ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXX, № 11 РАДИОФИЗИКА 1987

УДК 525.729:551.501.71

О РЕШЕНИИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ АТМОСФЕРНОЙ РЕФРАКЦИИ С УЧЕТОМ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ

М. Е. Горбунов

Рассматривается метод восстановления поля показателя преломления в горизонтально-неоднородной атмосфере по измерениям рефракции с ИСЗ. Приводится явное приближенное решение обратной задачи атмосферной рефракции, учитывающее горизонтальную неоднородность в общем виде. Полученная формула обращения обобщает решение обратной задачи для сферически-слоистой атмосферы

В последнее время обсуждаются методы восстановления поля показателя преломления в атмосфере на основе измерений рефракции с ИСЗ. Стандартная схема таких измерений приведена на рис. 1. Как показано в [1], в случае сферически-слоистой атмосферы можно восстановить зависимость показателя преломления n от высоты r по зависимости угла рефракции ε от прицельного расстояния p при помощи обратного преобразования Абеля. При этом задача восстановления является корректной.

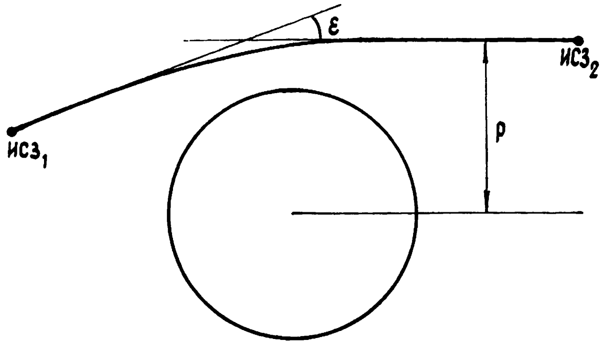

Рис. 1.

Однако для задач распространения электромагнитных волн в атмосфере и для метеорологии могут быть существенны также и горизонтальные вариации поля показателя преломления. Поэтому представляется необходимым разработать методы восстановления по меньшей мере двумерной зависимости показателя преломления от координат. Ясно, что измеряемая функция должна при этом иметь ту же размерность, что и восстанавливаемая. В дальнейшем будет рассматриваться двумерный случай.

Для решения двумерной задачи в настоящее время уже существует ряд приближенных методов [2, 3], в основе которых лежит параметризация задачи. При этом либо поле показателя преломления $n(r, \theta)$ ищется в виде некоторой функции с параметрами [2], либо задача решается в предположении локальной сферической симметрии [3] при условии, что изменения $n(r, \theta)$ по θ достаточно медленны. В последнем случае параметрической становится зависимость от угловой координаты.

Основная трудность, препятствующая получению решения двумерной задачи, учитывающего горизонтальную неоднородность в общем виде, состоит в том, что для произвольной функции $n(r, \theta)$ не удается получить общего решения лучевых траекторий и связать явным образом измеряемые величины с искомой [4]. Однако отличие поля показателя преломления от сферически-симметричного в атмосфере Земли невелико, что позволяет обойти указанную выше трудность путем использования методов возмущений. Подобное рассмотрение обратной задачи сейсмики в первом приближении теории возмущений для эйконала [5] проводится в [6]. Но окончательного решения задачи в явном виде там не приводится.

Цель настоящей работы состоит в получении приближенного явного решения обратной задачи атмосферной рефракции, учитывающего горизонтальную неоднородность в общем виде.

Рассмотрим постановку обратной задачи атмосферной рефракции, геометрия которой изображена на рис. 2. Пусть в точке $A(r_A, \theta_A)$ расположен приемник, а в точке $B(r_B, \theta_B)$ — источник, $\dot{n}(r, \theta)$ — двумерная функция показателя преломления. Соответствующий ей луч, соединяющий источник и приемник, показан сплошной линией. Расстояния r_A и r_B для простоты считаются постоянными. Тогда задача может быть поставлена следующим образом: по измерениям угла прихода луча ψ в точку A при всевозможных θ_A и θ_B, когда такое измерение имеет смысл, определить $n(r, \theta)$.

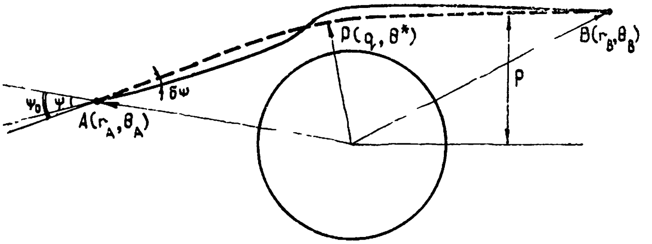

Рис. 2.

Эта задача может быть записана в виде операторного уравнения 1-го рода:

$$\psi = Fn, \tag{1}$$

где F — оператор, переводящий искомую функцию $n(r, \theta)$ в измеряемую $\psi(\theta_A, \theta_B)$. Это уравнение, вообще говоря, не сводится к интегральному. Это можно сделать точно лишь в некоторых частных случаях, например при сферически-симметричном распределении $n = n(r)$. Получить запись обратной задачи в виде интегрального уравнения в общем случае $n = n(r, \theta)$ без каких-либо предположений относительно вида этой функции можно лишь в некотором приближении. В [5] предлагается метод возмущений для лучей, который в несколько измененном виде и будет использован для получения линейного интегрального уравнения, приближенно описывающего рассматриваемую здесь постановку обратной задачи атмосферной рефракции.

Представим для этого $n(r, \theta)$ в виде

$$n(r, \theta) = n_0(r) + \delta n(r, \theta), \tag{2}$$

где $n_0(r)$ — невозмущенное сферически-симметричное распределение, а $\delta n(r, \theta)$ — несимметричное малое возмущение. Тогда функцию $\psi(\theta_A, \theta_B)$ можно представить в виде

$$\psi(\theta_A, \theta_B) = \psi_0(\theta_B - \theta_A) + \delta\psi(\theta_A, \theta_B), \tag{3}$$

где $\psi_0 = Fn_0$.

Малое возмущение $\delta\psi$ можно приближенно считать линейным по δn, тогда

$$\delta\psi = F'\delta n\,, \tag{4}$$

где F' — линейная часть приращения оператора F на функции n_0, т. е. производная Фреше этого оператора [7].

Поскольку решение задачи восстановления n_0 по заданной функции ψ_0 известно, будем в дальнейшем считать n_0 уже найденным и решать уравнение (4). Функция ψ_0 может быть получена усреднением ψ при $\theta_B - \theta_A = \mathrm{const}$.

Построим оператор F'. Для этого рассмотрим уравнение лучевых траекторий

$$r'' = r + 2\frac{r'^2}{r} + \frac{1}{n}\left(\frac{\partial n}{\partial r} - \frac{r'}{r^2}\frac{\partial n}{\partial \theta}\right)(r^2 + r'^2). \tag{5}$$

Представим его решение приближенно в виде $r(\theta) = r_0(\theta) + \delta r(\theta)$, где $r_0(\theta)$ — невозмущенная траектория (показана на рис. 2. пунктиром), определяемая уравнением

$$r_0'^2 = (r_0^2/p^2)(n_0^2 r_0^2 - p^2), \tag{6}$$

а δr — линейная по δn часть возмущения траектории.

Линеаризуя (5) по δr и δn, получаем

$$\delta r'' - F_1\delta r' - F_2\delta r = F_3\delta n_r' - F_4\delta n_\theta' - F_5\delta n \equiv F_6, \tag{7}$$

где

$$F_1 = 2r_0'\left(\frac{2}{r_0} + \frac{n_0'}{n_0}\right), \quad F_2 = 1 + F_3\left(n_0'' - \frac{n_0'^2}{n_0}\right) + 2\left(\frac{r_0 n_0'}{n_0} - \frac{r_0'^2}{r_0}\right),$$

$$F_3 = \frac{r_0^2 + r_0'^2}{n_0}, \quad F_4 = F_3\frac{r_0'}{r_0^2}, \quad F_5 = F_3\frac{n_0'}{n_0}.$$

Здесь и далее значения r_0, r_0', δn, $\delta n_r'$, $\delta n_\theta'$ берутся на соответствующей невозмущенной траектории.

Решением уравнения (7) является

$$\delta r(\theta) = \frac{1}{\zeta_1'(\theta_A)\zeta_2(\theta_A) - \zeta_2'(\theta_A)\zeta_1(\theta_A)}\int\limits_{\theta_A}^{\theta} F_6 \exp\left(-\int\limits_{\theta_A}^{\theta'} F_1 d\theta''\right)\times$$
$$\times[\zeta_1(\theta)\zeta_2(\theta') - \zeta_2(\theta)\zeta_1(\theta')]d\theta' + C_1\zeta_1(\theta) + C_2\zeta_2(\theta), \tag{8}$$

где ζ_1 и ζ_2 — линейно независимые решения однородного уравнения, получаемые дифференцированием r_0 по двум независимым параметрам семейства решений уравнения (5) [5], а C_1 и C_2 — константы, подбираемые так, чтобы удовлетворить граничным условиям $\delta r(\theta_A) = \delta r(\theta_B) = 0$.

В линейном приближении возмущение угла прихода

$$\delta\psi = \delta r'(\theta_A)\frac{p^2}{r_A^3} = [C_1\zeta_1'(\theta_A) + C_2\zeta_2'(\theta_A)]\frac{p^2}{r_A^3}. \tag{9}$$

Находя и подставляя в (9) C_1 и C_2, получаем следующее выражение для $\delta\psi$:

$$\delta\psi = \frac{p^2}{r_A^3[\zeta_1(\theta_A)\zeta_2(\theta_B) - \zeta_2(\theta_A)\zeta_1(\theta_B)]}\int\limits_{\theta_A}^{\theta_B} F_6 \times$$
$$\times\exp\left(-\int\limits_{\theta_A}^{\theta} F_1 d\theta'\right)[\zeta_1(\theta_B)\zeta_2(\theta) - \zeta_2(\theta_B)\zeta_1(\theta)]d\theta. \tag{10}$$

Считая теперь независимой переменной r, запишем уравнение невозмущенной траектории в виде

$$\theta = \theta^* \pm p \int_q^r \frac{dr}{r\sqrt{n_0^2 r^2 - p^2}}, \tag{11}$$

где q, θ^* — координаты точки перигея P невозмущенного луча, p — его прицельное расстояние (см. рис. 2); p и q связаны уравнением $p = qn_0(q)$. Для нахождения ζ_1 и ζ_2 воспользуемся свойством частных производных

$$\frac{\partial r_0}{\partial p} \equiv \zeta_1 = -\frac{\partial r_0}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial p}, \qquad \frac{\partial r_0}{\partial \theta^*} \equiv \zeta_2 = -\frac{\partial r_0}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial \theta^*}. \tag{12}$$

Переходя в интеграле (10) к интегрированию по r и вводя параметр $S = \operatorname{sign}(\theta_B - \theta_A)$, получаем

$$\delta\psi = \frac{-pS}{G_A(r_A, p)}\left\{\int\limits_{(A)} G_A(r, p)\left[\delta n'_r + S\delta n'_\theta \sqrt{\frac{n_0^2}{p^2} - \frac{1}{r^2}} - \delta n \frac{n'_0}{n_0}\right] \times \right.$$
$$\times \frac{dr}{\sqrt{n_0^2 r^2 - p^2}} + \int\limits_{(B)} G_B(r, p)\left[\delta n'_r - S\delta n'_\theta \sqrt{\frac{n_0^2}{p^2} - \frac{1}{r^2}} - \delta n \frac{n'_0}{n_0}\right] \times \tag{13}$$
$$\left. \times \frac{dr}{\sqrt{n_0^2 r^2 - p^2}}\right\},$$

где (A) и (B) — ветви невозмущенной траектории от точки перигея P до точек A и B соответственно,

$$G_A(r, p) = G(r, p)\sqrt{r_B^2 - p^2} + G(r_B, p)\sqrt{n_0^2 r^2 - p^2},$$
$$G_B(r, p) = G(r, p)\sqrt{r_B^2 - p^2} - G(r_B, p)\sqrt{n_0^2 r^2 - p^2}, \tag{14}$$
$$G(r, p) = \sqrt{n_0^2 r^2 - p^2}\,\frac{\partial}{\partial p}\int_q^r \frac{p\,dr}{r\sqrt{n_0^2 r^2 - p^2}} = -\frac{n_0}{rn'_0 + n_0} -$$
$$- \sqrt{n_0^2 r^2 - p^2}\int_q^r \frac{n'_0/n_0 + rn_0 (d/dr)\left[n'_0/[n_0(rn'_0 + n_0)]\right]}{\sqrt{n_0^2 r^2 - p^2}}\,dr.$$

Поскольку функция $\delta\psi(\theta_A, \theta_B)$ представлена в виде интеграла по невозмущенной траектории, соединяющей точки A и B, ее можно считать заданной на множестве невозмущенных траекторий, а сами траектории характеризовать координатами их точек перигея (q, θ^*), явно входящими в выражение для $\delta\psi$.

Упростим полученное выше выражение для $\delta\psi$. В интеграле (13) члены, содержащие δn и $\delta n'_\theta$, малы по сравнению с $\delta n'_r$. В области, наиболее существенной для интегрирования, т. е. в окрестности точки перигея, $G_A(r, p) \approx G_B(r, p) \approx G(q, p)\sqrt{r_B^2 - p^2}$, тогда G_A и G_B как медленно меняющиеся функции можно вынести из-под знака интеграла, заменив на $G(q, p)\sqrt{r_B^2 - p^2}$. Как показано в [8], в интегралах типа (13) интегрирование по траекториям приближенно можно заменить интегрированием по прямым с теми же точками перигея, множитель

$(n_\upsilon^2 r^2 - p^2)^{-1/2}$ перейдет при этом в $(r^2 - q^2)^{-1/2}$. В результате приходим к следующей приближенной записи уравнения (4):

$$\delta\psi(q, \theta^*) = \frac{-pSG_A(q,p)}{G_A(r_A, q)} \left\{ \int_q^\infty \frac{\delta n'_r(r, \theta^* + \arccos q/r)\,dr}{\sqrt{r^2 - q^2}} + \int_q^\infty \frac{\delta n'_r(r, \theta^* - \arccos q/r)\,dr}{\sqrt{r^2 - q^2}} \right\}. \quad (15)$$

Для решения уравнения (15) представим δn и $\delta\psi$ в виде рядов Фурье по угловой переменной:

$$\delta n(r, \theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k(r) e^{ik\theta}, \qquad \delta\psi(q, \theta^*) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \beta_k(q) e^{ik\theta^*}. \quad (16)$$

Подставляя (16) в (15), получаем систему уравнений

$$\beta_k(q) = -2f(q) \int_q^\infty \frac{\alpha'_k(r) T_k(q/r)\,dr}{\sqrt{r^2 - q^2}}, \quad (17)$$

где введено обозначение

$$f(q) = \frac{pSG_A(q,p)}{G_A(r_A, p)} = -\frac{Sqn_0^2(q)\sqrt{r_B^2 - q^2 n_0^2(q)}}{(qn'_0(q) + n_0(q))\, G_A(r_A, qn_0(q))}, \quad (18)$$

$T_k(x) = \cos(k \arccos x)$ — полиномы Чебышева.

Для получения формулы обращения воспользуемся следующим свойством полиномов Чебышева [9]:

$$\int_r^z \frac{rzT_k(q/r)T_k(q/z)\,dq}{q\sqrt{q^2 - r^2}\sqrt{z^2 - q^2}} = \frac{\pi}{2}. \quad (19)$$

Рассмотрим интегральное выражение

$$\frac{1}{\pi}\frac{d}{dr}\int_r^\infty \frac{r\beta_k(q)T_k(q/r)\,dr}{f(q)q\sqrt{q^2 - r^2}} = -\frac{2}{\pi}\frac{d}{dr}\int_r^\infty \frac{\alpha'_k(z)}{z}\int_r^z \frac{rzT_k(q/r)T_k(q/z)\,dq}{q\sqrt{q^2 - r^2}\sqrt{z^2 - q^2}}\,dz = \frac{\alpha'_k(r)}{r}. \quad (20)$$

Поскольку в данном случае рассматривается задача восстановления функции, заданной на кольце, толщина которого существенно меньше радиуса, то можно приближенно записать

$$\frac{\alpha'_k(r)}{r} \approx \frac{d}{dr}\left(\frac{\alpha_k(r)}{r}\right). \quad (21)$$

Тогда справедлива следующая приближенная формула обращения:

$$\alpha_k(r) = \frac{r^2}{\pi}\int_r^\infty \frac{\beta_k(q)T_k(q/r)\,dq}{f(q)q\sqrt{q^2 - r^2}}. \quad (22)$$

Формулы (17) и (22) аналогичны интегральным преобразованиям, полученным в [9, 10] для задач томографии. При $k=0$ эти формулы переходят приближенно в прямое и обратное преобразования Абеля (не точно — вследствие приближения (21)).

Наличие в формуле (22) функции T_k с аргументом $q/r > 1$, очень быстро растущей с ростом k $(T_k(x) = (1/2)[(x+\sqrt{x^2-1})^k + (x+\sqrt{x^2-1})^{-k}])$, приводит к тому, что высшие гармоники α_k будут восстанавливаться все с большей, вообще говоря, неограниченно растущей с ростом k ошибкой. Однако гармониками α_k при $|k| > \pi/\delta\theta$, где $\delta\theta$ — характерный масштаб изменения δn по θ, можно пренебречь. В случае же выполнения условия $\delta\theta > 2\sqrt{2\delta r/a}$, где a — радиус Земли, δr — характерный масштаб изменения δn по r, T_k в формуле (17) при $|k| \leqslant \pi/\delta\theta$ слабо меняется в существенной для интегрирования области. Поэтому в (17) и, как следствие, в (22) T_k можно заменить на единицу, что соответствует предположению о локальной сферической симметрии. Действительно, в этом случае

$$\delta n(r,\theta) \approx \frac{r^2}{\pi}\int_r^\infty \frac{\sum \beta_k(q)e^{ik\theta}dq}{f(q)\,q\sqrt{q^2-r^2}} = \frac{r^2}{\pi}\int_r^\infty \frac{\delta\psi(q,\theta)\,dq}{f(q)\,q\sqrt{q^2-r^2}}. \quad (23)$$

Восстановление в предположении локальной сферической симметрии является частным случаем регуляризации некорректной задачи восстановления $\delta n(r,\theta)$, состоящей в ограничении количества членов в разложении (16).

Таким образом, получено приближенное решение обратной задачи атмосферной рефракции, учитывающее горизонтальную неоднородность в общем виде, в отличие от вышеупомянутых методов, в которых задача так или иначе параметризовалась. Частным случаем полученного решения для медленных изменений поля показателя преломления в горизонтальном направлении является восстановление в предположении локальной сферической симметрии посредством абелевского обращения.

Для практической реализации предлагаемого алгоритма восстановления $\delta n(r,\theta)$ необходимо наличие достаточно густой сети спутниковых измерений, т. е. функция $\delta\psi(q,\theta^*)$ должна измеряться с шагом по θ^*, не большим, чем требуемое угловое разрешение.

Учет влияния ошибок измерения и, как их возможное следствие, необходимость дополнительной регуляризации задачи являются предметом отдельного исследования.

Автор выражает благодарность А. С. Гурвичу и С. В. Соколовскому за стимулирующие дискуссии и ряд ценных замечаний по работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Phinney R. A., Anderson D. L. — J. Geophys. Res., 1968, **73**, № 5, p. 1819.
2. Иванов В. М., Лукин Д. С. — Труды МФТИ, 1975, № 6, с. 171
3. Гурвич А. С., Соколовский С. В. — Изв. АН СССР. Сер. ФАО, 1985, **21**, № 1, с. 12.
4. Пикалов В. В., Преображенский Н Г. — УФН, 1983, **141**, вып 3, с. 92.
5. Кравцов Ю А, Орлов Ю. И. Геометрическая оптика неоднородных сред.— М.: Наука, 1980, с. 76; 78.
6. Романов В. Г. Обратные задачи математической физики. — М: Наука, 1984, с. 173.
7. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1981, с. 480.
8. Татарский В. И. — Изв. АН СССР. Сер. ФАО, 1968, **4**, № 7, с. 699.
9. Cormack A M. — J. Appl. Phys., 1963, **34**, p. 2722.
10. C. Solomon Stanley, Hays P. B., Abreu Vincent J. — Appl. Opt., 1984, **23**, № 19, p. 3409.

Институт физики
атмосферы АН СССР

Поступила в редакцию
15 января 1986 г.

ON THE RESOLVING INVERSE PROBLEM OF ATMOSPHERIC REFRACTION WITH ACCOUNT OF HORIZONTAL INHOMOGENEITY

M. E. Gorbunov

A method is considered for storation of the refraction index field in horizontally irregular atmosphere by the remote sensing of refractivity. Analytical approximate resolution of the inverse problem of atmospheric refraction accounting for horizontal irregularity in the general case is given. The inversion formula derived generalizes resolution of the inverse problem for the spherically statified atmosphere.