ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXX, № 11 РАДИОФИЗИКА 1987

УДК 621.37:519.21

КИНЕТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПЛОТНОСТЕЙ ВЕРОЯТНОСТИ НЕМАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ. ЭВОЛЮЦИЯ МОМЕНТНЫХ И КУМУЛЯНТНЫХ ФУНКЦИЙ

В. А. Казаков

Приведен вывод кинетических уравнений для плотностей вероятности непрерывных немарковских процессов. Вводятся отличные от известных кинетические коэффициенты. Рассматривается многомерный случай. Устанавливается связь кинетических коэффициентов с условными моментными и кумулянтными функциями случайного процесса. Находятся кинетические уравнения для моментных и кумулянтных функций. Производится проверка справедливости уравнений для моментных функций.

1. В литературе неоднократно подчеркивалось (см., например, [1–4]), что кинетическое уравнение Фоккера—Планка—Колмогорова (ФПК), выведенное для марковских процессов [5], справедливо и для процессов с последействием. В [6] на основе методики [1–3] получено обобщенное уравнение ФПК для немарковских процессов. В [6] показано, что кинетические коэффициенты, входящие в обобщенное уравнение ФПК, для дифференцируемых случайных процессов вырождаются, так что обобщенное уравнение [6] справедливо для довольно узкого класса непрерывных случайных процессов. В настоящей работе выводятся кинетические уравнения для плотностей вероятности непрерывных случайных процессов произвольного типа.

2. Зафиксируем в непрерывном случайном процессе $x(t)$ произвольное множество значений $X, T=\{X_1, T_1; X_2, T_2; \dots; X_n, T_n\}$. Кроме того, выделим в нем пару случайных величин $x, \hat{t}$ и x', t, предположив при этом, что моменты $\hat{t}$ и t не разделены ни одним из отсчетов множества X, T. Запишем формулу полной вероятности в виде

$$w(x, \hat{t}|X, T) = \int w(x', t|X, T)\, w(x, \hat{t}|x', t; X, T)\, dx'. \tag{1}$$

Воспользуемся известным разложением [2–4, 6]

$$w(x, \hat{t}|x', t, X, T) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \approx{\alpha}_n(\hat{t}|x', t, X, T) \frac{\partial^n}{\partial x^n} \delta(x'-x), \tag{2}$$

где $\overset{\approx}{\alpha}_n(\hat{t}|x', t, X, T) = \langle (x-x')^n \mid x', t, X, T\rangle$ — условная n-я моментная функция приращения $(x-x')$ за время $\hat{t}-t$. Причем

$$\overset{\approx}{\alpha}_0(\hat{t}|x', t, X, T) = 1. \tag{3}$$

Подставим (2) в (1), тогда получим

$$w(x, \hat{t}|X, T) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \overset{\approx}{\alpha}_n(\hat{t}|x, t, X, T)\, w(x, t|X, T). \tag{4}$$

Зададим в (4) $\hat{t} = t+\Delta t$, $\hat{t} = t$, будем иметь

$$w(x, t+\Delta t|X, T) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \overset{\approx}{\alpha}_n (t+\Delta t|x, t, X, T)\, w(x, t|X, T); \quad (5)$$

$$w(x, t|X, T) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \overset{\approx}{\alpha}_n (t|x, t, X, T)\, w(x, t|X, T)\,. \quad (6)$$

Вычтем из (5) соотношение (6), разделим обе части полученного равенства на Δt и затем перейдем к пределу при $\Delta t \to 0$. В результате приходим к обобщенному уравнению ФПК [6, 7].

Положим теперь $\hat{t} = t + 2\Delta t$, тогда на основании (4) запишем

$$w(x, t+2\Delta t|X, T) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \overset{\approx}{\alpha}_n (t+2\Delta t|x, t, X, T)\, w(x, t|X, T). \quad (7)$$

Умножим (7) на (—2) и сложим результат с (5), (6), тогда в левой и правых частях полученного равенства сформируются вторые конечные разности для плотности $w(x, \hat{t}|X, T)$ и функции $\overset{\approx}{\alpha}_n(\hat{t}|x, t, X, T)$. Разделив обе части полученного равенства на Δt^2 и перейдя к пределу $\Delta t \to 0$, получим уравнение

$$\frac{\partial^2 w(x, t|X, T)}{\partial t^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} B_n(x, t, X, T)\, w(x, t|X, T)\,, \quad (8)$$

где

$$B_n(x, t, X, T) = \left. \frac{\partial^2 \overset{\approx}{\alpha}_n(\hat{t}|x, t, X, T)}{\partial \hat{t}^2} \right|_{\hat{t}=t}. \quad (9)$$

Рассуждая аналогично, можно прийти к уравнению вида

$$\frac{\partial^N w(x, t|X, T)}{\partial t^N} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} H_n(x, t, X, T)\, w(x, t|X, T)\,, \quad (10)$$

где

$$H_n(x, t, X, T) = \left. \frac{\partial^N \overset{\approx}{\alpha}_n(\hat{t}|x, t, X, T)}{\partial \hat{t}^N} \right|_{\hat{t}=t}. \quad (11)$$

Кинетические уравнения (8), (10), равно как и уравнения в [6, 7], описывают эволюцию одновременной условной плотности вероятности $w(x, t|X, T)$ немарковских процессов, при этом текущее время t может принимать значения как между любыми моментами T_i, T_{i+1} из фиксированного множества T, так и вне пределов, очерчиваемых крайними элементами этого множества. Как видно, входящие в уравнение (8) кинетические коэффициенты (9) физически представляют собой ускорения n-й условной моментной функции приращения $\overset{\approx}{\alpha}_n(\hat{t}|x, t, X, T)$ в точке $\hat{t} = t$, тогда как в классическом и в обобщенном [6, 7] уравнениях ФПК они являются скоростями изменения той же функции в точке $\hat{t} = t$ [7].

3. Обратимся теперь к двувременной плотности вероятности $w(x_1, t_1; x_2, t_2|X, T)$ немарковского процесса. Помимо фиксированного множества X, T значений исходного процесса выделим в нем две пары случайных величин $x_1 \hat{t}_1$; x_1', t_1 и x_2, $\hat{t}_2$; x_2', t_2, предположив при этом, что каждая из этих пар не разделена ни одним из отсчетов фиксиро-

ванного множества X, T. По формуле полной вероятности для двувременных условных плотностей запишем

$$w(x_1, \hat{t}_1;\ x_2, \hat{t}_2\,|X,T) = \iint w(x'_1, t_1;\ x'_2, t_2\,|X,T)\times \tag{12}$$
$$\times w(x_1, \hat{t}_1;\ x_2, \hat{t}_2\ |\ x'_1, t_1;\ x'_2, t_2;\ X, T)\,dx'_1\,dx'_2.$$

По аналогии с тем, как получено соотношение (2) в [2–4, 6], можно найти разложение для двувременной условной плотности

$$w(x_1, \hat{t}_1;\ x_2, \hat{t}_2\ |\ x'_1, t_1;\ x'_2, t_2;\ X,\ T) = w(x_1, \hat{t}_1;\ x_2, \hat{t}_2\,|\,\cdot):$$

$$w(x_1, \hat{t}_1;\ x_2, \hat{t}_2\ |\,\cdot) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+m}}{n!\ m!}\,\overset{\approx}{\alpha}_{nm}(\hat{t}_1, \hat{t}_2\,|\,\cdot)\,\frac{\partial^{n+m}}{\partial x_1^n\,\partial x_2^m}\times \tag{13}$$
$$\times\,\delta(x_1 - x'_1)\,\delta(x_2 - x'_2),$$

где $\overset{\approx}{\alpha}_{nm}(\hat{t}_1, \hat{t}_2\,|\,\cdot)$ — условная двувременная $n+m$-я моментная функция приращения случайного процесса, $\overset{\approx}{\alpha}_{00}(\hat{t}_1, \hat{t}_2\,|\,\cdot) = 1$.

Подставим (13) в (12) и после интегрирования найдем

$$w(x_1, \hat{t}_1;\ x_2, \hat{t}_2\,|X,T) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+m}}{n!\,m!}\times \tag{14}$$
$$\times\,\frac{\partial^{n+m}}{\partial x_1^n\,\partial x_2^m}\,\overset{\approx}{\alpha}_{nm}(\hat{t}_1, \hat{t}_2\,|x_1\ t_1;\ x_2,\ t_2;\ X,\ T)\ w\ (x_1,\ t_1;\ x_2,\ t_2|X,\ T).$$

В соотношении (14), по аналогии с (4), временам $\hat{t}_1$ и $\hat{t}_2$ можно придавать различные значения. Последовательно положим: $\hat{t}_1 = t_1 + \Delta t_1$, $\hat{t}_2 = t_2 + \Delta t_2$; $\hat{t}_1 = t_1 + \Delta t_1$, $\hat{t}_2 = t_2$; $\hat{t}_1 = t_1$, $\hat{t}_2 = t_2 + \Delta t_2$; $\hat{t}_1 = t_1$, $\hat{t}_2 = t_2$, в результате получится четыре выражения. Второе и третье из них умножим на (-1), после чего все чытыре соотношения сложим, разделим обе части полученного равенства на $\Delta t_1 \Delta t_2$ и затем перейдем к пределу, когда $\Delta t_1 \to 0$, $\Delta t_2 \to 0$. В итоге приходим к кинетическому уравнению

$$\frac{\partial^2 w(x_1, t_1;\ x_2, t_2|X,T)}{\partial t_1 \partial t_2} = \sum_{\substack{n=0\\ n+m>0}}^{\infty}\ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+m}}{n!\,m!}\times \tag{15}$$
$$\times\,\frac{\partial^{n+m}}{\partial x_1^n\,\partial x_2^m}\,B_{nm}(x_1, t_1;\ x_2, t_2;\ X, T)\ w\,(x_1, t_1;\ x_2, t_2|X, T)\ ,$$

где кинетические коэффициенты B_{nm} определяются формулой

$$B_{nm}(x_1, t_1;\ x_2, t_2;\ X, T) = \frac{\partial^2}{\partial \hat{t}_1\,\partial \hat{t}_2}\,\overset{\approx}{\alpha}_{nm}(\hat{t}_1, \hat{t}_2\,|x_1, t_1;\ x_2, t_2;\ X, T)\Big|_{\hat{t}_i = t_i} \tag{16}$$
$$(i=1, 2).$$

Аналогично можно выписать уравнения для двувременной условной плотности $w(x_1, t_1;\ x_2, t_2|X, T)$, содержащие высшие смешанные производные по времени, которые не приводим. Рассуждая изложенным выше способом, можно прийти, например, к такому уравнению для многовременной плотности вероятности $w(x_1, t_1; \dots; x_N, t_N | X, T) = w\cdot$

$$\frac{\partial^N w}{\partial t_1 \dots \partial t_N} = \sum_{\substack{n=0 \\ n+\dots+p>0}} \dots \sum_{p=0} \frac{(-1)^{n+\dots+p}}{n! \dots p!} \times \tag{17}$$

$$\times \frac{\partial^{n+\dots+p}}{\partial x_1^n \dots \partial x_N^p} H_{n \dots p}(x_1, t_1; \dots; x_N, t_N; X, T) w,$$

где

$$H_{n \dots p}(x_1, t_1; \dots; x_N, t_N; X, T) = \tag{18}$$

$$= \frac{\partial^N}{\partial \hat{t}_1 \dots \partial \hat{t}_N} \tilde{\tilde{\alpha}}_{n \dots p}(\hat{t}_1, \dots, \hat{t}_N | x_1, t_1; \dots; x_N, t_N; X, T) |_{\hat{t}_i = t_i}.$$

Рассмотрим совокупность M случайных статистически связанных процессов $\boldsymbol{x}(t) = \{x_1(t), \dots, x_M(t)\}$. Для векторного процесса $\boldsymbol{x}(t)$ на основании приведенной методики также можно получить разнообразные кинетические уравнения. Так, уравнение для одновременной M-мерной плотности $w(\boldsymbol{x}, t | \boldsymbol{X}, T)$ имеет вид

$$\frac{\partial^2 w(\boldsymbol{x}, t | \boldsymbol{X}, T)}{\partial t^2} = \sum_{n_1} \dots \sum_{n_M} \frac{(-1)^{n_1+\dots+n_M}}{n_1! \dots n_M!} \frac{\partial^{n_1+\dots+n_M}}{\partial x_1^{n_1} \dots \partial x_M^{n_M}} \times \tag{19}$$

$$\times P_{n_1 \dots n_M}(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{X}, T) w(\boldsymbol{x}, t | \boldsymbol{X}, T),$$

где

$$P_{n_1 \dots n_M}(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{X}, T) = \frac{\partial^2}{\partial \hat{t}^2} \tilde{\tilde{\alpha}}^{x_1 \dots x_M}_{n_1 \dots n_M}(\hat{t} | \boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{X}, T)|_{\hat{t}=t}. \tag{20}$$

Обозначив $\boldsymbol{x}(t_k) = \boldsymbol{x}^{(k)}$, запишем уравнение для двувременной плотности $w(\boldsymbol{x}^{(1)}, t_1; \boldsymbol{x}^{(2)}, t_2 | \boldsymbol{X}, T) = w$:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t_1 \partial t_2} = \sum_{n_1} \dots \sum_{n_M} \sum_{m_1} \dots \sum_{m_M} \frac{(-1)^{n_1+\dots+n_M+m_1+\dots+m_M}}{n_1! \dots n_M! \, m_1! \dots m_M!} \times \tag{21}$$

$$\times \frac{\partial^{n_1+\dots+n_M+m_1+\dots+m_M}}{\partial x_1^{(1)n_1} \dots \partial x_M^{(1)n_M} \partial x_1^{(2)m_1} \dots \partial x_M^{(2)m_M}} P_{n_1 \dots n_M m_1 \dots m_M}(\boldsymbol{x}^{(1)}, t_1; \boldsymbol{x}^{(2)}, t_2; \boldsymbol{X}, T) w,$$

где кинетические коэффициенты P определяются выражением

$$P = \frac{\partial^2}{\partial \hat{t}_1 \partial \hat{t}_2} \tilde{\tilde{\alpha}}^{x_1^{(1)} \dots x_M^{(1)} x_1^{(2)} \dots x_M^{(2)}}_{n_1 \dots n_M m_1 \dots m_M}(\hat{t}_1, \hat{t}_2 | \boldsymbol{x}^{(1)}, t_1; \boldsymbol{x}^{(2)}, t_2; X, T)|_{\hat{t}_i = t_i}. \tag{22}$$

4. Все приведенные выше уравнения описывают эволюцию условных плотностей вероятности. От них можно перейти к уравнениям для безусловных плотностей. Проиллюстрируем этот переход на примере уравнения (15). Домножим обе части уравнения (15) на $w(X, T)$ и результат проинтегрируем по X. Тогда получим

$$\frac{\partial^2 w(x_1, t_1; x_2, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} = \sum_{\substack{n=0 \\ n+m>0}} \sum_{m=0} \frac{(-1)^{n+m}}{n! \, m!} \frac{\partial^{n+m}}{\partial x_1^n \partial x_2^m} \times \tag{23}$$

$$\times w(x_1, t_1; x_2, t_2) \int \ldots \int B_{nm}(x_1, t_1; x_2, t_2; X, T)\, w(X, T \mid x_1, t_1; x_2, t_2)\, dX .$$

Преобразуем интегральный член в (23) с учетом соотношения (16) следующим образом:

$$\int \ldots \int B_{nm} w(X, T \mid x_1, t_1; x_2, t_2)\, dX = \frac{\partial^2}{\partial \hat{t}_1\, \partial \hat{t}_2} \int \ldots \int \tilde{\tilde{\alpha}}_{nm}\, (\hat{t}_1, \hat{t}_2 \mid \cdot) \times$$

$$\times\, w(X, T \mid x_1, t_1; x_2, t_2)\, dX \,\Big|_{\hat{t}_i = t_i} =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial \hat{t}_1\, \partial \hat{t}_2} \int \ldots \int (\hat{x}_1 - x_1')^n (\hat{x}_2 - x_2')^m w(\hat{x}_1, \hat{t}_1; \hat{x}_2, \hat{t}_2 \mid x_1, t_1; x_2, t_2; X, T) \times$$

$$\times\, w\, (X, T \mid x_1, t_1; x_2, t_2)\, dX\, d\hat{x}_1\, d\hat{x}_2 \,\Big|_{\hat{t}_i = t_i} = \tag{24}$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial \hat{t}_1\, \partial \hat{t}_2}\, \tilde{\tilde{\alpha}}_{nm}(\hat{t}_1, \hat{t}_2 \mid x_1, t_1, x_2, t_2) \,\Big|_{\hat{t}_i = t_i} = B_{nm}(x_1, t_1, x_2, t_2) .$$

Выражение (24) позволяет записать уравнение (23) в виде

$$\frac{\partial^2 w(x_1, t_1; x_2, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} = \sum_{\substack{n=0 \\ n+m>0}} \sum_{m=0} \frac{(-1)^{n+m}}{n!\, m!} \frac{\partial^{n+m}}{\partial x_1^n\, \partial x_2^m} \times$$

$$\times\, B_{nm}(x_1, t_1; x_2, t_2)\, w(x_1, t_1; x_2, t_2) . \tag{25}$$

Уравнения для безусловных многовременных плотностей несколько упрощаются в стационарном режиме. Например, для двувременной плотности $w(x_1, t_1; x_2, t_2) = w(x_1; x_2, \tau)$, $\tau = t_2 - t_1$ уравнение (25) трансформируется в следующее:

$$-\frac{\partial^2 w(x_1; x_2, \tau)}{\partial \tau^2} = \sum_{\substack{n=0 \\ n+m>0}} \sum_{m=0} \frac{(-1)^{n+m}}{n!\, m!} \frac{\partial^{n+m}}{\partial x_1^n\, \partial x_2^m} \times$$

$$\times\, B_{nm}(x_1; x_2, \tau)\, w(x_1; x_2, \tau) , \tag{26}$$

где

$$B_{nm}(x_1; x_2, \tau) = \frac{\partial^2}{\partial \hat{t}_1\, \partial \hat{t}_2}\, \tilde{\tilde{\alpha}}_{nm}(\hat{t}_1, \hat{t}_2 \mid x_1; x_2, \tau) \Big|_{\substack{\hat{t}_1 = 0 \\ \hat{t}_2 = \tau}} . \tag{27}$$

Как видно, все полученные кинетические уравнения являются дифференциальными уравнениями в частных производных. Для своего решения они требуют задания начальных и граничных условий, которые в зависимости от особенностей конкретных задач могут быть весьма разнообразными.

5. Установим связь кинетических коэффициентов с условными кумулянтными и моментными функциями процесса. Аналогичная задача для коэффициентов обобщенного уравнения ФПК обсуждалась в [7]. Рассмотрим подробно двувременные кинетические коэффициенты (16). Можно показать, что двувременные условные характеристические функции случайного процесса $\tilde{\Theta}(u_1, \hat{t}_1; u_2, \hat{t}_2 \mid x_1, t_1; x_2, t_2; X, T)$ и его приращения $\tilde{\tilde{\Theta}}(u_1, \hat{t}_1; u_2, \hat{t}_2 \mid x_1, t_1; x_2, t_2; X, T)$ связаны между собой соотношением

$$\stackrel{\approx}{\Theta}(u_1, \hat{t}_1; u_2, \hat{t}_2 \mid \cdot) = \exp(-iu_1x_1 - iu_2x_2)\tilde{\Theta}(u_1, \hat{t}_1; u_2, \hat{t}_2 \mid \cdot), \quad (28)$$

где точкой обозначен набор фиксированных переменных.

Условные характеристические функции процесса и его приращения представим в виде разложений по соответствующим условным моментным функциям процесса $\tilde{\alpha}_{kl}(\hat{t}_1, \hat{t}_2 \mid \cdot)$ и приращения $\stackrel{\approx}{\alpha}_{nm}(\hat{t}_1, \hat{t}_2 \mid \cdot)$. (Формулы разложения для безусловных функций см., например, в [8].). Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях iu_1 и iu_2, можно получить следующее выражение, связывающее функции $\stackrel{\approx}{\alpha}_{nm}(\hat{t}_1, \hat{t}_2 \mid \cdot)$ с функциями $\tilde{\alpha}_{kl}(\hat{t}_1, \hat{t}_2 \mid \cdot)$:

$$\stackrel{\approx}{\alpha}_{nm}(\hat{t}_1, \hat{t}_2 \mid \cdot) = \sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{m} C_n^p C_m^q \tilde{\alpha}_{n-p, m-q}(\hat{t}_1, \hat{t}_2 \mid \cdot) \times$$
$$\times (-x_1)^p(-x_2)^q = \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{m} C_n^k C_m^l \tilde{\alpha}_{kl}(\hat{t}_1, \hat{t}_2 \mid \cdot)(-x_1)^{n-k}(-x_2)^{m-l}. \quad (29)$$

В соответствии с (16), учитывая (29), определяем двувременные коэффициенты через условные двувременные моментные функции случайного процесса:

$$B_{nm}(x_1, t_1; x_2, t_2; X, T) = \sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{m} C_n^p C_m^q (-x_1)^p(-x_2)^q \times$$
$$\times \left.\frac{\partial^2\tilde{\alpha}_{n-p, m-q}(t_1, t_2 \mid \cdot)}{\partial\hat{t}_1\, \partial\hat{t}_2}\right|_{\hat{t}_i = t_i} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{m} C_n^k C_m^l (-x_1)^{n-k} \times \quad (30)$$
$$\times (-x_2)^{m-l} \left.\frac{\partial^2\tilde{\alpha}_{kl}(\hat{t}_1, \hat{t}_2 \mid \cdot)}{\partial\hat{t}_1\, \partial\hat{t}_2}\right|_{\hat{t}_i = t_i}.$$

Соотношения для одновременных коэффициентов получаются по методике [7]:

$$H(x, t, X, T) = \sum_{k=0}^{l} C_l^k (-x)^{l-k} \left.\frac{\partial^N\tilde{\alpha}_k(\hat{t} \mid x, t, X, T)}{\partial\hat{t}^N}\right|_{\hat{t}=t}. \quad (31)$$

Аналогично можно получить соотношения, выражающие другие кинетические коэффициенты через условные моментные функции процесса.

Для того чтобы выразить кинетические коэффициенты через кумулянты, необходимо использовать разложения характеристических функций $\tilde{\Theta}$ и $\stackrel{\approx}{\Theta}$ через двувременные условные кумулянтные функции процесса $\tilde{\varkappa}_{kl}(\hat{t}_1, \hat{t}_2 \mid \cdot)$ и его приращения $\stackrel{\approx}{\varkappa}_{nm}(\hat{t}_1, \hat{t}_2 \mid \cdot)$, подставить эти разложения в (28), прологарифмировать и затем приравнять коэффициенты при одинаковых степенях iu_1, iu_2. В результате приходим к следующим выражениям:

$$\stackrel{\approx}{\varkappa}_{10}(\hat{t}_1, \hat{t}_2 \mid \cdot) = \tilde{\varkappa}_{10}(\hat{t}_1 \mid \cdot) - x_1, \quad \stackrel{\approx}{\varkappa}_{01}(\hat{t}_1, \hat{t}_2 \mid \cdot) = \varkappa_{01}(t_2 \mid \cdot) - x_2; \quad (32)$$

$$\stackrel{\approx}{\varkappa}_{nm}(\hat{t}_1, \hat{t}_2 \mid \cdot) = \tilde{\varkappa}_{nm}(\hat{t}_1, \hat{t}_2 \mid \cdot) \quad (n, m > 1). \quad (33)$$

Формулы связи двувременных моментов и кумулянтов, а также соотношения (32), (33) и определение (27) позволяют записать кинетические коэффициенты B_{nm} через условные кумулянтные функции процесса. Например:

$$B_{11} = \left[\frac{\partial^2 \tilde{\varkappa}_{11}}{\partial \hat{t}_1 \partial \hat{t}_2} + \frac{\partial \tilde{\varkappa}_{01}}{\partial \hat{t}_2} \frac{\partial \tilde{\varkappa}_{10}}{\partial \hat{t}_1}\right]_{\hat{t}_i = t_i},$$

$$B_{21} = \left[\frac{\partial^2 \tilde{\varkappa}_{21}}{\partial \hat{t}_1 \partial \hat{t}_2} + \frac{\partial \tilde{\varkappa}_{20}}{\partial \hat{t}_1} \frac{\partial \tilde{\varkappa}_{01}}{\partial \hat{t}_2} + 2\frac{\partial \tilde{\varkappa}_{11}}{\partial \hat{t}_2} \frac{\partial \tilde{\varkappa}_{10}}{\partial \hat{t}_1}\right]_{\hat{t}_i = t_i}; \tag{34}$$

$$B_{31} = \left[\frac{\partial^2 \tilde{\varkappa}_{31}}{\partial \hat{t}_1 \partial \hat{t}_2} + 3\frac{\partial \tilde{\varkappa}_{20}}{\partial \hat{t}_1} \frac{\partial \tilde{\varkappa}_{11}}{\partial \hat{t}_2} + 3\frac{\partial \tilde{\varkappa}_{21}}{\partial \hat{t}_2} \frac{\partial \tilde{\varkappa}_{10}}{\partial \hat{t}_1} + \frac{\partial \tilde{\varkappa}_{30}}{\partial \hat{t}_1} \frac{\partial \tilde{\varkappa}_{01}}{\partial \hat{t}_2}\right]_{\hat{t}_i = t_i}, \tag{35}$$

здесь и ниже аргументы у функций опущены.

У гауссовых процессов отличны от нуля лишь пять кумулянтных функций [8], поэтому для этого случая формулы типа (34), (35) упрощаются за счет того, что $\tilde{\varkappa}_{21} = \tilde{\varkappa}_{31} = \tilde{\varkappa}_{30} = 0$. Подобные же соображения можно использовать и при определении иных кинетических коэффициентов через условные кумулянтные функции процесса. Ограничимся, однако, тем, что приведем формулы для одновременных кинетических коэффициентов. Обозначая производные по $\hat{t}$ штрихами, имеем:

$$B_1 = [\tilde{\varkappa}_1'']_{\hat{t}=t}, \quad B_2 = [\tilde{\varkappa}_2'' + 2(\tilde{\varkappa}_1')^2]_{\hat{t}=t}, \quad B_3 = [\tilde{\varkappa}_3'' + 6\tilde{\varkappa}_2' \tilde{\varkappa}_1']_{\hat{t}=t},$$

$$B_4 = [\tilde{\varkappa}_4'' + 6(\tilde{\varkappa}_2')^2 + 8\tilde{\varkappa}_3' \tilde{\varkappa}_1']_{\hat{t}=t}, \quad B_5 = [\tilde{\varkappa}_5'' + 10\tilde{\varkappa}_1' \tilde{\varkappa}_4' + 20\tilde{\varkappa}_2' \tilde{\varkappa}_3']_{\hat{t}=t}. \tag{36}$$

Когда исходный процесс, в котором зафиксировано множество значений X, T, стационарен, то при выборе времен $\hat{t}$ и t, далеко отстоящих от элементов множества X, T, условные кумулянтные функции $\tilde{\varkappa}_n$ становятся зависящими от времени $\tau = \hat{t} - t$. При этом формулы (36) упрощаются, а производные по $\hat{t}$ заменяются на производные по τ, вычисляемые в точке $\tau = 0$.

Для гауссовых процессов $\tilde{\varkappa}_n = 0$ при $n \geqslant 3$, поэтому ряд членов в формулах (36) исчезает, и становится ясным, что даже для этого частного случая отличны от нуля четыре кинетических коэффициента B_n. В стационарном режиме вместо (36) запишем

$$B_1 = [\tilde{\varkappa}_1'']_{\tau=0}, \quad B_2 = [\tilde{\varkappa}_2'' + 2(\tilde{\varkappa}_1')^2]_{\tau=0}, \quad B_3 = [6\tilde{\varkappa}_2' \tilde{\varkappa}_1']_{\tau=0},$$

$$B_4 = [6(\tilde{\varkappa}_2')^2]_{\tau=0}. \tag{37}$$

У дифференцируемых гауссовых процессов $[\tilde{\varkappa}_1']_{\tau=0} = [\tilde{\varkappa}_2']_{\tau=0} = 0$, поэтому для них отличны от нуля лишь первые два кинетических коэффициента:

$$B_1 = [\tilde{\varkappa}_1'']_{\tau=0}, \quad B_2 = [\tilde{\varkappa}_2'']_{\tau=0}. \tag{38}$$

В ряде случаев подобная ситуация имеет место и в переходном режиме.

6. Особый интерес представляет определение кинетических коэффициентов по известным безусловным кумулянтным или моментным функциям процесса. Однако общих соотношений, позволяющих выразить условные функции через безусловные для произвольных процессов, не известно. Определенные возможности открывают в этом отношении связи, установленные для квазимоментных функций [10]. Ниже мы, однако, ограничимся классом гауссовых процессов, для которых формулы связи условных кумулянтных функций с безусловными выглядят так [2]:

$$\tilde{\varkappa}_1(\hat{t}) = \varkappa_1(\hat{t}) + \sum_{\alpha,\beta=1}^{r}\sum^{r} \varkappa_{11}(\hat{t}, T_\alpha) a_{\alpha\beta}[x(T_\beta) - \varkappa_1(T_\beta)]; \tag{39}$$

$$\tilde{\varkappa}_{11}(\hat{t}_1, \hat{t}_2) = \varkappa_{11}(\hat{t}_1, \hat{t}_2) - \sum_{\alpha,\beta=1}^{r}\sum^{r} \varkappa_{11}(\hat{t}, T_\alpha) a_{\alpha\beta}\varkappa_{11}(T_\beta, \hat{t}_2), \tag{40}$$

где $\varkappa_1(t)$, $\varkappa_{11}(t_1, t_2)$ — безусловные кумулянтные функции, $a_{\alpha\beta}$ — элементы матрицы, обратной корреляционной $\|\varkappa_{11}(t_\alpha, t_\beta)\|$, r — число фиксированных точек, состоящее в данном случае из множества X, T и точки x, t.

При $\hat{t}_1 = \hat{t}_2 = t$ из (40) находим

$$\tilde{\varkappa}_2(t) = \varkappa_2(\hat{t}) - \sum_{\alpha,\beta=1}^{r}\sum^{r} \varkappa_{11}(\hat{t}, T_\alpha) a_{\alpha\beta}\varkappa_{11}(T_\beta, \hat{t}). \tag{41}$$

(Для точки x, t специальных обозначений в (39) — (41) не введено.) Вычисляя соответствующие производные от (39)—(41) и подставляя их в выражения (34) — (38) и т. д., можно получить развернутые формулы для кинетических коэффициентов гауссовых процессов при любых текущих временах t, t_1, t_2 и произвольном множестве X, T. Из-за громоздкости общие формулы выписывать не будем, ограничимся лишь стационарным режимом, для которого

$$\begin{gathered}\tilde{\varkappa}_1(\tau) = \varkappa_1 + R(\tau)[x - \varkappa_1], \quad \tilde{\varkappa}_2(\tau) = \varkappa_2[1 - R^2(\tau)], \\ R(\tau) = \varkappa_{11}(\tau)/\varkappa_2.\end{gathered} \tag{42}$$

Конкретизируем вид корреляционной функции $\varkappa_{11}(\tau)$. Пусть

$$\varkappa_{11}(\tau) = [\varkappa_2/(\beta - \alpha)](\beta e^{-\alpha|\tau|} - \alpha e^{-\beta|\tau|}). \tag{43}$$

Как известно [11], такой процесс, будучи дифференцируемым и немарковским, может быть представлен в виде компоненты двумерного марковского процесса. Простые вычисления в соответствии с (38), (42), (43) дают

$$B_1 = \alpha\beta x, \quad B_2 = 2\alpha\beta\varkappa_2. \tag{44}$$

Кинетические коэффициенты B_n можно вычислить и для марковского гауссова процесса, у которого $R(\tau) = \exp(-\beta|\tau|)$. С учетом того, что этот процесс недифференцируем, на основе (37) находим

$$B_1 = x\beta_2, \quad B_2 = -4\beta^2 + 2\beta^2 x^2, \quad B_3 = -12\beta^2 x, \quad B_4 = 24\beta^2. \tag{45}$$

Конечно, использовать кинетическое уравнение (10) для описания одномерного марковского процесса с коэффициентами (45) особой нужды нет. Однако она может возникнуть, если рассматривать, например, двумерный процесс, у которого один компонент дифференцируемый, а второй нет. При этом в кинетическое уравнение для двумерного процесса войдут, в частности, и коэффициенты (45).

Приведенные выше рассуждения сохраняют свою силу и в случае, если вместо фиксированного дискретного множества X, T рассматривать фиксированную на интервале 0, T реализацию x_0^T. При этом формулы для условных кумулянтных функций примут интегральный вид, а кинетические коэффициенты будут функционалами от реализации x_0^T.

7. На основе полученных выше кинетических уравнений для плотностей вероятности можно найти более простые уравнения для моментных и кумулянтных функций. Методика получения таких уравнений мо-

жет быть различной [4, 8, 11]. Ниже используется метод сопряженного оператора [8]. Поскольку характер выкладок в данном пункте близок к [8], то изложение носит конспективный характер.

Обратимся, например, к довольно общему уравнению (17), сопряженный оператор для которого имеет вид

$$L^{+}(x_1, t_1; \ldots ; x_N, t_N; X, T) = \sum_{\substack{n=0 \\ n+\ldots+p>0}} \ldots \sum_{p=0} \frac{H_{n \ldots p}(x_1, t_1; \ldots ; x_N, t_N; X, T)}{n! \ldots p!} \frac{\partial^{n+\ldots+p}}{\partial x_1^n \ldots \partial x_N^p}. \tag{46}$$

Сформируем функцию $f(x_1, t_1; \ldots ; x_N, t_N)$ и запишем N-ю смешанную производную от ее условного математического ожидания. Следуя [8], на основе (17), (46) получим

$$\frac{\partial^N \langle f(x_1, t_1; \ldots ; x_N, t_N | X, T\rangle}{\partial t_1 \ldots \partial t_N} = \langle L^{+}(x_1, t_1; \ldots ; x_N, t_N; X, T) \times f(x_1, t_1; \ldots ; x_N, t_N) | X, T\rangle, \tag{47}$$

где статистическое усреднение производится по условной плотности.

Выберем в качестве $f(x_1, t_1; \ldots ; x_N, t_N)$ произведение вида $x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_N^{m_N}$. Задаваясь величинами $m_1, m_2, \ldots, m_N$, из (47) можно получить уравнения для любых моментных функций. Например, при $m_1 = m_2 = \ldots = m_N = 1$ для условной моментной функции $\tilde{\alpha}_{11 \cdots 1}(t_1, t_2, \ldots, t_N | X, T)$ имеем уравнение

$$\frac{\partial^N \tilde{\alpha}_{11 \ldots 1}}{\partial t_1 \ldots \partial t_N} = \sum_{l=1}^{N} C_N^l \{\langle x_1 x_2 \ldots x_{N-l} H_{1 \ldots 1}^{N-l+1 \ldots N} | X, T\rangle\}_s. \tag{48}$$

Здесь аргументы у функций опущены, а фигурные скобки с индексом s означают операцию симметризации [2, 8]. Увеличение порядка условной моментной функции ведет к естественному усложнению уравнений по сравнению с (48). Выпишем теперь уравнения для дву- и одновременных моментных функций.

Двувременная условная моментная функция $(s+r)$-го порядка подчиняется следующему уравнению, полученному на основе (15):

$$\frac{\partial^2 \tilde{\alpha}_{sr}(t_1, t_2 | X, T)}{\partial t_1 \partial t_2} = \sum_{\substack{n=0 \\ n+m>0}}^{s} \sum_{m=0}^{r} C_s^n C_r^m \langle x_1^{s-n} x_2^{r-m} B_{nm}(x_1, t_1; x_2, t_2; X, T) | X, T\rangle. \tag{49}$$

На основании уравнения (26) для стационарной плотности находим

$$-\frac{\partial^2 \alpha_{sr}(\tau)}{\partial \tau^2} = \sum_{l=1}^{r} C_r^l \langle x_1^s x_2^{r-l} B_l(x_1; x_2, \tau)\rangle. \tag{50}$$

Уравнение эволюции одновременной условной моментной функции $\tilde{\alpha}_s(t | X, T)$ согласно (10) получается таким:

$$\frac{d^N}{dt^N} \tilde{\alpha}_s(t | X, T) = \sum_{l=1}^{s} C_s^l \langle x^{s-l} H_l(x, t, X, T) | X, T\rangle. \tag{51}$$

Аналогично можно найти уравнения эволюции моментных функций, исходя из других кинетических уравнений для плотностей вероятности.

Чтобы получить уравнения для кумулянтных функций, необходимо [8] воспользоваться соотношениями, связывающими кумулянтные и моментные функции, а также учесть уравнения для моментных функций. Найдем, например, уравнение для второго кумулянта применительно к кинетическому уравнению (8). Для этого дважды продифференцируем по t соотношение $\tilde{\varkappa}_2=\tilde{\alpha}_2-\tilde{\alpha}_1^2$, а затем подставим в правую часть соответствующие выражения из (51), положив в нем $N=2$, $s=1$; 2. В результате получим

$$\frac{d^2\tilde{\varkappa}_2}{dt^2}=2\langle xB_1|X,T\rangle+\langle B_2|X,T\rangle-2\tilde{\varkappa}_1\langle B_1|X,T\rangle-2\langle A_1|X,T\rangle^2 . \quad (52)$$

Обращает на себя внимание тот факт, что в правую часть уравнения (52) помимо коэффициентов B_n входит коэффициент A_1. Подобную особенность сохраняют уравнения и для кумулянтов более высокого порядка.

Рассмотрим примеры. Обратимся к стационарному гауссову случайному процессу с нулевым средним и функцией корреляции $\varkappa_{11}(\tau)=\exp(-|\tau|)$. Зафиксируем в нем две точки X_1, T_1 и X_2, T_2 $(T_1<T_2)$. Полученный таким образом условный процесс является нестационарным и при $t<T_1$, $T_1<t<T_2$ становится немарковским. Расчеты по формулам (37), (39), (41) показывают, что при $T_1<t<T_2$ кинетические коэффициенты B_1 и B_2 определяются соотношениями

$$B_1=x,\ \ B_2=-\frac{4(1+e^{-2\theta})}{1-e^{-2\theta}}+2\left(\frac{2X_2e^{-\theta}}{1-e^{-2\theta}}-x\frac{1+e^{-2\theta}}{1-e^{-2\theta}}\right)^2,\ \ \theta=T_2-t . \quad (53)$$

Коэффициент A_1 вычислен в [7]:

$$A_1(x,t,X,T)=-x\frac{1+e^{-2\theta}}{1-e^{-2\theta}}+2X_2\frac{e^{-\theta}}{1-e^{-2\theta}} . \quad (54)$$

Рассмотрим уравнение для первой моментной функции, положив в (51) $N=2$, $s=1$:

$$\frac{d^2}{dt^2}\tilde{\alpha}_1(t|X,T)=\langle B_1(x,t,X,T)|X,T\rangle=\tilde{\alpha}_1(t|X,T) . \quad (55)$$

Для уравнения (55) зададим граничные условия

$$\tilde{\alpha}_1(t=T_1|X,T)=X_1,\ \ \tilde{\alpha}_1(t=T_2|X,T)=X_2 . \quad (56)$$

Пусть также $T_1=0$, тогда решение уравнения (55) записывается в виде

$$\tilde{\alpha}_1(t|X,T)=\frac{X_2-X_1e^{-T_2}}{e^{T_2}-e^{-T_2}}e^t+\frac{X_1e^{T_2}-X_2}{e^{T_2}-e^{-T_2}}e^{-t}. \quad (57)$$

Рассмотрим теперь уравнение (52) для кумулянтной функции $\tilde{\varkappa}_2(t|X,T)$. С учетом (53), (54) его правая часть преобразуется так, что вместо (52) имеем

$$\frac{d^2\tilde{\varkappa}_2}{dt^2}=4\tilde{\varkappa}_2\frac{1+e^{-4\theta}}{(1-e^{-2\theta})^2}-4\frac{1-e^{-4\theta}}{(1-e^{-2\theta})^2} . \quad (58)$$

Уравнение (58) следует решать при граничных условиях

$$\tilde{\varkappa}_2(t=T_1=0|X,T)=\tilde{\varkappa}_2(t=T_2|X,T)=0 .$$

Аналитически решить уравнение (58) из-за переменных коэффициентов непросто. Однако подстановкой функции

$$\tilde{\varkappa}_2(t|X,T)=\frac{e^{2T_2}}{1-e^{2T_2}}(e^{-\theta}-e^{\theta})^2-(1-e^{2\theta}) \quad (59)$$

можно убедиться в том, что (59) является решением уравнения (58). Соотношения (57), (59) совпадают с соответствующими выражениями, которые получены в [9] из решения других уравнений, относящихся к рассматриваемому случайному процессу.

8. Представляет интерес проверка хотя бы некоторых из полученных уравнений без конкретизации закона распределения процесса. С этой целью обратимся к уравнению (51) и подставим в него соотношение (31). Последовательно имеем

$$\frac{d^N}{dt^N}\tilde{\alpha}_s(t|X,T)=\sum_{l=0}^{s}C_s^l\langle x^{s-l}\sum_{k=0}^{l}C_l^k(-x)^{l-k}\times$$

$$\times(\partial^N/\partial\hat{t}^N)\tilde{\alpha}(\hat{t}|x,t,X,T)\,|X,T\rangle|_{\hat{t}=t}=$$

$$=\frac{d^N}{\partial\hat{t}^N}\Big[\sum_{l=0}^{s}C_s^l\sum_{k=0}^{l}C_l^k(-1)^{l-k}\langle x^{s-k}\tilde{\alpha}_k(\hat{t}\,|x,t,X,T)\,|X,T\rangle\Big]_{\hat{t}=t}. \tag{60}$$

Здесь учтено, что $H_0(x,t,X,T)=0$.

Заметим, что в правую и левую части (60) входят различные условные моментные функции процесса. Преобразуем моментную скобку в (60) следующим образом:

$$\langle x^{s-k}\tilde{\alpha}_k(\hat{t}\,|x,t,X,T)\,|X,T\rangle=\langle x^{s-k}\langle\hat{x}^k\,|x,t,X,T\rangle|X,T\rangle=$$

$$=\iint x^{s-k}\hat{x}^k w(\hat{x},\hat{t}\,|x,t,X,T)\,w(x,t|X,T)\,dx\,d\hat{x}= \tag{61}$$

$$=\iint\hat{x}^k x^{s-k}w(x,t,\hat{x},\hat{t}\,|X,T)\,dx\,d\hat{x}=\tilde{\alpha}_{k,s-k}(\hat{t},t|X,T).$$

С учетом (61) уравнение (60) приводим к виду

$$\frac{d^N}{dt^N}\tilde{\alpha}_s(t|X,T)=\frac{d}{d\hat{t}}\Big[\sum_{l=0}^{s}C_s^l\sum_{k=0}^{l}C_l^k(-1)^{l-k}\tilde{\alpha}_{k,s-k}(\hat{t},t|X,T)\Big]_{\hat{t}=t}. \tag{62}$$

В соотношении (62) моментные функции имеют теперь одно и то же фиксированное множество в условии. Из (62) выпишем коэффициент S_1 при моментной функции $\tilde{\alpha}_{k,s-k}(\hat{t},t|X,T)$:

$$S_1=\sum_{l=0}^{s}C_s^lC_l^k(-1)^{l-k}=\frac{s!}{k!}\sum_{l=0}^{s}\frac{(-1)^{l-k}}{(s-l)!\,(l-k)!}. \tag{63}$$

Покажем, что сумма ряда (63) при $k<s$ равна нулю. Для этого запишем формулу бинома Ньютона

$$(a+b)^s=\sum_{l=0}^{s}C_s^la^lb^{s-l} \tag{64}$$

и продифференцируем обе части равенства (64) k раз по a. В результате имеем:

$$s(s-1)\ldots(s-k+1)(a+b)^{s-k}=\sum_{l=0}^{s}C_s^l\,l(l-1)\ldots(l-k+1)a^{l-k}b^{s-l}. \tag{65}$$

В (65) положим $a=-1$, $b=1$, тогда приходим к равенству

$$0=\sum_{l=0}^{s}C_s^l(-1)^{l-k}l(l-1)\ldots(l-k+1)=s!\sum_{l=0}^{s}\frac{(-1)^{l-k}}{(s-l)!\,(l-k)!}. \tag{66}$$

Сопоставляя (66) и (63), заключаем, что $S_1=0$.

Обратим теперь внимание на тот факт, что в (62) при $k=s$ коэффициент при моментной функции $\tilde{\alpha}_{s,0}(\hat{t}, t|X, T)$ состоит из одного слагаемого и представляет собой единицу. В результате приходим к выводу о том, что соотношение (62) есть тождество.

Рассмотрим теперь уравнение для двувременной условной моментной функции (49) и подставим в него выражение (30). После преобразований, аналогичных (60), (61), придем к соотношению

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} \tilde{\alpha}_{sr}(t_1, t_2| X, 7) = \frac{\partial^2}{\partial \hat{t}_1 \partial \hat{t}_2} \Big[\sum_{n=0}^{s} \sum_{m=0}^{r} C_s^n C_r^m \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{m} C_n^k C_m^l (-1)^{n-k} \times$$
$$\times (-1)^{m-l} \tilde{\alpha}_{k, s-k, l, r-l} (\hat{t}_1, t_1, \hat{t}_2, t_2|X, T) \Big]_{\hat{t}_i = t_i}. \tag{67}$$

Из (67) выпишем коэффициент S_2 при моментной функции:

$$S_2 = \sum_{n=0}^{s} \sum_{m=0}^{r} C_s^n C_r^m C_n^k C_m^l (-1)^{n-k} (-1)^{m-l} =$$
$$= \sum_{n=0}^{s} C_s^n C_n^k (-1)^{n-k} \sum_{m=0}^{r} C_r^m C_m^l (-1)^{m-l}. \tag{68}$$

В соответствии с (63)—(66) заключаем, что каждая из сумм, входящих в (68), равна нулю, если $n<s$, $m<r$. Если учесть, что при $n=s$, $m=r$ коэффициент при моментной функции $\tilde{\alpha}_{s,0,r,0}(\hat{t}_1, t_1, \hat{t}_2, t_2|X, T)$ равен единице, то приходим к выводу о том, что соотношение (67) есть тождество.

Аналогичные рассуждения можно провести и для уравнений относительно многовременных условных моментных функций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецов П. И., Стратонович Р. Л., Тихонов В. И. — ЖЭТФ, 1954, **26**, вып. 2, с 189.
2. Стратонович Р. Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике — М: Сов. радио, 1961, с. 558.
3. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. — М: Сов. радио, 1966, с. 678.
4. Тихонов В. И, Миронов М. А. Марковские процессы. — М.: Сов. радио, 1977, с. 488.
5. Колмогоров А. Н. — УМН, 1938, вып. 5, с. 5.
6. Pawula R. F. — Trans. IEEE, 1967, **IT-13**, № 1, p. 33
7. Казаков В. А. — Изв. вузов — Радиофизика, 1986, **29**, № 11, с. 1344.
8. Малахов А. Н. Кумулянтный анализ негауссовых случайных процессов и их преобразований. — М :Сов радио, 1978, с. 376.
9. Казаков В. А. — Изв. вузов — Радиофизика, 1987, **30**, № 8, с. 1042.
10. Кузнецов П. И., Стратонович Р. Л, Тихонов В. И. — Теория вероятностей и ее применения, 1961, № 4, с 458.
11. Тихонов В. И, Кульман Н. К. Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием радиосигналов. — М · Сов. радио, 1975, с. 704.

Рязанский радиотехнический институт

Поступила в редакцию 9 января 1986 г., после объединения 20 мая 1986 г.

KINETIC EQUATIONS FOR THE PROBABILITY DENSITY OF NONMARKOVIAN PROCESSES. EVOLUTION OF THE MOMENT AND CUMULANT FUNCTIONS.

V. A. Kazakov

The derivation of kinetic equations for the probability density nonmarkovian processes are given. New kinetic coefficients are introduced. Multidimensional case of kinetic equations is considered. Connections between kinetic coefficients and conditional moment and cumulant functions of random processes are obtained. Kinetic equations for moment and cumulant functions are derived. The control of correctness of moment function equations is produced.