

УДК 535.31

## ОБ ОШИБОЧНОСТИ «УНИВЕРСАЛЬНЫХ И ДОСТАТОЧНЫХ» ЭВРИСТИЧЕСКИХ КРИТЕРИЕВ ОЦЕНКИ ГРАНИЦ ПРИМЕНИМОСТИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ И ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ

*В. А. Боровиков, Б. Е. Кинбер*

Анализируются эвристические критерии (ЭК) применимости геометрической оптики (ГО) и геометрической теории дифракции (ГТД), предложенные в работах [2-7, 13, 14] и основанные на отождествлении физического объема, занятого лучом, и введенного в этих работах френелевского объема (ФО) — огибающей первых зон Френеля. Приведены многочисленные примеры ошибочности ЭК, указаны причины этих ошибок. В частности, ЭК дают неверный ответ во всех задачах ГО с каустиками, так как в этих задачах всегда имеется луч, ФО которого нелокален и охватывает ФО других лучей. Показана непригодность ЭК для многолучевых задач ГТД, а также для простейших задач дифракции направленной цилиндрической волны на полуплоскости и плоской волны на искривленной полуплоскости.

1. Геометрическая оптика (ГО) и ее обобщение — геометрическая теория дифракции (ГТД) — приближенные, но весьма эффективные методы расчета волновых полей. Широкое применение ГО и ГТД поставило важную проблему определения границ их применимости. Для этого обычно используются два подхода — внешние и внутренние оценки (см., например, [1], с. 190). Внешние оценки — сравнение результатов ГО и ГТД с результатами, полученными иными способами (например, численными или строгими методами). Внутренние оценки — расчет последующих членов асимптотики ГО и ГТД и оценка этих, обычно отбрасываемых членов. Применение этих подходов, однако, трудоемко и производится довольно редко.

В последнее время пропагандируется еще один метод решения той же проблемы, основанный на использовании введенного его авторами [2-7, 13, 14] понятия френелевского объема (ФО) — огибающей первых зон Френеля (определение зон Френеля и ФО см. ниже). Используя понятие ФО, они сформулировали эвристические критерии (ЭК) применимости ГО и ГТД. Эти, как подчеркивают их авторы, универсальные, достаточные и необходимые критерии для ГО сформулированы в следующей форме.

**ЭК. 1** ([3], с. 480; [4], с. 86). *Параметры среды, а также параметры волны (амплитуда и градиент фазы) не должны заметно меняться в поперечном сечении ФО.*

В случаях, когда в точку наблюдения приходит не один, а несколько лучей, введено, кроме того, условие физической различимости лучей.

**ЭК. 2** ([4], с. 86). *Френелевские объемы лучей, проходящих в одну и ту же точку, не должны существенно пересекаться друг с другом.*

Эти два критерия представляются на первый взгляд вполне естественными. Френелевский объем трактуется в [4] как область локализации луча: ... «следует делать различие между математическим лучом — это бесконечно тонкая линия, удовлетворяющая уравнению лучей, и физическим лучом, который имеет конечную толщину, определяемую френелевским объемом» ([4], с. 85).

Внешняя простота и наглядность используемых понятий, традиционное применение понятия зон Френеля в лекционных курсах для оценки простейших ситуаций делают предложенные ЭК весьма привлекательными. Однако эти ЭК ошибочны, и целью настоящей работы является демонстрация этого факта. Можно привести множество ситуаций, когда ЭК удовлетворены, а ГО или ГТД неприменимы, или, наоборот, ЭК не выполняются, а ГО или ГТД применимы. Иными словами, ни о какой «универсальности и достаточности ЭК» не может быть и речи. Например, ЭК неприменимы во всех многолучевых задачах. Как будет показано ниже, для всех точек луча, расположенных после касания им каустики, ФО нельзя отождествлять с «физическим лучом», так как он представляет собой не узкую область, охватывающую рассматриваемый луч, а существенно более сложный объект, уходящий от него далеко в сторону и во многих случаях охватывающий ФО других лучей (приходящих в ту же точку наблюдения). Поэтому требования малого изменения свойств среды и поля в поперечном сечении ФО явно неправомерны.

Ниже приводится лишь небольшое число имеющихся противоречащих примеров. В основном это примеры, на которых авторы [2-4] демонстрировали преимущества ЭК; однако их анализ оказался неполон или неточен, а приведенные ниже более точные рассуждения приводят к противоположному выводу — о непригодности ЭК.

2. Проанализируем используемые в [2-4] понятия зон Френеля и френелевских объемов. Рассуждения этого раздела представляют собой формализацию интуитивных соображений, использованных в [2] (с. 88, 89) при введении понятия френелевского объема.

Исходным шагом является запись поля в точке наблюдения  $P$  в форме интеграла Гюйгенса — Кирхгофа:

$$u(P) = \int_{\Sigma} \exp[ik\Phi(S, P)] A(S, P) dS. \quad (1)$$

Поверхность  $\Sigma$  разделяет область источников и точку наблюдения  $P$ ,  $A$  — медленно меняющийся множитель. Показатель экспоненты имеет специфическую дебаевскую форму произведения волнового числа  $k$  на фазовую функцию  $\Phi$ :

$$\Phi(S, P) = \Psi_0(S) + \Psi(S, P), \quad (2)$$

где  $\Psi_0(S)$  — эйконал первичного поля в точке  $S$ ,  $\Psi(S, P)$  — эйконал в точке  $P$  поля, расположенного в  $S$  гюйгенсовского источника.

Расчет поля в  $P$  в приближении ГО соответствует вычислению интеграла (1) методом стационарной фазы. Каждому из  $M$  приходящих в  $P$  лучей ( $M \geq 1$ ) соответствует на  $\Sigma$  стационарная точка  $S_m$  ( $m = 1, 2, \dots, M$ ) фазовой функции (2). Точка  $S_m$  является точкой выхода из  $\Sigma$   $m$ -го луча. Для применимости ГО, т. е. для применимости к интегралу (1) метода стационарной фазы, необходимо, чтобы в некоторой окрестности  $O_m$  точки  $S_m$ , стягивающейся к  $S_m$  при  $\lambda \rightarrow 0$  (т. е. в области влияния точки  $S_m$ ), фазовая функция  $\Phi$  мало отличалась от квадратичной, а амплитуда  $A$  — от константы. Примером, когда эти условия не выполняются, является расположение точки  $P$  вблизи каустики.

Эвристические критерии формулировались на основе двух посылок. Во-первых, предполагалось, что область влияния  $m$ -й стационарной точки на поверхности  $\Sigma$  можно отождествить с ее первой зоной Френеля, которая определяется в [3, 4] соотношением

$$kF_m(S) = k|\Phi(S, P) - \Phi(S_m, P)| \leq \pi. \quad (3)$$

Во-вторых, требовалось, чтобы метод стационарной фазы был применим к интегралу (1) при любом выборе поверхности  $\Sigma$  между источником и точкой наблюдения. Отсюда и возникает определение ФО (для

$m$ -го луча, приходящего в точку наблюдения  $P$ ) как огибающей всех его зон Френеля (3), а условие применимости к интегралу (1) метода стационарной фазы приводит к приведенным выше ЭК применимости ГО.

Преобразуем уравнение для границы первой зоны Френеля к виду, эквивалентному определению ФО из [4], формула (10.6). В силу (2), если  $S$  совпадает на  $\Sigma$  с  $m$ -й стационарной точкой  $S_m$ , то  $\Phi(S_m, P)$  равен эйконалу  $\Psi_0^{(m)}(P)$   $m$ -го луча, приходящего в  $P$ . Поэтому (3) можно записать в форме

$$kF_m(S) = k|\Psi_0(S) + \Psi(S, P) - \Psi_0^{(m)}(P)| \ll \pi. \quad (4)$$

Если первичное поле образовано источником, расположенным в точке  $Q$ , то из (4) следует (см. [4], формула (10.5))

$$kF_m(S) = k|\Psi(Q, S) + \Psi(S, P) - \Psi^{(m)}(Q, P)| \ll \pi. \quad (5)$$

Ломаная, состоящая из приходящего в  $S$  луча  $QS$  первичного поля и отрезка луча  $SP$ , называется виртуальным лучом,  $S$  — точка излома (вершина) виртуального луча.

Определение ФО, основанное на неравенствах (4), (5) и понятии виртуального луча, сформулировано в [2-4] нечетко и понимается там двояко:

а) Как область, занятая точками излома  $S$  виртуальных лучей, удовлетворяющими неравенствам (4), (5). Отрезки  $QS$  и  $SP$  виртуальных лучей при таком определении могут находиться как внутри ФО, так и вне его.

б) Область, занятая (замеченная) самими виртуальными лучами, точки излома  $S$  которых удовлетворяют (4), (5). При этом определении ФО отождествляется с областью, существенной для формирования поля луча в точке  $P$ .

Как мы увидим ниже, эти два определения отнюдь не эквивалентны и приводят к существенно различным следствиям.

3 При выводе ЭК существенно использовалось то, что ситуация является «гюйгенсовской», т.е. что искомое поле описывается интегралом типа (1) с фазовой функцией (2). Поскольку ЭК объявлены универсальными, они должны давать правильный ответ и в «негюйгенсовских» задачах, в которых поле нельзя представить в форме интеграла (1). Примером такой задачи является рассмотренная в [2-4] двумерная задача об отражении цилиндрической волны от гладкой выпуклой поверхности. Границы применимости ГО в этой задаче установлены в классической работе Фока [8]. Приведенное ниже сравнение критериев Фока и ЭК показывает, что имеются такие комбинации параметров задачи, когда ЭК выполнены, а по Фоку ГО неприменима, и, наоборот, ЭК не выполнены, а ГО в действительности применима. Приведем соответствующие выкладки.

Пусть  $Q$  — источник,  $P$  — точка наблюдения,  $R$  — точка отражения,  $|QR| = d_1$ ,  $|RP| = d_2$ ,  $\theta$  — угол между нормалью к поверхности в  $R$  и лучами  $QR$ ,  $RP$ ,  $a$  — радиус кривизны поверхности в  $R$ . Согласно ЭК для расчета отраженного поля в  $P$  можно использовать ГО, если (см. [4], формулы (11.32) и (12.28))

$$a_f \ll 2d_1 \cos \theta; \quad (6)$$

$$a_f \ll d_1 \cos \theta [a / (2d_1 + a \cos \theta)], \quad (7)$$

где (см. (11.30) из [4])

$$a_f = \left[ \frac{a\lambda d_1 d_2 \cos \theta}{(d_1 + d_2)a \cos \theta + 2d_1 d_2} \right]^{1/2}. \quad (8)$$

Из результатов же Фока следует, что при  $d_1 + d_2 \gg \lambda^{1/3} a^{2/3}$  единствен-

ным необходимым и достаточным условием применимости ГО является выполнение неравенства (см. [9], гл. 12)

$$p = (\pi a / \lambda)^{1/3} \cos \theta \gg 1. \quad (9)$$

Сопоставим ЭК и критерий Фока для двух ситуаций.

*А. Источник далек от точки отражения R, точка наблюдения P вблизи R ( $d_1 \gg a$ ,  $\lambda \ll d_2 < a \cos \theta$ ). Тогда (6) является следствием (7), т. е. ЭК дают условие*

$$a_f \ll a \cos \theta / 2, \quad (10)$$

где, согласно (8),

$$a_f = [a \lambda d_2 \cos \theta / (a \cos \theta + 2d_2)]^{1/2}. \quad (11)$$

Поэтому из ЭК следует, что условие применимости ГО имеет вид

$$4\lambda d_2 / [a \cos \theta (a \cos \theta + 2d_2)] \ll 1. \quad (12)$$

Положим  $\cos \theta = 0,12$ ,  $d_2 = 10\lambda = 0,06a$ . Тогда (12) выполнено. Для данной задачи должно удовлетворяться дополнительное условие — ФО точки наблюдения P не должен включать в себя точку касания T луча первичного поля с поверхностью. Это условие здесь также выполнено. Простое вычисление показывает, что первая зона Френеля точки P на отражающей поверхности находится на расстоянии  $0,0688a \approx 11\lambda$  от точки T. Поэтому, согласно всем ЭК, для расчета отраженного поля в точке P применима ГО. В действительности, однако, она неприменима, так как здесь параметр Фока  $p = (\pi a / \lambda)^{1/3} \cos \theta = 0,96 < 1$ .

*Б. Источник вблизи точки отражения.* Зафиксируем  $a$ ,  $\lambda$ ,  $d_2$ ,  $\cos \theta$  так, чтобы выполнялись неравенства  $a \gg d_2 \gg a \cos \theta$ ,  $\lambda \ll a \cos^3 \theta$ , и положим  $d_1 \ll a \cos \theta$ . Тогда согласно Фоку ГО применима при сколь угодно малых  $d_1$  и в том числе при

$$d_1 \ll \lambda / (4 \cos^2 \theta). \quad (13)$$

Однако при таком выборе  $d_1$  ЭК не выполняются, так как при выписанных соотношениях между  $a$ ,  $\lambda$ ,  $d_1$ ,  $d_2$ ,  $\cos \theta$  неравенство (7) следует из (6), а последнее можно записать в форме неравенства, противоположного (13):

$$d_1 \gg \lambda / (4 \cos^2 \theta). \quad (14)$$

4. Но и для «гюйгенсовских» ситуаций ЭК не универсальны. Следуя [15], покажем, что во всех многолучевых трехмерных задачах имеется луч, ФО которого не обладает локальностью, т. е., во-первых, имеет поперечный размер, не стягивающийся к нулю при  $\lambda \rightarrow 0$ , и, во-вторых, охватывает ФО других лучей. Чтобы проверить это, не сразу очевидное свойство ФО, вернемся к интегралу (1).

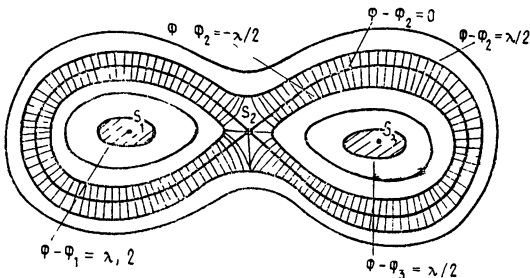


Рис. 1.

Стационарные точки  $S_m$  фазовой функции  $\Phi$  в этом интеграле являются или точками локальных экстремумов, или седловыми точками. Существенно, что если стационарных точек больше, чем две, то

среди них всегда должны быть седловые точки, так как между двумя локальными максимумами или локальными минимумами всегда имеется седловая точка (точка перевала). Для иллюстрации этого на рис. 1 приведена карта линий уровня  $\Phi$  для простейшего случая — трех стационарных точек  $S_1, S_2, S_3$ , из которых  $S_1, S_3$  — локальные минимумы,  $S_2$  — седловая точка. Вблизи точек минимума линии уровня  $\Phi$  близки к эллипсам. Зоны Френеля этих точек (заштрихованы на рис. 1) можно отождествить с их областями влияния. Вблизи седловой точки  $S_2$  линии уровня  $\Phi$  близки к гиперболам, первая зона Френеля этой точки — восьмеркообразная область, охватывающая точки  $S_1, S_3$  и не стягивающаяся к  $S_2$  при  $\lambda \rightarrow 0$ , т. е. не обладающая свойством локальности. Ясно, что огибающая зон Френеля точек, подобных  $S_2$ , т. е. ФО проходящего через  $S_2$  луча, также нелокальна.

В качестве частного случая этой общей ситуации рассмотрим трехмерную задачу об источнике в линейном слое. На рис. 2 показаны линии уровня  $F$  в вертикальном сечении  $\Sigma$  (плоскость  $x = \sqrt{3}/2$ ), находящемся посередине между источником  $Q(0, 0, 0)$  и точкой наблюдения  $P(\sqrt{3}, 0, 0)$ , расположенными в плоскостной среде с линейным законом изменения квадрата показателя преломления  $n^2 = 1 - z$  (такая среда — простейшая модель ионосферы, в которой из  $Q$  в  $P$

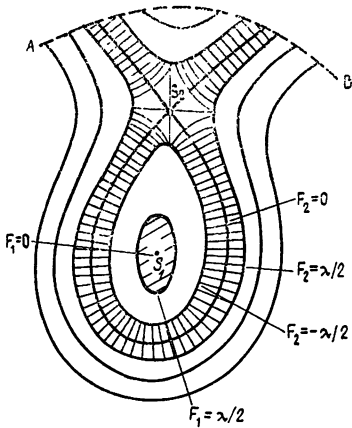


Рис. 2.

наряду с «прямым» лучом приходит луч, «отраженный» от ионосферы; этот пример приведен в [2-4]). Дуга  $AB$  — след пересечения плоскостью  $\Sigma$  каустики выходящих из  $Q$  лучей, точки  $S_1$  и  $S_2$  — пересечения  $\Sigma$  соответственно прямым и «ионосферным» лучами. Петлеобразная зона Френеля точки  $S_2$  —  $\lambda/2 \leq F_2 \leq \lambda/2$  охватывает зону Френеля  $0 \leq F_1 \leq \lambda/2$  точки  $S_1$  и ограничена сверху каустикой  $AB$ . Очевидно, что хотя для расчета поля в  $P$  по ГО нет никаких препятствий, ЭК.1 не выполняется, так как в петлеобразной зоне Френеля точки  $S_2$  поле существенно отличается от плоской волны, а среда — от однородной.

5. Применение ЭК наталкивается на принципиальные затруднения не только в трехмерных, но и в двумерных многолучевых задачах. Рассмотрим два примера.

*Пример 1.* ФО для «ионосферного» луча в линейном слое (рис. 3). Рис. 3 можно с равным правом интерпретировать и как сечение ФО в трехмерной задаче проходящей через источник  $Q$  и точку наблюдения  $P$  вертикальной плоскостью, и как ФО в двумерной задаче. На рис. 3а показан ФО согласно [2-4] (см. рис. 10.4 в [4]). Однако этот рисунок ошибочен. Найдем истинную форму ФО.

Учтем, что функции  $\Psi(Q, S)$  и  $\Psi(S, P)$  в (5) для рассматриваемой задачи двузначны, так как точки  $Q$  и  $S$  соединяют прямой луч с эйконалом  $\Psi_-(Q, S)$  и ионосферный с эйконалом  $\Psi_+(Q, S)$ ; аналогично надо брать два значения  $\Psi_-(S, P)$  и  $\Psi_+(S, P)$  для эйконала  $\Psi(S, P)$ . Для  $\Psi(Q, P)$  надо брать значение  $\Psi_+(Q, P)$ , так как мы рассматриваем ионосферный луч, соединяющий  $Q$  и  $P$ . Поэтому уравнение (5) для точек излома  $S$  виртуальных лучей записывается в четырех вариантах:

$$kF_{++}(S) \equiv k|\Psi_+(Q, S) + \Psi_+(S, P) - \Psi_+(Q, P)| = \pi; \quad (15a)$$

$$kF_{--}(S) \equiv k|\Psi_-(Q, S) + \Psi_-(S, P) - \Psi_+(Q, P)| = \pi; \quad (15б)$$

$$kF_{+-}(S) \equiv k|\Psi_+(Q, S) + \Psi_-(S, P) - \Psi_+(Q, P)| = \pi; \quad (15в)$$

$$kF_{-+}(S) \equiv k|\Psi_{-}(Q, S) + \Psi_{+}(S, P) - \Psi_{+}(Q, P)| = \pi. \quad (15г)$$

Учитывая, кроме того, двойное понимание  $\Phi O$  (см. конец п. 2), получим восемь вариантов  $\Phi O$ .

Можно показать, что  $\Phi O$ , соответствующий (15а), при достаточно большом  $k$  не существует.  $\Phi O$ , соответствующий (15б), показан на рис. 3б. Линейная штриховка соответствует первой трактовке  $\Phi O$  — как области, занятой точками излома  $S$  виртуальных лучей. Заполнение ее внутренней полости (точечная заливка) соответствует второму определению  $\Phi O$  — как области, заметаемой виртуальными лучами. На петле, состоящей из участка  $HJ$  ионосферного луча и штрихпунктирной линии, функция  $F_{-}$  равна нулю, т. е. к этой петле стягивается (при  $\lambda \rightarrow 0$ )  $\Phi O$ . Таким образом, при первом понимании  $\Phi O$  участки ионосферного луча  $QH$  и  $JP$  лежат вне  $\Phi O$ , зато окрестность штрихпунктирной линии почему-то «существенна для формирования поля ионосферного луча в точке  $P$ ».

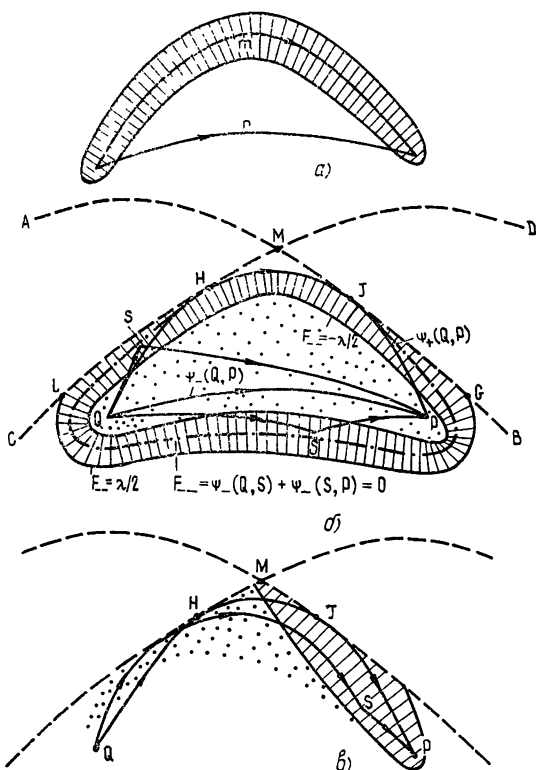


Рис. 3.

Рис. 3в соответствует  $\Phi O$  для уравнения (15в), а для уравнения (15г) точки  $P$  и  $Q$  следует поменять местами и изменить на противоположные направления лучей.

Отметим дополнительные особенности  $\Phi O$ , приводящие к физически нелепым результатам. Ионосферный луч касается каустики  $AB$  выходящих из  $Q$  лучей в точке  $J$  и каустики  $CD$  приходящих в  $P$  лучей в точке  $H$ . Поэтому а)  $\Phi O$  лежит ниже дуг  $AB$  и  $CD$ ; б) вблизи  $J$  поле существенно отличается от плоской волны.

Из б) следует, что ЭК. 1 никогда не удовлетворяется вне зависимости от того, можно или нельзя применять ГО для расчета поля в  $P$ . Из а) следует, что сколь угодно резкое изменение свойств среды выше дуг  $AB$  и  $CD$ , но вблизи точек  $J$  и  $H$  не влияет (что явно нелепо) на применимость ГО для расчета поля в  $P$ . Если же использовать

второе определение ФО (области, замеченной виртуальными лучами), то мы получим, кроме того, что ФО ионосферного луча всегда включает в себя ФО прямого луча, т.е. ЭК. 2 никогда не выполняется, и потому ГО никогда не применима.

*Пример 2.* Лучевое поле в однородной среде с каустикой  $ATB$  (рис. 4). В каждой точке  $P$  вне каустики имеется два эйконала первичного поля:  $\Psi_+(P)$  — эйконал луча  $GTP$ , коснувшегося каустики между областью источников и точкой  $P$ , и  $\Psi_-(P)$  — эйконал луча  $PC$ , еще не коснувшегося каустики. Построим ФО точки  $P$  для луча  $GTP$ , где  $T$  — точка касания с каустикой. Эйконал этого луча в  $P$  равен  $\Psi_+(P)$ . Для эйконалов виртуальных лучей возможны два варианта:  $\Psi_+(S) + |SP|$  и  $\Psi_-(S) + |SP|$ . ФО, соответствующий виртуальным лучам первого типа, показан на рис. 4а, лучам второго типа — на рис. 4б. Густой штриховкой показаны области, занятые точками излома  $S$  виртуальных лучей, т.е. точками, для которых  $|F_{\pm}(S)| = |\Psi_{\pm}(S) + |SP| - \Psi_+(P)| \ll \lambda/2$ . Точечной заливкой показаны области, замеченные самими виртуальными лучами. Заметим, что как кривые  $F_{\pm} = 0$ , так и соответствующие ФО уходят в сторону от опорного луча. Например, функция  $F_+(S)$  обращается в нуль на линии  $TD$  (см. рис. 4а) справа от точки  $T$ . В самом деле,

$$\Psi_+(P) = \Psi_+(T) + |TP| = \Psi_+(N) + |\hat{NT}| + |TP|,$$

где  $|\hat{NT}|$  — длина отрезка каустики между  $N$  и  $T$ . Очевидно, что

$$\begin{aligned} \Psi_+(N) + |NP| &< \Psi_+(N) + |\hat{NT}| + |TP| = \\ &= \Psi_+(P) < \Psi_+(N) + |NH| + |HP|. \end{aligned}$$

Поэтому на отрезке  $NH$  луча, касающегося каустики в точке  $N$ , имеется такая точка  $S$ , что

$$F_+(S) = |NS| + |SP| - |\hat{NT}| - |TP| = 0.$$

Таким образом, и здесь ФО не обладает свойством локальности, т.е. ЭК непригодны.

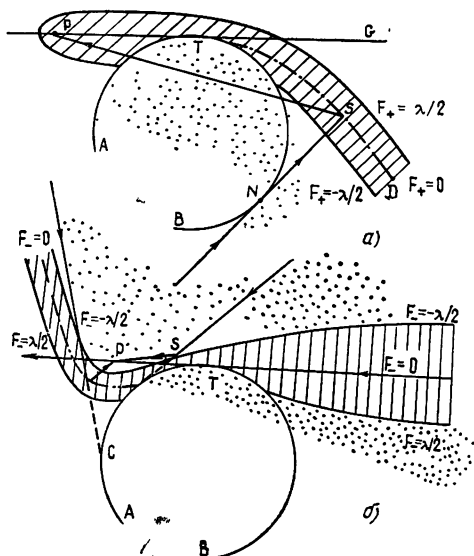


Рис. 4.

6. Рассмотрим теперь ЭК для ГТД [5-7]. Перечисленные выше дефекты ЭК для ГО целиком сохраняются и для ЭК для ГТД, в част-

ностей эти ЭК непригодны во всех задачах, где лучи краевых волн образуют каустики. Более того, как мы сейчас покажем, ЭК для ГТД имеют свои специфические дефекты и неприменимы и в тех случаях, когда краевые волны не имеют каустики.

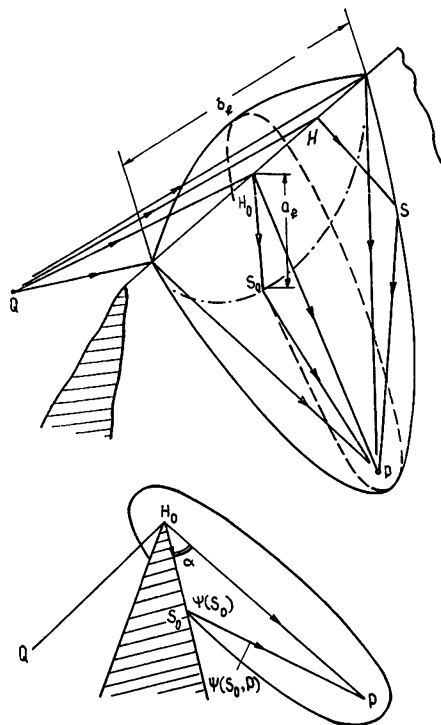


Рис. 5.

Основным понятием, использованным при формулировке ЭК для ГТД, является френелевский объем лучей дифракции (ФОЛД), который определяется как область, ограниченная поверхностью (формула (3.1) из [7])

$$|F(S)| = |\Psi_0(S) + \Psi(S, P) - \Psi_0(P)| = \lambda/2. \quad (16)$$

Здесь  $\Psi_0(S)$  — эйконал краевой волны в точке  $S$ ,  $\Psi_0(P)$  — эйконал краевой волны в точке наблюдения  $P$ ,  $\Psi(S, P)$  — длина оптического пути, соединяющего  $S$  и  $P$ , т.е. значение в  $P$  эйконала «гюйгенсовского» источника, помещенного в точку  $S$  луча краевой волны. Поперечные размеры ФОЛДа в плоскости экрана (рис. 5) характеризуются масштабом  $b_f$  в направлении вдоль кромки и  $a_f$  в направлении поперек кромки ([7], формула (3.4)):

$$a_f = \lambda/[2(1 - \cos \alpha)], \quad (17)$$

где  $\alpha$  — угол между направлением наблюдения и затененной гранью.

Критерии применимости ГТД сформулированы в [5-7] в следующей форме:

**ЭК. 3** «Необходимо, чтобы ФОЛДы, отвечающие двум соседним телам (или участкам тел), не пересекались» ([7], с. 813).

**ЭК. 4** «Необходимо наложить требование различимости лучей» ([7], формула (2.3)):

$$k|\Psi_1 - \Psi_2| > \pi. \quad (18)$$

**ЭК. 5** «... условие применимости ГТД сводится к требованию, чтобы внутри ФОЛДа были практически постоянны те величины, которые строго постоянны в исходной модельной задаче дифракции» ([7],



с. 806). И далее «... достаточное условие применимости ГТД в случае краевых волн можно представить в виде неравенств» ([7], с. 808)

$$b_f \ll L_{\parallel}, \quad a_f \ll L_{\perp}, \quad (19)$$

где  $L_{\parallel}$  и  $L_{\perp}$  — характерные масштабы изменения параметров кромки и волнового поля соответственно вдоль и поперек кромки ([7], с. 808).

7. Рассмотрим пример, в котором ЭК. 3 и ЭК. 4 не выполняются, хотя применимость ГТД не вызывает никаких сомнений, — задачу дифракции цилиндрической волны на ленте (рис. 6). В находящуюся в те-

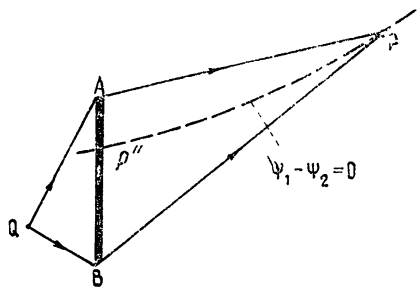


Рис. 6.

ни точку  $P$  приходят две краевые волны, возбужденные на кромках  $A$  и  $B$ , с эйконалами  $\Psi_1 = |QA| + |AP|$  и  $\Psi_2 = |QB| + |BP|$ . Точки  $P$ , для которых  $\Psi_1 = \Psi_2$ , образуют ветвь гиперболы  $P''PP'$ . Для всех таких точек ЭК.4 не выполняется, хотя никаких препятствий к расчету поля по ГТД нет. Ошибочность ЭК.4 связа-

на с тем, что условие (18) применимости ГО и ГТД, естественное для точки наблюдения, находящейся вблизи каустики или границы тень—

свет, распространяется на случай многолучевых задач ГТД, в которых точка наблюдения находится вдали от этих переходных зон.

Критерий ЭК. 3 никогда не выполняется, так как ФОЛДы лучей, приходящих в точку  $P$ , всегда пересекаются вблизи этой точки. Пойдем навстречу и ослабим это условие, требуя, аналогично ЭК. 2, чтобы общая доля ФОЛДов, о которых говорится в ЭК. 3, была мала. Однако и в такой ослабленной форме ЭК. 3 никогда не выполняется для поля в дальней зоне при дифракции на телах конечных размеров. В самом деле, по мере удаления точки наблюдения в бесконечность (рис. 7) относительная доля пересечения двух ФОЛДов стремится к единице. Однако ГТД, очевидно, применима для расчета диаграммы рассеяния (т. е. для расчета диаграммы рассеяния).

Ошибка [5–7] здесь произошла из-за смещения двух различных понятий — применимости ГТД и физической различимости двух лучей, приходящих в точку наблюдения. В дальней зоне поля отдельных краевых волн, приходящих в точку наблюдения, действительно физически неразличимы; собственно говоря, эта неразличимость и является определением дальней зоны. Однако для применимости ГТД нет необходимости различать лучи, а достаточно, чтобы поле каждого луча можно было вычислять по ГТД.

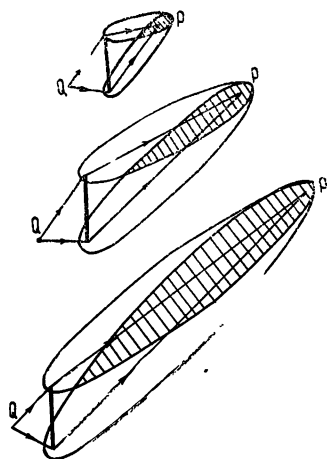


Рис. 7.

8. Покажем, что и ЭК. 5 также противоречит известным результатам. Этот критерий призван оценить границы применимости ГТД, возникающие из-за отличия рассматриваемой задачи от модельной —

дифракции плоской волны на клине с прямолинейными гранями. Оценим влияние двух факторов — искривления граней клина и отличия падающей волны от плоской — на применимость ГТД. Рассмотрим две задачи: дифракцию плоской волны на искривленной полуплоскости и дифракцию на полуплоскости направленной цилиндрической волны. Для обеих задач нами были проведены внутренние оценки границ

применимости ГТД сравнением приближения ГТД по Келлеру со следующим членом асимптотики. Эти оценки были сопоставлены с ЭК. 5.

А. Дифракция плоской волны  $e^{iky}$  на искривленной полуплоскости (рис. 8)  $x > 0$ ,  $y = -x^2/54\lambda$ . Радиус кривизны у кромки равен  $27\lambda$ . Взято граничное условие Неймана. Точка наблюдения  $P(4\lambda, 0,7\lambda)$  расположена в зоне тени. В ФОЛД точки  $P$  входит дуга  $OM$  искривленной полуплоскости, где точка  $M(3,5\lambda, 0,226\lambda)$  определялась из соотношения  $|OM| + |MP| - |OP| = \lambda/2$ . В пределах этого ФОЛДа отличие искривленной полуплоскости от полуплоскости  $ON$  в модельной задаче (пунктир на рис. 8) менее  $\lambda/25$ , т.е. пренебрежимо мало. Поэтому согласно ЭК. 5 для расчета поля в  $P$  можно применять ГТД. Однако расчет по [10] (см. также [1], с. 109—111) показал, что поправка к ГТД в точке  $P$  превышает приближение по Келлеру, т.е. что в рассматриваемой ситуации ГТД неприменима.

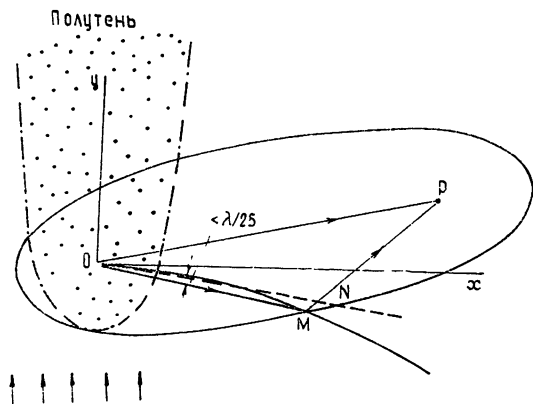


Рис. 8.

Б. Дифракция направленной (дипольной) цилиндрической волны  $H_1^{(1)}(kR) \sin(\varphi + \alpha)$  на полуплоскости. Координаты источника  $R_0 \gg \lambda$ ,  $\varphi_0 = \pi/2$ , угол между осью диполя и направлением на кромку равен  $\alpha$  (рис. 9). Использовалось известное [11] точное выражение для диаграммы краевой волны, которое и сопоставлялось с ЭК. 5. Оказалось, что имеются такие комбинации параметров источника  $\alpha$  и  $R_0$  и угла наблюдения  $\varphi$ , при которых ГТД применять нельзя, а ЭК. 5 выполняется. Например, если взять  $kR_0 = 5\pi^3 N^3 / \varepsilon^3$ ,  $\varphi = \varepsilon / (\pi N)$ ,  $\alpha = -\varepsilon / (5\pi^2 N^2)$ , то относительное изменение первичного поля в пределах ФОЛДа будет равно  $\varepsilon \ll 1$ , но второй член диаграммы краевой волны будет в  $N$  раз больше первого (приближения ГТД по Келлеру). Наоборот, если взять, например,  $kR_0 = 60$ ,  $\alpha = -\pi/4$ ,  $\varphi = 2\pi/5$ , то ЭК.5 не будет выполнен, так как на участке полуплоскости, попадающем внутрь ФОЛДа, окажется точка, где первичное поле обращается в нуль, т.е. в пределах ФОЛДа относительное изменение первичного поля никак нельзя считать малым. В то же время для этих значений  $kR_0$ ,  $\alpha$ ,  $\varphi$  ГТД оказывается применимой.

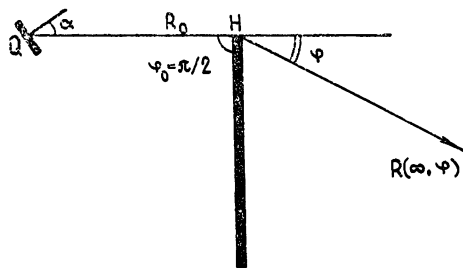


Рис. 9.

9. Покажем теперь, что ЭК дают ошибочный ответ в том примере, который был избран авторами [5—7], чтобы продемонстрировать применение ЭК для качественной оценки ситуации (см. рис. 12 в [7]). Рассматривается двукратная последовательная дифракция на вершинах  $A, C$  тела со впадиной (рис. 10) (для простоты, в отличие от [7],

мы берем двумерную задачу). На теле ставится граничное условие Неймана. Если  $k\Delta\Psi \gg 1$ , где  $\Delta\Psi = AB + BC - AC$ , то амплитуда краевой волны пропорциональна  $D_A D_C$ , где  $D_A, D_C$  — соответствующие коэффициенты дифракции. При  $k\Delta\Psi \ll 1$  точка  $B$  близка к хорде  $AC$ , и мы имеем скользящее распространение вдоль  $AC$ . В этом случае амплитуда двукратной волны пропорциональна  $(1/2)D_A D_C$ . Согласно [6, 7] переход от одной формулы к другой надо делать, когда точка  $B$  попадает в ФОЛД точек  $A$  и  $C$ , т. е. при  $\Delta\Psi = \lambda/2$ . Как мы сейчас покажем, в действительности его надо делать при значении  $\Delta\Psi$ , на порядок меньшем и равном  $\lambda/25$ .

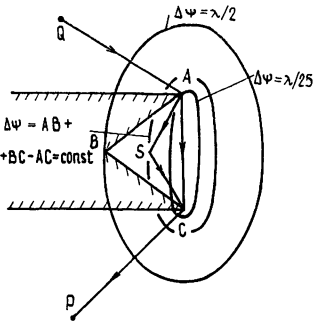


Рис. 10.

$= (1/2)(1 + (1/2)) = 3/4$ . Согласно [1], гл. 4, а также [12], можно получить, что

$$|V| = F(\sqrt{k\Delta\Psi}) + O(k|AC|)^{-1},$$

где  $F(x)$  — интеграл Френеля. Из условия  $|F(\sqrt{k\Delta\Psi})| = 3/4$  следует, что  $k\Delta\Psi = 1/4$ , т. е. что  $\Delta\Psi = \lambda/25$ .

10. Авторы ЭК многократно подчеркивали их всеобщую, неограниченную применимость. Аналогичные критерии, писали они, «в той или иной форме возникали во множестве исследований, начиная с работ О. Френеля... Новый момент состоит, пожалуй, в том, что мы подчеркиваем универсальность и достаточность этих критериев; во всех известных нам (т. е. Ю. А. Кравцову и Ю. И. Орлову — Б., К.) случаях критерии ЭК. 1 и ЭК. 2 полностью согласуются с другими способами определения границ применимости ГО» ([4], с. 86, 87).

Из приведенных выше примеров видно, однако, что обсуждаемые ЭК уже для простейших задач ГО с каустиками и элементарных задач ГТД приводят к результатам, противоречащим как строго установленным фактам, так и здравому смыслу, допуская, например, сколь угодно сильное изменение свойств среды сколь угодно близко от рассматриваемого луча и, наоборот, запрещая изменять среду вдали от луча. Тем меньше оснований ожидать, что ЭК дадут правильную качественную или количественную оценку границ применимости ГО или ГТД в более сложных сколько-нибудь нетривиальных задачах. Конечно, нельзя утверждать, что они всегда дают неверный ответ, но никогда нельзя сказать заранее, верны или ошибочны оценки ЭК в применении к какой-либо новой, еще не решенной задаче.

Настоящую статью не следует понимать как возражения против использования для оценки границ применимости ГО и ГТД фазовых (зонных) методов, основанных на сравнении фаз различных лучей, действительных и виртуальных, проходящих в точку наблюдения. Эти методы, успешно развиваясь в течение полутора сотен лет, получили широкое распространение; мы и сами часто используем их в своих работах. Мы возражаем лишь против претензий на универсальность ЭК, представляющих собой существенное, но, к сожалению, ошибочное расширение области действия фазовых методов.

В заключение нам хотелось бы заметить, что, по нашему мнению, попытки построения универсальных критериев применимости ГО и ГТД так же обречены на неудачу, как и попытки создания универсального лекарства — панацеи — в медицине. Имеется множество причин, из-за

которых ГО и ГТД становятся непригодными. Эти причины имеют различную физическую природу, и нет никаких оснований ожидать, что существуют учитывающие их универсальные критерии. Целесообразно, по-видимому, идти по другому пути, формулируя критерии применимости ГО и ГТД для более узких, но представляющих практический интерес классов задач.

Авторы благодарят Л. А. Вайнштейна за строгую, но доброжелательную критику первого варианта настоящей работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Боровиков В. А., Кинбер Б. Е. Геометрическая теория дифракции. — М.: Связь, 1978.
2. Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И. — В сб.: Современные проблемы распространения и рассеяния волн. — М.: ИРЭ АН СССР, 1979, с. 76.
3. Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И. — УФН, 1980, 132, вып. 3, с. 475.
4. Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И. Геометрическая оптика неоднородных сред. — М.: Наука, 1980.
5. Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И. Тезисы докладов VIII Всесоюзного симпозиума по дифракции и распространению волн. — М., 1981, 2, с. 24.
6. Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И. Препринт ФИАН № 180. — М., 1981.
7. Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1982, 25, № 7, с. 805.
8. Фок В. А. — ЖЭТФ, 1949, 19, № 10, с. 916.
9. Фок В. А. Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн. — М.: Сов. радио, 1970.
10. Боровиков В. А. — Акуст. журн., 1979, 25, вып. 6, с. 825.
11. Боровиков В. А., Эйндус А. Г. — В сб.: Антенны. — М.: Связь, 1981, вып. 29, с. 49.
12. Боровиков В. А., Нарбут В. П. — Радиотехника и электроника, 1980, 25, вып. 6, с. 1177.
13. Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И. — ЖЭТФ, 1981, 81, с. 1603.
14. Kravtsov Yu. A., Orlov Yu. I. — Radio Sci., 1981, 16, p. 975.
15. Боровиков В. А., Кинбер Б. Е. XIV Всесоюзная конференция по распространению радиоволн. Тезисы докладов. — Л., 1984, Ч. 2, с. 225.

Институт проблем механики  
АН СССР

Поступила в редакцию  
28 октября 1985 г.

#### ON THE ERROR OF THE «UNIVERSAL AND SUFFICIENT» HEURISTIC CRITERIA FOR THE ESTIMATION OF GEOMETRICAL OPTICS AND GEOMETRICAL THEORY OF DIFFRACTION APPLICABILITY

*V. A. Borovikov, B. Ye. Kinber*

The heuristic criterions (HC) for applicability of geometrical optics (GO) and geometrical theory of diffraction (GTD) proposed in [2-7, 13, 14] and based on the identification of the physical volume occupied by the ray and Fresnel's volume (FV) introduced in these papers (i.e. the envelope of the first Fresnel's zones) are investigated. The numerous examples of inapplicability of HC are presented. In particular, HC can not be applied in all the problems of GO with caustics because there is always the ray with non-local FV which includes the FV of some other ray. It is shown that HC are non-valid in many-rayed problems of GTD and for diffraction of directed cylindrical wave by half-plane and plane wave by curved half-plane.

---

#### ОТВЕТ НА КРИТИКУ, СОДЕРЖАЩУЮСЯ В СТАТЬЕ В. А. БОРОВИКОВА и Б. Е. КИНБЕРА «ОБ ОШИБОЧНОСТИ «УНИВЕРСАЛЬНЫХ И ДОСТАТОЧНЫХ» ЭВРИСТИЧЕСКИХ КРИТЕРИЕВ ПРИМЕНИМОСТИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ И ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ»

*Ю. А. Кравцов*

В статье [1] высказаны возражения против эвристических критериев применимости лучевой теории, сформулированных в наших с Ор-