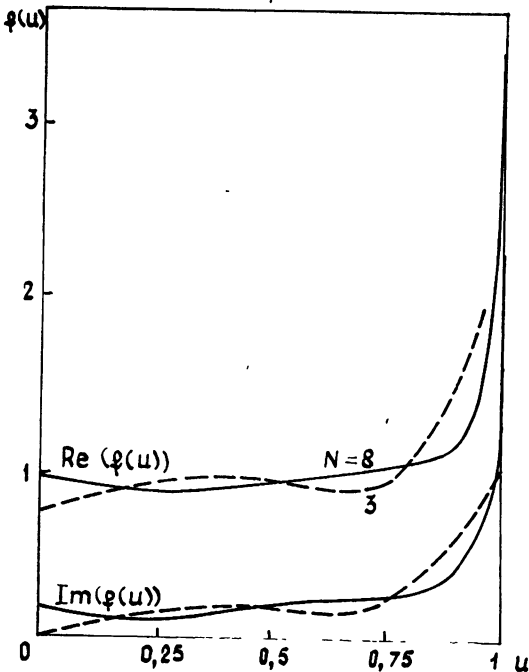


Рис. 5.

На рис. 5—8 представлены распределения  $f(u)$  на апертуре волновода для  $N=3$ ,  $N=8$ ,  $p=1$ ,  $\beta=0$ , при  $\alpha=0$ ,  $\varepsilon=1$  (рис. 5);  $\varepsilon=1$ ,  $\alpha = \alpha_T = -1/3$  (рис. 6);  $\alpha=0$ ,  $\varepsilon=3$  (рис. 7);  $\alpha = \alpha_T = -1 + (2/\pi) \times \arcsin(\sqrt{5/8})$ ,  $\varepsilon=3$  (рис. 8). Из рис. 6, 8 видно хорошее совпадение кривых, построенных при  $N=3$  и  $N=8$ , для точного значения порядка сингулярности. В этом случае после выделения сингулярного множителя из неизвестной функции поля ее остаток достаточно точно аппрок-

смируется полиномом  $2 \div 3$  степени. Если у функции не выделять сингулярный множитель, то невозможно получить хорошую аппроксимацию поля. Это иллюстрируется на рис. 5, 7. Хорошая аппроксимация функции поля может служить критерием выбора числа разбиений  $N$ . В частности, когда  $\alpha = \alpha_T$ , при решении интегрального уравнения можно ограничиться системой из трех-четырёх линейных алгебраических уравнений.

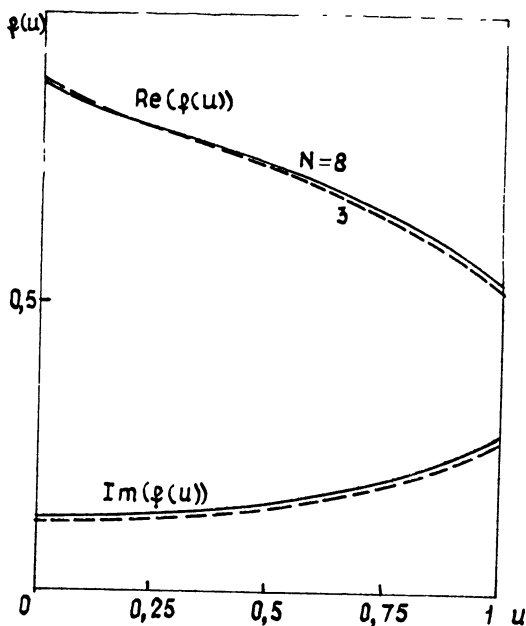


Рис. 6.

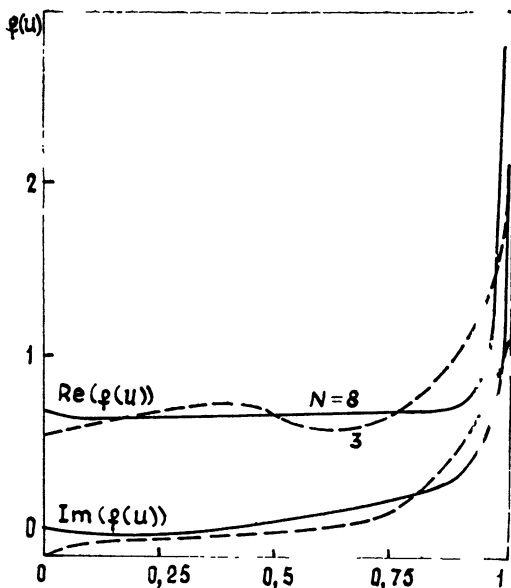
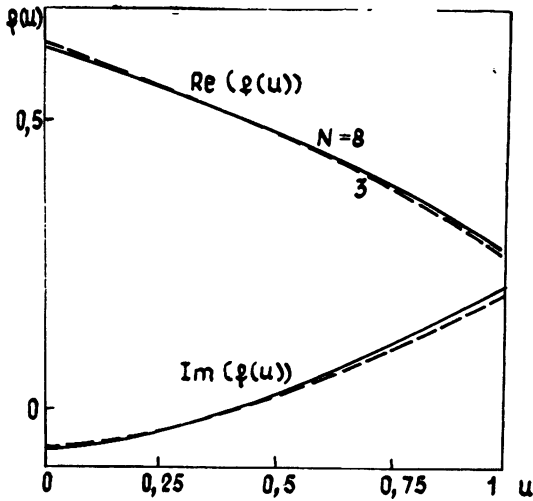


Рис. 7.

Коэффициент отражения является интегральной характеристикой поля в раскрыве, поэтому его значения менее критичны к изменению  $\alpha$ . Как показали численные расчеты, для всех групп параметров значения модуля коэффициента отражения изменялись только в третьем знаке, а фазы — в десятых долях градусов при выбранных значениях  $\alpha$ .

Анализ численных результатов показал, что сходимость системы алгебраических уравнений тем хуже, чем больше разность  $|\alpha_T - \alpha|$ .



Таким образом, для улучшения сходимости в численных расчетах целесообразно брать точное значение порядка сингулярности (тогда  $N \sim 2 \div 3$ ); в случае, когда  $\alpha_T$  неизвестно, единственным способом улучшения сходимости является хотя бы частичное выделение степенной особенности у функции поля на апертуре излучателя.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Парватов Г. Н., Попов А. А. — Изв. вузов — Радиоэлектроника, 1980, 23, № 3, с. 3; № 11, с. 84.
2. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. — М.: Наука, 1967 — 500 с.
3. Парватов Г. Н., Попов А. А., Новомейский М. Ю. Статья депонирована в ВИНТИ, рег. № 4062 — 85. Деп. от 11 мая 1985 г.
4. Прудников Ю. А., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. — М.: Наука, 1981. — 797 с.

Сибирский физико-технический  
институт  
при Томском университете

Поступила в редакцию  
6 декабря 1985 г.

#### ACCOUNT OF THE FIELD SINGULARITY IN SOLUTION OF THE DIFFRACTION PROBLEMS BY THE METHOD OF MOMENTS

*G. N. Parvatov, A. A. Popov, M. Yu. Novomejskij*

A methodics is suggested for the consideration of the singularity index in the aperture diffraction problems being solved by the method of moments. The methodics is based on the field presentation in the aperture in the form of the unknown function product by the singular and regular functions, isolation of peculiarities in the kernel of the integral equation and the use of Jakoby type quadrature.