

ЛИТЕРАТУРА

1. Жуков П. Г., Иванов В. С. и др. — ЖЭТФ, 1979, 76, вып. 6, с. 2065.
2. Коцаренко Н. Я., Силивра А. А. — ЖТФ, 1982, 52, вып. 10, с. 1915.
3. Коцаренко Н. Я., Силивра А. А. — ЖТФ, 1986, 56, вып. 3, с. 581.
4. Коцаренко Н. Я., Федорченко А. М. — Радиотехника и электроника, 1967, 12, № 7, с. 1280.
5. Feilch K. L., Vallier L. et. al. — IEEE Journ., 1981, QE-17, № 8, p. 1354.

Киевский государственный
университет

Поступила в редакцию
24 апреля 1986 г.

УДК 530.18

РАЗРЫВНОСТЬ ОБЛАСТИ СУЩЕСТВОВАНИЯ ВОЛН ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯ В СИСТЕМАХ С ГИСТЕРЕЗИСОМ ФУНКЦИИ НЕЛИНЕЙНОГО ИСТОЧНИКА

Д. И. Биленко, В. А. Лодгауз

Как известно, в системах, описываемых нелинейным дифференциальным уравнением параболического типа, при определенных условиях, накладываемых на функцию нелинейного источника, существуют самоподдерживающиеся пространственно-временные неоднородности в виде стационарных волн переключения, перебрасывающих систему из одного устойчивого состояния с некоторыми значениями температуры, концентрации частиц, носителей заряда и т. д. в другое — с новыми значениями характеризующей его физической величины [1-4].

Для определенности рассмотрим нелинейное уравнение температуропроводности

$$C(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - F(\theta) = 0, \quad (1)$$

где $C(\theta)$ — зависящая в общем случае от температуры объемная теплоемкость, κ — коэффициент теплопроводности, $F(\theta)$ — функция нелинейного источника.

Введением обобщенной координаты

$$\xi = x - vt, \quad (2)$$

где $v > 0$ — собственный параметр задачи, уравнение (1) сводится к уравнению движения материальной точки в поле потенциальных сил.

Если функция нелинейного источника имеет три нуля в точках $\theta_1, \theta_3, \theta_4$ (рис. 1, сплошная линия), отрицательна в интервале $\theta_1 < \theta < \theta_3$ и положительна в интервале $\theta_3 < \theta < \theta_4$, то на фазовой плоскости (θ, θ_ξ) крайние особые точки $(\theta_1, 0)$ и $(\theta_4, 0)$ являются седлами, а средняя $(\theta_3, 0)$ — узлом [5]. Сепаратрисы седел определяют волны переключения из состояния, характеризуемого температурой θ_1 , в состояние с температурой θ_4 (или наоборот), распространяющиеся со скоростью v в направлении x . Для случая $C = C(\theta)$ их существование и единственность доказаны в работе [6].

Ниже рассматриваются особенности стационарных волн переключения в системах, в которых функция $F(\theta)$ является неоднозначной в силу гистерезиса.

На рис. 1 пунктиром показана обратная ветвь функции $F(\theta)$, характеризующаяся общими с прямой ветвью седлами θ_1, θ_4 и новым узлом θ_2 . Такими системами являются, в частности, среды, обладающие фазовым переходом 1-го рода, например, среды с фазовым переходом металла — полупроводник

(ФПМП), в которых температурные зависимости проводимости и поглощательной способности, определяющие вид функции $F(\theta)$ для электрической и оптической начинки соответственно, имеют гистерезисный характер. Для упрощения задачи фазовый переход считается резким, что позволяет исключить из рассмотрения частные петли гистерезиса.

В соответствии с (2), $\frac{d\theta}{dt} = -v \frac{d\theta}{d\xi}$. Так как $v > 0$, то движения, соответствующие ненулевому значению параметра v , описываемые на фазовой плоскости положи-

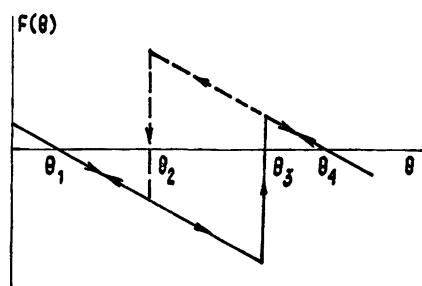


Рис. 1.

тельными фазовыми траекториями ($d\theta/d\xi > 0$), определяются обратной ветвью ($d\theta/dt < 0$) функции $F(\theta)$; описываемые отрицательными фазовыми траекториями — прямым ходом $F(\theta)$; движения, соответствующие $v=0$, могут определяться как прямым, так и обратным ходом $F(\theta)$.

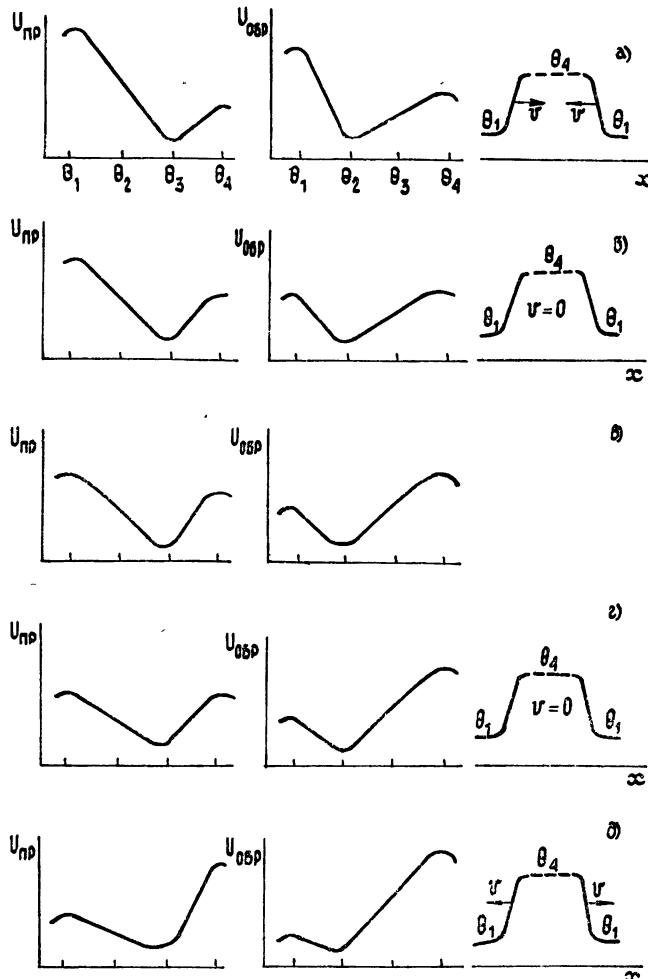


Рис. 2.

На рис. 2 представлены результаты анализа решений задачи с гистерезисом функции $F(\theta)$ на основе механической аналогии, следующей из уравнения движения материальной точки. Если мощность накачки, определяющая $F(\theta)$, такова, что потенциал в седле θ_4 больше потенциала в седле θ_1 как для прямого ($U_{\text{пр}}$), так и для обратного ($U_{\text{обр}}$) хода функции $F(\theta)$ (рис. 2а), то существует определяемая только обратным ходом $F(\theta)$ стационарная волна переключения, соответствующая расширению «холодной» фазы в область «горячей». С ростом мощности накачки потенциалы в седлах θ_1 и θ_4 выравниваются по условиям обратного хода $F(\theta)$ (рис. 2б), и существует статическая волна переключения (или широкий стоячий домен). С дальнейшим ростом мощности накачки распределение потенциалов отвечает рис. 2в. При этом волны переключения седло—седло не существует, поскольку распределение потенциала $U_{\text{пр}}(\theta)$ может привести только к положительной сепаратрисе седел, т. е. к «охлаждению» области «горячей» фазы, а распределение $U_{\text{обр}}(\theta)$ — к отрицательной, т. е. к «нагреванию» области «холодной» фазы, что противоречит знаку $d\theta/dt$ прямого и обратного ходов функции $F(\theta)$ соответственно. Когда мощность накачки достигает значения, соответствующего равенству потенциалов в седлах по условиям прямого хода $F(\theta)$ (рис. 2г), существует определяемая им статическая волна переключения (или широкий стоячий домен). С ростом мощности, когда распределение потенциалов отвечает рис. 2д, существует определяемая прямым ходом $F(\theta)$ волна переключения, соответствующая расширению «горячей» фазы в «холодную».

Для подтверждения особенностей развития пространственно-временных неоднородностей в системе с гистерезисом функции $F(\theta)$ было проведено численное моделирование путем решения на ЭВМ ЕС-1022 нестационарного нелинейного уравнения температуропроводности (1) методом конечных разностей. Начальное распределение

температуры задавалось внутри одномерной области в виде ступенчатой функции, меняющейся от значения $\theta = \theta_1$ до значения $\theta = \theta_4$. На границах области температура фиксировалась (θ_1 и θ_4). Функция нелинейного источника для определенности задавалась в виде

$$F(\theta) = \frac{1}{d} [A(\theta)P - b(\theta - \theta_0)], \quad (3)$$

где $A(\theta)$ — поглощательная способность слоя толщиной d материала с фазовым переходом металл—полупроводник, P — мощность излучения накачки на единицу поверхности, b — коэффициент теплоотдачи в окружающую среду с температурой θ_0 .

При условиях накачки, отвечающих распределению потенциала рис. 2а, начальная ступенька развивалась в некоторый температурный фронт, который распространялся в сторону «горячей» фазы. С ростом мощности накачки скорость распространения падала и обращалась в нуль, когда распределение потенциала соответствовало рис. 2б. Когда мощность накачки превышала это значение, начальный температурный фронт постепенно разрушался путем расплывания. При условиях накачки, отвечающих распределению потенциала на рис. 2 г, начальное распределение развивалось в некоторый температурный фронт, который в дальнейшем своего положения в пространстве не менял ($v=0$). С увеличением мощности накачки фронт распространялся в область «холодной» фазы, с ростом P скорость распространения росла.

На рис. 3 показана полученная при численном моделировании зависимость безразмерной скорости распространения волны переключения v от безразмерной мощности накачки \tilde{P} . Безразмерные скорость и плотность мощности при значениях параметров, входящих в (1) и (3), типичных для пленок двуокиси ванадия, обладающих ФПМП, следующим образом связаны с размерными.

$$v = 1,22 \sqrt{b} \tilde{v} \text{ см/с}, \quad P = 200 b \tilde{P} \text{ Вт/см}^2.$$

Стационарные волны переключения температуры и оптических свойств в пленках VO_2 наблюдались при накачке излучением ИК диапазона [7]. Разрывность области существования волн переключения экспериментально подтверждена особенностями термооптической бистабильности в распределенной системе на основе пленок VO_2 на длине волны $\lambda_0 = 2,2$ мм в непрерывном режиме. Образец размещался в поперечном сечении волновода, где мощность излучения — функция координаты (волна H_{10}), поэтому накачиваемая система являлась пространственно-распределенной. Экспериментально наблюдавшаяся петля бистабильности имела прямой и обратный вертикальные скачки. в пропускании прямой скачок происходил от значения 0,86 до 0,02 при средней по сечению мощности излучения 4 Вт/см², обратный — от 0,25 до 0,87 при средней мощности 1,6 Вт/см² ($\theta_0 = 322$ К). Существование прямого вертикального скачка в распределенной системе следует из работы [8], в которой теоретически предсказано возникновение в центре пучка при некоторой мощности накачки двух фронтов волн переключения, распространяющихся к периферии и приводящих к расширению переключенной области при фиксированной мощности. Из той же работы следует, что в распределенных бистабильных системах с однозначной функцией $F(\theta)$ уменьшение мощности накачки ведет к плавному изменению выходного оптического сигнала, соответствующему движению тех же фронтов от периферии к центру пучка. В рассматриваемой системе, обладающей температурным гистерезисом функции $F(\theta)$, уменьшение мощности накачки ниже некоторого критического значения приводит к исчезновению фронтов волн переключения (область разрыва на рис. 3). При дальнейшем понижении мощности на периферии возникают новые волны переключения (область отрицательных скоростей на рис. 3), движущиеся при фиксированной мощности к центру пучка, что приводит к сужению переключенной области и наблюдающемуся экспериментально обратному вертикальному скачку в петле бистабильности распределенной системы.

Таким образом, стационарные волны переключения в системах с гистерезисом функции нелинейного источника отличаются от соответствующих волн в системах без гистерезиса тем, что область их существования по условиям накачки терпит разрыв, а скорость распространения обращается в нуль при двух значениях мощности накачки.

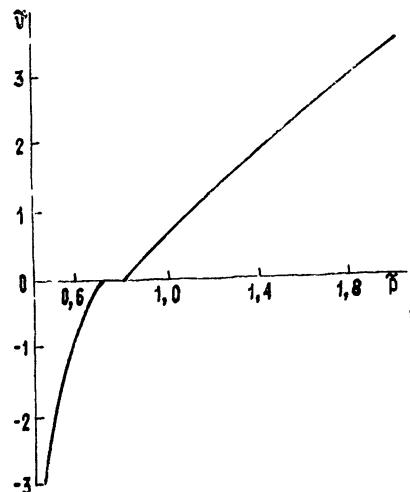


Рис. 3.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Волков А. Ф., Коган Ш. М. — УФН, 1968, 96, вып. 4, с. 633.
2. Нелинейные волны. / Под ред. А. В. Гапонова-Грехова. — М.: Наука, 1981.
3. Калафати Ю. Д., Сербинон И. А., Рябова Л. А. — Письма в ЖЭТФ, 1979, 29, вып. 10, с. 637.
4. Григорьянц А. В., Голик Л. Л., Елинсон М. И., Балкарей Ю. И. — Квантовая электроника, 1983, 10, № 8, с. 1714.
5. Андronов А. А., Витт А. А., Хайкин С. А. Теория колебаний. — М.: Физматгиз, 1959.
6. Лодгауз В. А. — Изв. вузов — Радиофизика, 1985, 28, № 4, с. 481.
7. Биленко Д. И., Лодгауз В. А. — Квантовая электроника, 1985, 12, № 1, с. 177.
8. Розанов Н. Н. — ЖЭТФ, 1981, 80, № 1, с. 96.

Саратовский государственный
университет

Поступила в редакцию
29 сентября 1986 г.

УДК 536.75

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МАЛЫХ ПРИРАЩЕНИЙ НЕГАУССОВА МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА И СТАТИСТИКА КОШИ

Ю. Е. Кузовлев

1. Плотность вероятностного распределения $W_\Delta(x)$ приращения $x=x(\Delta)$ марковского процесса за достаточно малый интервал времени Δ ($\Delta \rightarrow 0$) обладает, как известно, свойством безграничной делимости (см., например, [1]). Последняя означает, что характеристическая функция приращения может быть представлена выражением

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ivx} W_\Delta(x) dx = \exp \left\{ ivK_1\Delta + \Delta K_2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ivx} - 1 - ivx}{x^2} U(x) dx \right\}, \quad (1)$$

в котором функция $U(x) \geq 0$ неотрицательна и нормирована на единицу, $\int_{-\infty}^{\infty} U(x) dx = 1$.

Эта функция имеет смысл вероятностного распределения амплитуды (или спектра) «элементарных скачков» процесса и полностью определяется его кинетическим оператором.

Специальный случай $U(x) = \delta(x)$ соответствует диффузионному, т. е. непрерывному, процессу, приращение которого распределено по гауссову закону

$$W_\Delta(x) = (2\pi\Delta K_2)^{-1/2} \exp \left(-\frac{(x - \Delta K_1)^2}{2\Delta K_2} \right),$$

с характерной шириной $\sim \Delta^{1/2}$. Во всех иных случаях процесс разрывен, в силу чего все (по крайней мере, четные) моменты приращения приобретают при $\Delta \rightarrow 0$ один и тот же порядок Δ^* :

$$M_n(\Delta) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n W_\Delta(x) dx = \Delta K_n + O(\Delta^2). \quad (2)$$

Здесь

$$K_n = K_2 \int_{-\infty}^{\infty} x^{n-2} U(x) dx \quad (n \geq 2) \quad (3)$$

— кинетические коэффициенты марковского процесса. Распределение приращений при этом качественно отличается от гауссова. В настоящей заметке выводится асимптотический (при $\Delta \rightarrow 0$) вид $W_\Delta(x)$ и показывается, что в случае, когда спектр скачков $U(x)$ сплошной и всюду конечен, $0 < U(x) < \infty$, приращение распределено приблизительно по Коши:

$$W_\Delta(x) \approx \frac{\Delta K_2 U(x)}{(x - \Delta K_0)^2 + \Delta^2 (\pi K_2 U(0))^2}. \quad (4)$$

* Асимптотика (2) является непосредственным следствием свойства безграничной делимости (1), что видно из разложения (1) по степеням iv и Δ .