

УДК 621.372.823

НОВЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОСТОЯННЫХ ФАЗЫ И ЗАТУХАНИЯ КРУГЛОГО ГОФРИРОВАННОГО ВОЛНОВОДА

А. С. Ильинский, М. В. Тушиков

Разработан прямой проекционный метод расчета собственных волн круглого гофрированного волновода. Получена краевая задача на собственные значения, для решения которой использован метод направленной ортогонализации. Приведены результаты расчетов постоянных фазы и затухания для круглого гофрированного волновода с синусоидальной формой гофра.

Для строгого анализа круглого гофрированного волновода с синусоидальной формой гофра может быть применен вариант проекционного метода с преобразованием координат [1]. В работах [2-4] на основе этого метода были получены численные результаты для коэффициента фазы симметричных и несимметричных электрических и магнитных волн в рассматриваемом волноводе в случае идеально проводящих стенок. В работе [5] данный метод применялся для расчета комплексной постоянной распространения в круглом гофрированном волноводе с синусоидальной формой гофра для несимметричных гибридных волн при наличии потерь в стенках.

При реализации этого метода в базисе, образованном нормальными волнами регулярного волновода сравнения, приходится вычислять корень трансцендентного уравнения, которое получается из условий Флоке для решений уравнений Максвелла. Однако удобно иметь аналитическую зависимость всех функций от постоянной распространения γ , так как в этом случае можно использовать методы высокого порядка для поиска корней дисперсионного уравнения. В работе [6] был предложен метод, позволяющий получить такую зависимость в случае двумерного гофрированного волновода.

В настоящей работе проводится разработка этого метода на случай круглого гофрированного волновода. Результаты расчетов коэффициента фазы и коэффициента затухания приводятся для случая несимметричных гибридных волн.

Будем рассматривать задачу вычисления постоянных распространения в круглом гофрированном волноводе с синусоидальной формой гофра. Уравнение боковой поверхности в этом случае имеет вид

$$R(z) = a(1 + \kappa \cos pz), \quad -\infty < z < \infty, \quad (1)$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad \kappa = b/a, \quad p = 2\pi/T,$$

где a — средний радиус волновода, T — период гофра, b — амплитуда гофра. Среда, заполняющая волновод, считается однородной, изотропной и не обладает поглощающими свойствами. Векторы комплексных амплитуд \mathbf{E} и \mathbf{H} внутри области D , ограниченной боковой поверхностью волновода, удовлетворяют системе уравнений Максвелла, а на самой боковой поверхности — граничному условию Шукина—Леонтовича:

$$[n\mathbf{E}] = -\omega [n [n\mathbf{H}]], \quad \omega = \frac{1-i}{2} \sqrt{\omega\mu/2\pi\sigma}, \quad (2)$$

где μ — магнитная проницаемость меди, σ — удельная проводимость меди.

Задача о распространении электромагнитных колебаний в периодическом нерегулярном волноводе сводится к исследованию решений системы уравнений Максвелла, удовлетворяющих условию (2) и условию Флоке [7]:

$$F(r, \varphi, z+T) = e^{i\beta T} F(r, \varphi, z), \quad (3)$$

где F — любая компонента полей E и H , $\gamma = \beta T = \text{const}$. При этом $\alpha' = \text{Re } \beta$ — коэффициент фазы, а $\alpha'' = \text{Im } \beta$ — коэффициент затухания.

Задача исследования полей в периодическом волноводе сводится к эквивалентной задаче для круглого волновода с анизотропным периодическим заполнением. Для этого вводится новая система криволинейных координат, связанная с боковой поверхностью волновода, преобразующая область D в прямой круговой цилиндр G единичного радиуса. Во введенной системе координат (ρ, φ, z) задача сводится к нахождению решений системы

$$\text{rot } E_0 - ik \|\mu\| H_0 = 0, \quad \text{rot } H_0 + ik \|\varepsilon\| E_0 = 0, \quad (4)$$

удовлетворяющих условию Флоке (3) и условию на стенке

$$[nE_0]_{\rho=1} = -\bar{w} [n[nH_0]]_{\rho=1}, \quad (5)$$

где

$$\bar{w} = \frac{w \sqrt{g}}{\sqrt{g^{11}}} \begin{pmatrix} \rho [g^{11}g^{22} - (g^{12})^2] & g^{11}g^{32} - g^{13}g^{12} \\ g^{11}g^{23} - g^{12}g^{13} & \rho^{-1} [g^{11}g^{33} - (g^{13})^2] \end{pmatrix},$$

g^{ij} — элементы тензора $\|\varepsilon\| = \|\mu\|$.

Приближенное решение определяем как конечную линейную комбинацию по полной ортонормированной системе функций $\{\varphi_m(\beta, z)\}$, удовлетворяющих условиям Флоке (3). В качестве базисных функций

возьмем функции вида $\varphi_m(\beta, z) = \frac{1}{\sqrt{T}} \exp \left[i \left(\beta + \frac{2\pi m}{T} \right) z \right]$, тогда

$$(E^N)_{\varphi, z} = \sum_{k=-N}^N E_{\varphi, z}^k(\rho) e^{in\varphi} \varphi_k(\beta, z), \quad (6)$$

$$(H^N)_{\varphi, z} = \sum_{k=-N}^N H_{\varphi, z}^k(\rho) e^{in\varphi} \varphi_k(\beta, z).$$

Используя неполный метод Галеркина, получаем уравнения для определения неизвестных коэффициентов $E_{\varphi}^k, E_z^k, H_{\varphi}^k, H_z^k$:

$$\int_0^T \int_0^{2\pi} \{\text{rot } E^N - ik \|\mu\| H^N\}_{\varphi, z} \varphi_m^* d\varphi dz = 0, \quad (7)$$

$$\int_0^T \int_0^{2\pi} \{\text{rot } H^N + ik \|\varepsilon\| E^N\}_{\varphi, z} \varphi_m^* d\varphi dz = 0, \quad m = 0, \pm 1, \dots, \pm N.$$

Система (7) представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Все коэффициенты этой системы для рассматриваемого случая боковой поверхности выражаются в явном виде. Выпишем систему (7), приведенную к нормальному виду, и выражения для ее коэффициентов:

$$\frac{dH_z^N}{d\rho} + A_1 H_z^N + B_1 E_z^N + C_1 E_{\varphi}^N = 0,$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d(\rho H_{\varphi}^N)}{d\rho} + C_2 E_{\varphi}^N + B_2 E_z^N + D_2 H_{\varphi}^N = 0,$$

$$\frac{dE_z^N}{d\rho} + A_3 H_z^N + B_3 E_z^N + C_3 H_{\varphi}^N = 0, \quad (8)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d(\rho E_{\varphi}^N)}{d\rho} + A_4 H_z^N + C_4 H_{\varphi}^N + D_4 E_{\varphi}^N = 0,$$

где

$$A_1^{(k-m)} = T^{-1} \int_0^T \left[-\left(\frac{1}{\alpha^2} \rho R R'' (1 - \rho^2 R' R') + \rho R' R' \alpha + i \alpha \gamma_k \rho R' R \right) \right] \times \\ \times \exp \left(i \frac{k-m}{T} 2\pi z \right) dz,$$

$$B_1^{(k-m)} = T^{-1} \int_0^T \left[\frac{1}{\alpha^2 k \rho} (-i \alpha n \gamma_k + 2n \rho^2 R' R'') \right] \exp \left(i \frac{k-m}{T} 2\pi z \right) dz,$$

$$C_1^{(k-m)} = T^{-1} \int_0^T \left[\frac{1}{\alpha^2 k} (i \alpha \gamma_k^2 - 2\gamma_k \rho^2 R' R'' - ik^2 \alpha^2) \right] \exp \left(i \frac{k-m}{T} 2\pi z \right) dz,$$

$$B_2^{(k-m)} = T^{-1} \int_0^T \left[\frac{1}{\alpha k \rho^2} (-in^2 + ik^2 \rho^2 R^2) \right] \exp \left(i \frac{k-m}{T} 2\pi z \right) dz,$$

$$C_2^{(k-m)} = T^{-1} \int_0^T \frac{i n \gamma_k}{\alpha k \rho} \exp \left(i \frac{k-m}{T} 2\pi z \right) dz,$$

$$D_2^{(k-m)} = T^{-1} \int_0^T \left(-\frac{i}{\alpha} \gamma_k \rho R R' \right) \exp \left(i \frac{k-m}{T} 2\pi z \right) dz,$$

$$A_3^{(k-m)} = -B_1^{(k-m)}, \quad A_4^{(k-m)} = -B_2^{(k-m)}, \quad B_3^{(k-m)} = A_1^{(k-m)},$$

$$C_3^{(k-m)} = -C_1^{(k-m)}, \quad C_4^{(k-m)} = -C_2^{(k-m)}, \quad D_4^{(k-m)} = D_2^{(k-m)},$$

$$\alpha = 1 + \rho R' R', \quad \gamma_k = (\gamma + 2\pi k) / T.$$

Граничные условия на поверхности металла выбираются путем проектирования условий Шукина—Леонтовича (5) на подпространство, натянутое на систему функций $\{\varphi_k(\beta, z)\}$, $k = 0, \pm 1, \dots, \pm N$:

$$\int_0^T \int_0^{2\pi} \{ [n E^N]_{\rho=1} + \bar{\omega} [n [n H^N]_{\rho=1}] \varphi_m^* d\varphi dz = 0, \quad m = 0, \pm 1, \dots, \pm N. \quad (9)$$

Условия при $\rho = 0$ получаются из требования ограниченности решения на оси z . При достаточно малых ρ поле гофрированного волновода близко к полю регулярного волновода. Из уравнений (4) следует, что при $\rho \rightarrow 0$ выполнено $|E_z| = \underline{\underline{o}}(\rho)$, $|H_z| = \underline{\underline{o}}(\rho)$. Используя представления (6), можно записать для несимметричных волн

$$E_z^N = 0, \quad H_z^N = 0, \quad \rho = \delta, \quad \rho \rightarrow 0. \quad (10)$$

Задача (8)—(10) сводится к эквивалентной алгебраической задаче на собственные значения. При этом общее решение системы (8) Y представится в виде

$$Y = \sum_{m=1}^r c_m Y_m, \quad (11)$$

где c_m — произвольные коэффициенты, Y_m , $m = \overline{1, r}$, — линейно независимые решения системы $BY = 0$, $r = 2(2N+1) = \text{rang } B$. Предположим, что определены функции $f_1(x), \dots, f_r(x)$, являющиеся решениями задачи Коши:

$$\frac{df_i}{dx} - A(x, \gamma) f_i = 0, \quad f_i(0) = Y_i, \quad i = \overline{1, r}.$$

Тогда решение краевой задачи (8)—(10) можно записать в виде

$$Y = \sum_{m=1}^r c_m f_m(x),$$

где c_m — постоянные коэффициенты, определяемые из условия существования нетривиального решения системы

$$D\left(\sum_{m=1}^r c_m f_m(1)\right) = 0.$$

Система имеет нетривиальное решение, если ее определитель равен нулю.

Отметим, что при вычислении векторов f_i численными методами необходимо учитывать, что решение задач Коши может экспоненциально возрастать. Это объясняется тем, что матрица $A(x, \gamma)$ при любом γ имеет собственные значения с большой по модулю вещественной частью как положительного, так и отрицательного знаков. В силу этого задачи Коши являются слабо устойчивыми по начальным данным. Некоторые компоненты f_i могут сильно возрастать при прогонке, и их значения могут выйти за пределы разрядной сетки ЭВМ. При сравнительно высоком порядке системы метод прогонки практически не применим. В этом случае используется модифицированный метод прогонки с ортогонализацией и нормировкой системы векторов $\{f_i(x)\}$ [8].

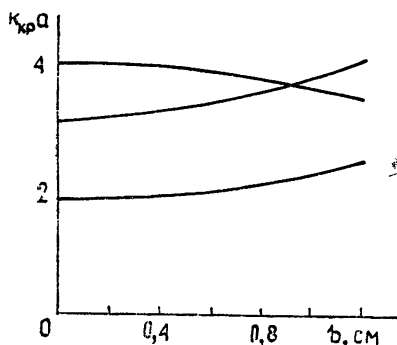


Рис. 1.

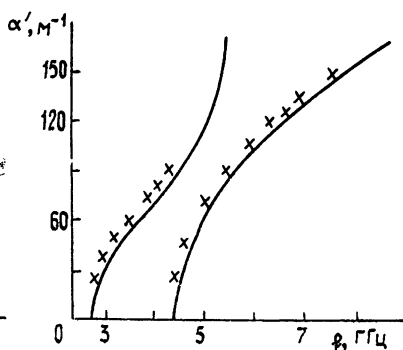


Рис. 2.

Таким образом, краевая задача на собственные значения сведена к нелинейной алгебраической задаче на собственные значения для матричного оператора

$$M(ka, \gamma) C = 0. \quad (12)$$

Коэффициент фазы и коэффициент затухания для заданного значения ka определяются из условия обращения в нуль определителя системы (12). Критические частоты определяются из условия

$$\det (M(ka, 0)) = 0.$$

На основе данного метода были проведены численные расчеты для круглого гофрированного волновода. Результаты расчетов представлены на рис. 1—4.

На рис. 1 показаны зависимости критических частот для азимутально-несимметричных волн в зависимости от глубины гофра. Эти данные получены при $a=3,8925$ см, $T=2$ см. Учитывались пять базисных волн.

На рис. 2 приведены дисперсионные характеристики для HE_{11} , EH_{11} -волн в случае волновода с глубоким синусоидальным гофром, рассчитанные по проекционному алгоритму. При расчетах полагалось, что $a=3,8925$ см, $T=2$ см, $b=0,8925$ см. Учитывались пять базисных волн. Для сравнения приведены данные эксперимента [9]. Сравнивая эти кривые, отметим, что достигнуто хорошее совпадение расчетов с экспериментом. Резкий подъем дисперсионной характеристики для HE_{11} -волны обусловлен ее трансформацией в поверхностную волну.

На рис. 3 показаны зависимости коэффициента фазы и коэффициента затухания от частоты. При расчетах полагалось $a=3,8925$ см, $b=0,8925$ см, $T=2$ см, $\sigma=5,05 \cdot 10^{17}$ с⁻¹, $\mu=1$. На рисунке можно проследить изменение постоянной затухания в зависимости от поведения постоянной фазы.

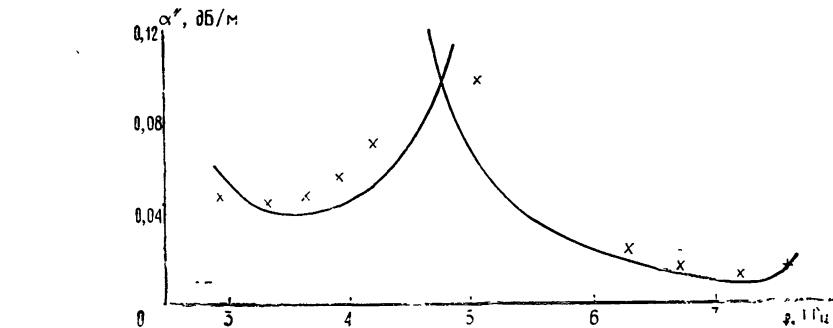


Рис. 3.

На рис. 3 показаны зависимости коэффициента фазы и коэффициента затухания от частоты. При расчетах полагалось $a=3,8925$ см, $b=0,8925$ см,

$T=2$ см, $\sigma=5,05 \cdot 10^{17}$ с⁻¹, $\mu=1$. На рисунке можно проследить изменение постоянной затухания в зависимости от поведения постоянной фазы.

Рис. 4

На рис. 4 приведены зависимости постоянных затухания от частоты для гофрированного волновода с синусоидальной формой гофра для параметров, указанных выше. Одновременно приведены результаты эксперимента. Совпадение носит лишь качественный характер. Это объясняется тем, что величина реальной проводимости меди может отличаться от табличного значения $\sigma=5,05 \cdot 10^{17}$ с⁻¹, принятого при расчетах. Как эксперимент, так и расчет показывают существование эффекта аномально малого затухания для волны HE_{11} . Физическое объяснение этого эффекта на основе бриллюэновской трактовки было дано в работе [9].

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильинский А. С., Свешников А. Г. — ДАН СССР, 1967, 1, № 2, с. 255.
2. Ильинский А. С., Альховский Э. А., Данилова А. Г. — Изв. вузов — Радиофизика, 1973, 16, № 10, с. 1583.

3. Альховский Э. А., Ильинский А. С., Трошин Г. И. — Радиотехника и электроника, 1974, 19, № 6, с. 1136.
4. Альховский Э. А., Ильинский А. С., Трошин Г. И. — Радиотехника и электроника, 1975, 20, № 4, с. 822.
5. Альховский Э. А., Ильинский А. С., Трошин Г. И. — Радиотехника и электроника, 1975, 20, № 11, с. 2250.
6. Быков А. А. — Изв. вузов — Радиофизика, 1982, 25, № 6, с. 695
7. Gans M. J. — IEEE Trans., 1965, MTT-13, № 3, p. 384.
8. Быков А. А., Ильинский А. С. — ЖВММФ, 1979, 19, № 3, с. 631
9. Ильинский А. С., Слепян Г. Я. Колебания и волны в электродинамических системах с потерями. — М: Гос. ун-т, 1983 — 232 с.

Московский государственный
университет

Поступила в редакцию
19 декабря 1985 г.

A NEW METHOD FOR DETERMINATION OF PHASE AND FADING CONSTANTS OF A CIRCULAR CORRUGATED WAVEGUIDE

A. S. Il'inskiy, M. V. Turikov

The direct projection method is elaborated for the calculation of eigen waves of a circular corrugated waveguide. The boundary problem for the eigenvalues has been obtained for the solution of which a method of directional orthogonality is used. The results of phase and fading constants calculation has been obtained for a circular corrugated waveguide with a sine form of the corrugation.

Аннотации депонированных статей

УДК 550.388

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В СЛОИСТО-НЕОДНОРОДНОЙ МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ

Р. Н. Кауфман

Рассматривается холодная бесстолкновительная плазма в цилиндрических координатах r , z и φ , где ось z параллельна постоянному внешнему магнитному полю. При условии, что электронная концентрация N есть медленно меняющаяся функция от r , для волны с частотой $\omega \gg \omega_L$, где ω_L — нижнегибридная частота, вводится локальный волновой вектор k и локальный показатель преломления n :

$$k_z = \frac{\omega}{c} p, \quad k_r = \frac{\omega}{c} q(r), \quad k_\varphi = 0, \quad n = (p^2 + q^2)^{1/2}. \quad (1)$$

Используя обозначения

$$X = X(r) = \frac{\omega_p^2(r)}{\omega_H} \sim N, \quad Y = \frac{\omega_H}{\omega}, \quad X_0 = 1 + \frac{Y^2(1-p^2)^2}{4p^2} \geq 1, \quad (2)$$

где ω_p — плазменная частота электронов, ω_H — их гирочастота. Из уравнений Максвелла для функции $q^2(r)$ из (1) получается формула, определяющая две ее ветви ($k = 1, 2$).

$$q_k^2 = 1 - p^2 - X \frac{1 - pYQ_k}{1 - X - Y_2}, \quad Q_k = -\frac{1-p^2}{2p} Y + (-1)^k \sqrt{X_0 - X}, \quad (3)$$

где X_0 есть точка слияния ветвей, когда $q_1^2 = q_2^2 = q_0^2$. Функция $q_2 = q^2(X)$ из (3) имеет три нуля, X_k ($k = 1, 2, 3$) и для $Y < 1$ — вертикальную асимптоту, проходящую через точку \tilde{X} :

$$X_{1,2} = (1-p^2)(1 \mp Y), \quad X_3 = 1, \quad \tilde{X} = 1 - Y^2,$$

(окончание см. с. 1378)