ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXX, № 11 РАДИОФИЗИКА 1987

УДК 538.56 519 25

О НЕЛИНЕЙНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ВОЛН В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

А. С. Пиковский

Нелинейное резонансное взаимодействие трех волн в диспергирующей среде рассматривается в рамках гамильтоновского формализма. Для случайной неоднородности найдена стационарная функция распределения и выведены упрощенные диффузионные уравнения Взаимодействие в периодически неоднородной среде определяется характером неоднородности При мелкомасштабной неоднородности взаимодействие существенно замедляется, а при крупномасштабной — хаотизуется. Исследуется зависимость степени хаотизации от интегралов Мэнли—Роу.

Нелинейное резонансное взаимодействие волн играет большую роль в гидродинамике, нелинейной оптике, физике плазмы. Одним из основных элементарных процессов является обмен энергией между тремя резонансно связанными волнами в диспергирующей среде. Существенное влияние на взаимодействие оказывает неоднородность среды, приводящая к сбою фаз волн. Наибольший интерес представляют случаи достаточно плавной случайной [1, 2] и периодической [3–5] неоднородности. В данной работе при рассмотрении невырожденного трехволнового взаимодействия в неоднородной среде используется единый гамильтоновский подход. Уравнения динамики волн приводятся к гамильтоновской форме в разд. 2. В разд. 3 рассматривается случайно-неоднородная среда. Для этой задачи в [1] была определена функция распределения амплитуд и фаз при нулевой средней расстройке. В данной работе функция распределения находится при любой расстройке; кроме того, для случаев большой неоднородности и большой расстройки выводится упрощенное диффузионное уравнение. В разд. 4 рассматривается периодически неоднородная среда. В случае мелкомасштабной (по сравнению с характерной длиной нелинейного взаимодействия) неоднородности используется метод усреднения аналогично [4, 5]. Если масштабы неоднородности и нелинейности одного порядка, то возможен хаотический режим обмена энергии. Наиболее сильная стохастизация возникает в ситуации, близкой к вырожденной, когда амплитуды низкочастотных волн могут обращаться в нуль.

1. Гамильтоновская форма уравнений. Стационарный процесс резонансного взаимодействия волн описывается укороченными уравнениями для комплексных амплитуд a_j $(j = 1, 2, 3)$ [6]:

$$da_1/dz = -i\beta_1 a_2 a_3 \exp\left[-i\psi(z)\right],$$
$$da_{2,3}/dz = -i\beta_{2,3} a_1 a^*_{3,2} \exp\left[-i\psi(z)\right], \qquad (1)$$
$$\psi(z) = \int^{z} \Delta k(z')\,dz'.$$

Здесь $\psi(z)$ — фазовый набег, определяемый локальной расстройкой волновых векторов $\Delta k = k_1 - k_2 - k_3$, β_j — постоянные коэффициенты взаимодействия. Перейдем к интенсивностям I_j и фазам φ_j:

$$a_j = -i\,\beta_j^{1/2} I_j^{1/2} \exp[i(\varphi_j + \psi)]$$

и координате $x=z(\beta_1\beta_2\beta_3)^{1/2}$. Тогда (1) сводится к гамильтоновской системе с гамильтонианом

$$H_1=2(I_1I_2I_3)^{1/2}\sin(\varphi_1-\varphi_2-\varphi_3)-\Delta(x)(I_1+I_2+I_3),$$

где $\Delta=\Delta k(\beta_1\beta_2\beta_3)^{-1/2}$. Совершим каноническое преобразование к переменным J_j, θ_j с производящей функцией

$$F=(\varphi_1-\varphi_2-\varphi_3)J_1+\varphi_2J_2+\varphi_3J_3,$$

тогда получим гамильтониан

$$H_2=-2(J_1(J_2-J_1)(J_3-J_1))^{1/2}\sin\theta_1-\Delta(J_2+J_3-J_1).$$

Переменные J_j, θ_j связаны с I_j, φ_j соотношениями

$$J_1=I_1,\quad J_2=I_1+I_2,\quad J_3=I_1+I_3,\quad \theta_1=\varphi_1-\varphi_2-\varphi_3,\quad \theta_2=-\varphi_2,\quad \theta_3=-\varphi_3.$$

Поскольку гамильтониан H_2 не зависит от θ_2 и θ_3, J_2 и J_3 есть интегралы движения (интегралы Мэнли—Роу). Поэтому постоянную часть гамильтониана можно отбросить. Обозначая $J=J_1$, $\theta=\theta_1$, окончательно получим гамильтоновскую систему

$$dJ/dx=-\partial H/\partial\theta,\quad d\theta/dx=\partial H/\partial J,$$
$$H=-2\sin\theta\,[J(J_2-J)(J_3-J)]^{1/2}+\Delta(x)J. \tag{2}$$

Из (2) следует, что характерная длина нелинейного взаимодействия есть $L_{\text{нл}}\sim J_{2,3}^{-1/2}$.

2. Случайно-неоднородная среда. Будем считать, что расстройка $\Delta(x)$ имеет вид $\Delta(x)=\Delta_0+\Delta_1(x)$, где Δ_0 — постоянная часть, а Δ_1 — переменная часть с нулевым средним. Если характерный размер неоднородности мал по сравнению с $L_{\text{нл}}$, то величину $\Delta_1(x)$ можно аппроксимировать гауссовым δ-коррелированным процессом

$$\langle\Delta_1(x)\Delta_1(x')\rangle=2D\delta(x-x').$$

Параметр $D^{-1}=L_c$ имеет смысл характерной длины многократного рассеяния волн в неоднородной среде [1]. Указанное приближение позволяет стандартным образом перейти к уравнению Фоккера—Планка для плотности вероятности $W(J,\theta)$:

$$\frac{\partial W}{\partial x}=2\cos\theta\,h(J)\frac{\partial W}{\partial J}+(\Delta_0-2\sin\theta h'(J))\frac{\partial W}{\partial\theta}+D\frac{\partial^2W}{\partial\theta^2}, \tag{3}$$

где введено обозначение $h(J)=[J(J_2-J)(J_3-J)]^{1/2}$. Уравнение (3) имеет очевидное стационарное решение

$$W=\text{const},\quad 0<J<\min(J_2,J_3),\quad 0\leqslant\theta<2\pi, \tag{4}$$

отвечающее микроканоническому распределению. Отметим, что равномерное распределение (4) было получено в [1] в частном случае $\Delta_0=0$.

Из (4) следует парадоксальный вывод: предельное стационарное распределение, определяющее эффективность взаимодействия волн, не зависит от постоянной расстройки Δ_0. Дело здесь в том, что время установления этого стационара существенно зависит от расстройки.

Рассмотрим подробнее случай больших постоянных расстроек. Введем малый параметр $L_p=\Delta_0^{-1}$, имеющий смысл длины сбоя фаз. Если $L_p\ll L_{\text{нл}}$, L_c, то можно применить стандартный метод возмущений для гамильтоновских систем с быстровращающейся фазой [7]. Переходя к новым переменным $\bar J$, $\bar\theta$ по формулам

$$J=\bar J-2L_p\sin\bar\theta h(\bar J),\quad \theta=\bar\theta-2L_p\cos\bar\theta\,h'(\bar J),$$

получим гамильтониан

$$\bar{\bar{H}} = \Delta_0\bar{J} + \Delta_1(x)\,(\bar{J} - 2\bar{L}_p \sin\bar{\bar{\theta}}\, h(\bar{J}))\ . \qquad (5)$$

От (5) можно перейти к уравнению Фоккера—Планка для плотности вероятности $\bar{W}(\bar{J},\bar{\theta})$, которое после усреднения по быстровращающейся фазе $\bar{\theta}$ имеет вид

$$\frac{\partial \bar{W}}{\partial x} - \Delta_0 \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{\theta}} = \frac{\partial}{\partial \bar{J}}\left[2DL_p^2 h^2 \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{J}}\right] + D\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{\theta}^2}. \qquad (6)$$

Из (6) видно, что коэффициент диффузии по фазе значительно больше коэффициента диффузии по интенсивности. Поэтому можно считать $\bar{W}(\bar{J},\bar{\theta}) \simeq (1/2\pi)P(\bar{J})$, и для $P(\bar{J})$ получаем

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{2D}{\Delta_0^2}\frac{\partial}{\partial \bar{J}}\left(h^2(\bar{J})\frac{\partial P}{\partial \bar{J}}\right). \qquad (7)$$

Из уравнения (7) следует, что длина установления стационарного распределения $P=\mathrm{const}$ в случае больших расстроек порядка $L_c L_{\text{нл}}^2 L_p^{-2}$.

В случае очень сильной флуктуационной части неоднородности, когда $L_c \ll L_{\text{нл}}$, L_p, также можно получить из (3) упрощенное диффузионное уравнение. Представим функцию распределения рядом Фурье

$$W(J,\theta,x) = \sum_m W_m(J,x)\exp(im\theta)$$

и подставим в (3). Тогда получим

$$\frac{\partial W_m}{\partial x} + h(J)\left[\frac{\partial}{\partial J}(W_{m-1} + W_{m+1})\right] + i\Delta_0 m W_m -$$

$$- h'(J)[(m-1)W_{m-1} + (m+1)W_{m+1}] = -m^2 D W_m .$$

Поскольку D — большой параметр, можно считать, что отличны от нуля только W_0, $W_{\pm1}$ (т. е. что функция распределения по θ близка к равномерной). В результате получается замкнутое уравнение для W_0:

$$\frac{\partial W_0}{\partial x} = \frac{2D}{D^2 + \Delta_0^2}\frac{\partial}{\partial J}\left(h^2(J)\frac{\partial W_0}{\partial J}\right). \qquad (8)$$

Отметим, что при $\Delta_0 \gg D$ уравнение (8) переходит в (7), поэтому им можно пользоваться как при $L_c \gg L_{\text{нл}}$, L_p, так и при $L_p \gg L_{\text{нл}}$, L_c. Из уравнения (8) нетрудно получить уравнения для моментов $N_p = \langle I^p \rangle$:

$$\frac{dN_p}{dx} = \frac{2D}{D^2 + \Delta_0^2}\, p[3N_{p+1} - 2(J_2 + J_3)N_p + J_2 J_3 N_{p-1}]\ .$$

В частности, для $p=1$ имеем

$$\frac{dN_1}{dx} = \frac{2D}{D^2 + \Delta_0^2}\,[I_2 I_3 - N_1 I_2 - N_1 I_3 + 3(N_2 - N_1^2)].$$

Уравнение (9) отличается от обычно получаемого в приближении хаотических фаз только последним слагаемым $N_2 - N_1^2$. Это слагаемое мало, если функция распределения W_0 близка к δ-функции. Фактически это означает, что в приближении хаотических фаз используется ансамбль систем с одинаковыми амплитудами волн.

3. Периодически неоднородная среда. В периодически неоднородной среде расстройка имеет вид $\Delta = \Delta_0 + \Delta_1(x)$, где $\Delta_1(x)$ — периодическая функция. Для определенности будем считать неоднородность синусоидальной: $\Delta_1 = \rho\cos\varkappa x$.

Если период неоднородности $L_{\text{н}} \simeq \varkappa^{-1}$ мал ($L_{\text{н}} \ll L_{\text{нл}}$), то уравнения взаимодействия волн можно усреднить по этому периоду. Для этого, во-первых, перейдем к переменной $\alpha = \theta - \rho\cos\varkappa x$, для которой гамильтониан (2) принимает вид

$$H(J,\alpha,x) = -2\sin(\alpha+\rho\varkappa^{-1}\sin\varkappa x)h(J)+\Delta_0 J.$$

Усредняя гамильтониан стандартным методом [8], получаем

$$\overline{H}(J,\alpha) = -2J_0(\rho\varkappa^{-1})\sin\alpha\, h(J)+\Delta_0 J,$$

где $J_0(\rho\varkappa^{-1})$ — функция Бесселя нулевого порядка. Таким образом, в среде с мелкими неоднородностями обмен энергией между волнами может существенно замедлиться, а при определенном соотношении между периодом и величиной неоднородности вообще в первом приближении прекратиться.

В случае, когда период неоднородности порядка длины нелинейного взаимодействия ($L_н \approx L_{нл}$), возможен резонанс. Ввиду нелинейности системы (2) при достаточно больших ρ колебания могут стохастизоваться [7]. Оценить величину ρ, при которой возникает хаос, можно из следующих соображений. Для простоты положим $\Delta_0=0$. В отсутствие неоднородности ($\rho=0$) решение уравнения (2) выражается через эллиптические функции [9]. Степень нелинейности, равная производной от частоты по амплитуде, максимальна для решения, соответствующего нулевому значению гамильтониана. Для этого решения $L_{нл} = J_3^{-1/2}K(J_2J_3^{-1})$, где K — эллиптический интеграл первого рода (для определенности считаем $J_2 \leqslant J_3$). Отсюда видно, что, поскольку $K'(0)=0$, $K'(1)=\infty$, максимальная чувствительность к периодическому воздействию будет при $J_2=J_3$, а при $J_2 \ll J_3$ степень нелинейности мала и колебания будут стохастизоваться лишь при больших ρ. На рис. 1 приведены результаты численного моделирования уравнений (2), подтверждающих этот вывод. Здесь показаны значения ρ, при которых хаотизуется решение с начальными условиями $\theta=\pi$, $J=J_2/2$ при $L_н=3$, $J_2=1$, в зависимости от J_3. Видно, что при $J_3 \to 1$ стохастизация возникает даже при очень малых ρ, что связано с существованием в вырожденной системе ($J_2=J_3$) гомоклинической траектории [4, 5].

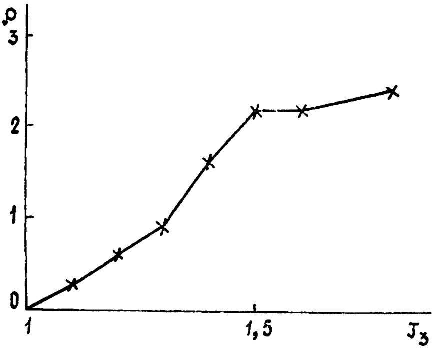

Рис. 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамович Б. С., Тамойкин В. В. — ЖЭТФ, 1980, 78, № 2, с. 458.
2. Абрамович Б. С, Тамойкин В. В. В кн: Нелинейные волны. Распространение и взаимодействие / Под ред А. В Гапонова-Грехова. — М.: Наука, 1981.
3 Чиркин А. С., Юсупов Д. Б. — Изв. АН СССР. Сер. Физическая, 1981, 45, № 6, с. 929.
4. Pikovsky A. S. — Phys. Lett. A, 1980, 80, № 5—6, p. 367.
5. Пиковский А С. Тезисы докладов VIII симпозиума по дифракции и распространению волн. — М., 1981, т. 2, с. 95.
6. Ахманов С. А., Чиркин А. С. Статистические явления в нелинейной оптике.— М: Гос. ун-т, 1971.
7. Лихтенберг А, Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. — М.: Мир, 1984.
8. Боголюбов Н Н, Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1974.
9. Бломберген Н. Нелинейная оптика. — М.: Мир, 1966.

Институт прикладной физики
АН СССР

Поступила в редакцию
18 декабря 1985 г.

ON THE NONLINEAR WAVE INTERACTION IN AN INHOMOGENEOUS MEDIUM

A. S. Pikovskij

Nonlinear resonance three wave interaction in a dispersive medium is studied using the Hamiltonian formulation of the problem. For randomly inhomogeneous medium a stationary probability distribution is found and the simplified diffusion equations are developed. The nature of interaction in the case of periodic inhomogeneities depends on the period. For small-scale inhomogeneities the rate of interaction sufficiently decreases and for large-scale inhomogeneities chaotic regime occurs. The dependence of the chaos level on the Manly—Row integrals is investigated.