ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

*Том XXX, № 10* *РАДИОФИЗИКА* *1987*

УДК 621.396.67:08.001

# К ТЕОРИИ ИЗМЕРЕНИЙ ХАРАКТЕРИСТИК АНТЕНН МЕТОДОМ СФЕРИЧЕСКИХ ГАРМОНИК

*Э. Д. Газазян, М. И. Иванян*

Обсуждается алгоритм восстановления поля излучения антенных систем по измеренным значениям тангенциальных составляющих электромагнитного поля на сферической поверхности, охватывающей систему. Показано, что результаты восстановления не зависят от паразитного излучения, исходящего от посторонних предметов, находящихся вне сферы, и попадающего непосредственно в измерительный зонд.

Метод сферических гармоник в теории измерений характеристик антенн [1–5] позволяет определять поле излучения антенны по его тангенциальным составляющим, измеренным на поверхности сферы, охватывающей антенну. Принцип, лежащий в основе метода, заключается в независимости коэффициентов разложений $\alpha_N$ электромагнитных полей по сферическим гармоникам $\boldsymbol{E}_N$, $\boldsymbol{H}_N$,

$$\boldsymbol{E} = \sum_N \alpha_N \boldsymbol{E}_N, \quad \boldsymbol{H} = \sum_N \alpha_N \boldsymbol{H}_N, \quad N \in n, m, \tag{1}$$

$$\begin{pmatrix} H \\ E \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ e \end{pmatrix}; \quad n, m = 0, 1, 2, \dots,$$

от радиуса сферической поверхности $r_0$, на которой производятся измерения. Сферические гармоники записываются следующим образом [6]:

$$\boldsymbol{E}_{nmH^e_0} = \boldsymbol{M}_{nm^e_0}, \quad \boldsymbol{E}_{nmE^e_0} = \boldsymbol{N}_{nm^e_0}, \quad \boldsymbol{H}_{nmH^e_0} = -i\boldsymbol{N}_{nm^e_0}, \quad \boldsymbol{H}_{nmE^e_0} = -i\boldsymbol{M}_{am^e_0}, \tag{2}$$

где

$$\boldsymbol{M}_{nm^e_0} = \mp \boldsymbol{\theta}_0 A_{nm} \begin{matrix} \sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{matrix} - \boldsymbol{\varphi}_0 B_{nm} \begin{matrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{matrix},$$

$$\boldsymbol{N}_{nm^e_0} = \boldsymbol{r}_0 E_{nm} \begin{matrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{matrix} + \boldsymbol{\theta}_0 D_{nm} \begin{matrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{matrix} \mp \boldsymbol{\varphi}_0 C_{nm} \begin{matrix} \sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{matrix},$$

$$A_{nm} = \frac{h_n(kr)}{kr} \frac{mP_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta}, \quad B_{nm} = \frac{h_n(kr)}{kr} \frac{\partial P_n^m(\cos\theta)}{\partial\theta}, \tag{2a}$$

$$C_{nm} = \frac{h'_n(kr)}{kr} \frac{mP_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta},$$

$$D_{nm} = \frac{h'_n(kr)}{kr} \frac{\partial P_n^m(\cos\theta)}{\partial\theta}, \quad E_{nm} = n(n+1) \frac{h_n(kr)}{k^2 r^2} P_n^m(\cos\theta),$$

$$h'_n(x) = \frac{\partial h_n(x)}{\partial x}.$$

Здесь $h_n(kr)$ — сферическая функция Ханкеля первого рода, связанная с цилиндрической функцией Ханкеля соотношением (см., например, [7])

$$h_n(kr) = \sqrt{\frac{\pi kr}{2}} H_{n+1/2}(kr), \quad k = \frac{\omega}{c}, \tag{3}$$

$P_n^m(\cos\theta)$ — присоединенный полином Лежандра. Сферические гармоники записаны в сферической системе координат $r, \theta, \varphi$, центр которой совпадает с центром сферы измерений; $\boldsymbol{r}_0, \theta_0, \varphi_0$ — соответственно радиальный, полярный и азимутальный орты этой системы.

Для восстановления поля вне поверхности измерений достаточно иметь измеренные на ней значения тангенциальных составляющих одного из векторов поля ($\boldsymbol{E}$ или $\boldsymbol{H}$) [1,2]. В работах [3–5] предложена модификация метода сферических гармоник, при которой коэффициенты в (1) определяются с помощью измерений как электрических, так и магнитных тангенциальных компонент полей на сфере. Коэффициенты $\alpha_N$ в этом случае определяются по формуле [3]

$$\alpha_N = B_N I_N, \quad I_N = \int_S \{-[\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}_N - \boldsymbol{H}_N^*] + [\boldsymbol{E}_N + \boldsymbol{E}_N^*, \boldsymbol{H}]\}\, d\boldsymbol{S},$$

$$B_N = [2\,\mathrm{Re} \int_S [\boldsymbol{E}_N, \boldsymbol{H}_N]\, d\boldsymbol{S}]^{-1}. \tag{4}$$

Интегрирование в (4) проводится по сферической поверхности измерений. В работе [3] данная модификация использована для расчета полей по заданному распределению токов на поверхности антенны. В работах [4,5] показана возможность ее применения для определения характеристик антенн с помощью измерений только электрических компонент полей. Это достигается оптимальным выбором радиуса сферы измерений, когда с приемлемой точностью можно положить $E_\theta = H_\varphi$, $E_\varphi = -H_\theta$ и проводить измерения с помощью «компенсированных» зондов [4].

Цель настоящей работы — показать, что данная модификация метода сферических гармоник позволяет восстановить поле источников (первичных и индуцированных), ограниченных поверхностью измерений, и исключает влияние излучения внешних источников, попадающего непосредственно в измерительный зонд. Поля $E$, $\boldsymbol{H}$, входящие в выражение (4) для $\alpha_N$, можно записать в виде суммы вкладов от источников, находящихся внутри сферы ($E_1$, $\boldsymbol{H}_1$) и вне ее ($E_2$, $\boldsymbol{H}_2$):

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2, \quad \boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_1 + \boldsymbol{H}_2, \tag{5}$$

обусловленных, соответственно, токами $j_1$ и $j_2$, распределенными внутри и вне сферы измерений.

Пусть аттестуемая антенна охватывается сферической поверхностью $S$, ограничивающей объем $V$. Преобразуем поверхностный интеграл в (4) в интеграл по объему $V$:

$$I_N = \int_V \{-(\boldsymbol{H}_N - \boldsymbol{H}_N^*)\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}\,\mathrm{rot}\,(\boldsymbol{H}_N - \boldsymbol{H}_N^*) + \boldsymbol{H}\,\mathrm{rot}\,(\boldsymbol{E}_N + \boldsymbol{E}_N^*) -$$

$$- (\boldsymbol{E}_N + \boldsymbol{E}_N^*)\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}\}\, dV. \tag{6}$$

Собственные векторные сферические гармоники связаны соотношениями

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}_N = -ik\boldsymbol{E}_N, \quad \mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}_N = -ik\boldsymbol{H}_N, \tag{7}$$

а поля $\boldsymbol{E}_{1,2}$, $\boldsymbol{H}_{1,2}$ удовлетворяют уравнениям Максвелла

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}_1 = -ik\boldsymbol{E}_1 + \frac{4\pi}{c} j_1, \quad \mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}_1 = ik\boldsymbol{H}_1,$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}_2 = -ik\boldsymbol{E}_2, \quad \mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}_2 = ik\boldsymbol{H}_2. \tag{8}$$

Токи $j_2$ в уравнениях (8) не фигурируют, поскольку находятся вне объема $V$. Подстановка (7) и (8) с учетом (5) в (4) дает

$$I_N = -\frac{4\pi}{c}\int\limits_V j_1 (E_N + E_N^*)\, dV, \tag{9}$$

что и доказывает наше утверждение. Его справедливость можно иллюстрировать на примерах излучающих систем.

Рассмотрим электрический диполь — наиболее простую систему такого рода. Выберем сферическую систему координат таким образом, чтобы направление момента диполя $p$ ($|p| = 1$) совпадало с ее полярной осью. Расстояние от диполя до центра сферической системы координат выберем равным $r'$, радиус сферы измерений — $r_0$, координаты точки наблюдения — $r, \theta, \varphi$. Компоненты поля диполя можно записать в виде [7]

$$H_\varphi(r, r') = \frac{1}{4\pi i k r r'^2}\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)\frac{\partial P_n(\cos\theta)}{\partial\theta}\, j_n(kr_<)\, h_n(kr_>),$$

$$E_\theta(r, r') = -\frac{1}{4\pi k^2 r^2 r'^2}\frac{\partial}{\partial r}\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)\frac{\partial P_n(\cos\theta)}{\partial\theta}\, j_n(kr_<)\, h_n(kr_>), \tag{10}$$

$$E_r(r, r') = \frac{1}{4\pi k^2 r^2 r'^2}\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)(2n+1)\, P_n(\cos\theta)\, j_n(kr_<) h_n(kr_>),$$

$H_\theta = H_r = E_\varphi = 0$, $j_n(kr) = \sqrt{\dfrac{\pi kr}{2}}\, J_{n+1/2}(kr)$ — сферические функции Бесселя. Здесь

$$r_< = \begin{cases} r', & \text{если } r' < r \\ r, & \text{если } r' > r \end{cases}, \qquad r_> = \begin{cases} r, & \text{если } r' < r \\ r', & \text{если } r' > r \end{cases}. \tag{11}$$

При $r > r'$ поля (10) принимают вид разложений (1) с отличными от нуля коэффициентами

$$\alpha_{n0Ee} = -\frac{2n+1}{4\pi r'^2}\, j_n(kr'). \tag{12}$$

Тот же результат можно получить подстановкой (10) в (4) при произвольном $r_0 > r'$. Когда $r < r'$, подстановка (10) в (4) дает $\alpha_N = 0$ для всех $N$. При наличии второго аналогичного диполя, расположенного на расстоянии $r'' > r'$, имеем соответственно

$$\alpha_N = 0 \quad \text{при } r_0 < r',$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{n0Ee} &= -\frac{2n+1}{4\pi r'^2}\, j_n(kr') \quad \text{при } r' < r_0 < r'' \\ \alpha_{n0Ee} &= -\frac{2n+1}{4\pi}\left(\frac{j_n(kr')}{r'^2} + \frac{j_n(kr'')}{r''^2}\right) \quad \text{при } r_0 > r'' \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\alpha_N \equiv 0 \\ &\text{для } N \neq n0Ee. \end{aligned} \tag{13}$$

В последнем случае, когда сфера измерений охватывает оба диполя, подстановка (13) в (1) дает их суммарное излучение.

Рассмотрим пример индуцированного излучения. Имеем идеально проводящий металлический шар радиуса $a$. Центр сферической системы координат совмещен с центром шара. На расстоянии $r' > a$ от центра шара на оси системы находится электрический диполь, момент которого ориентирован в направлении $\theta=0$, $\varphi=0$. Компоненты поля данной системы записываются в виде суммы $E$- и $H$-типов волн [7]:

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_E+\boldsymbol{E}_H,\quad \boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}_E+\boldsymbol{H}_H,$$

$$E_{E,\theta}=\frac{ik\cos\varphi}{r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial P_n^1(\cos\theta)}{\partial\theta}\,\frac{\partial f_n(r_<,r_>)}{k\partial r},$$

$$E_{E,\varphi}=-\frac{ik\sin\varphi}{r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{P_n^1(\cos\theta)}{\sin\theta}\,\frac{\partial f_n(r_<,r_>)}{k\partial r},$$

$$E_{E,r}=-\frac{ik\cos\varphi}{r^2}\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)P_n^1(\cos\theta)f_n(r_<,r_>),$$

$$H_{E,\theta}=-\frac{k\sin\varphi}{r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{P_n^1(\cos\theta)}{\sin\theta}f_n(r_<,r_>),$$

$$H_{E,\varphi}=-\frac{k\cos\varphi}{r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial P_n^1(\cos\theta)}{\partial\theta}f_n(r_<,r_>),\quad H_{E,r}=0,$$

$$E_{H,\theta}=\frac{ik\cos\varphi}{r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{P_n^1(\cos\theta)}{\sin\theta}\,g_n(r_<,r_>),\tag{14}$$

$$E_{H,\varphi}=-\frac{ik\sin\varphi}{r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial P_n^1(\cos\theta)}{\partial\theta}\,g_n(r_<,r_>),\quad E_{H,r}=0,$$

$$H_{H,\theta}=\frac{k\sin\varphi}{r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial P_n^1(\cos\theta)}{\partial\theta}\,\frac{\partial g_n(r_<,r_>)}{k\partial r},$$

$$H_{H,\varphi}=\frac{k\cos\varphi}{r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{P_n^1(\cos\theta)}{\sin\theta}\,\frac{\partial g_n(r_<,r_>)}{k\partial r},$$

$$H_{H,r}=\frac{\sin\varphi}{r^2}\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)P_n^1(\cos\theta)g_n(r_<,r_>).$$

Здесь

$$f_n(r_<,r_>)=\frac{1}{4\pi ikr'}\,\frac{2n+1}{n(n+1)}\,\frac{\partial}{k\partial r'}\left\{\left(j_n(kr_<)-\frac{j_n'(ka)}{h_n'(ka)}h_n(kr_<)\right)\times\right.$$
$$\left.\times\,h_n(kr_>)\right\},\tag{15}$$

$$g_n(r_<,r_>)=\frac{1}{4\pi ikr'}\,\frac{2n+1}{n(n+1)}\left(j_n(kr_<)-\frac{j_n(ka)}{h_n(ka)}\,h_n(kr_<)\right)\times$$

$$\times h_n(kr_>), \quad j'_n(x) = \frac{\partial j_n(x)}{\partial x}.$$

Из структуры выражений (15) видно, что поле (14) можно представить в виде суммы излучения диполя в свободном пространстве (первое слагаемое в (15)) и поля излучения, обусловленного наличием шара (второе слагаемое в (15)). При $r>r'$ поля (14) представляют собой разложения по векторным сферическим гармоникам (2) с коэффициентами разложения $\alpha_N$, равными

$$\begin{aligned} \alpha_{n1Ee} &= k^2 f(r', r), \\ \alpha_{n1H0} &= k^2 g(r', r), \end{aligned} \quad \alpha_N \equiv 0 \text{ при } N \neq \begin{matrix} n1Ee \\ n1H0 \end{matrix}. \tag{16}$$

Этот результат можно получить также непосредственной подстановкой (14) в (4). В этом случае, следовательно, результатом восстановления поля методом сферических гармоник является полное поле системы диполь—шар. В случае же $r=r_0<r'$ подстановка (14) в (4) дает

$$\begin{aligned} \alpha_{n1Ee} &= -\frac{ik^2}{4\pi ikr'} \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{j'_n(ka)}{h'_n(ka)} h'_n(kr'), \\ \alpha_{n1H0} &= -\frac{ik^2}{4\pi ikr'} \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{j_n(ka)}{h_n(ka)} h_n(kr'), \end{aligned} \quad \alpha_N \equiv 0 \text{ при } N \neq \begin{matrix} n1Ee \\ n1H0 \end{matrix}. \tag{17}$$

Результатом подстановки (17) в (1) является часть поля (14), обусловленная наличием шара, т. е. при $r_0<r'$ результатом восстановления поля является индуцированное излучение шара без учета вклада прямого поля диполя.

Оба приведенных примера показывают преимущество использования алгоритма (2) для определения коэффициентов разложения $\alpha_N$.

Таким образом, коэффициенты разложения в виде (4), а при достаточно большом радиусе сферы измерений — в виде, использованном в [5], автоматически исключают влияние излучения, исходящего от источников, находящихся вне сферической поверхности измерений, и непосредственно попадающего на измерительный зонд. Неучтенными остаются эффекты многократных отражений внутри поверхности измерений.

Отметим в заключение, что метод сферических гармоник, использующий **E**- и **H**- поля (т. е. (1) в сочетании с (4)), является, в некотором смысле, эквивалентом векторного интеграла Кирхгофа и, следовательно, аналогичный эффект имеет место при измерениях не только на сферической, но и на произвольной замкнутой поверхности.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ludwig A. C. — IEEE Trans., 1971, **AP-19**, № 2, p. 214.
2. Paris T, Leach W. M., Joy E. B. — IEEE Trans., 1978, **AP-26**, № 3, p. 373.
3. Wood P. J. — The Marconi Review, 1971, **34**, № 182, p. 149.
4. Wood P. J. — The Marconi Review, 1977, **40**, № 205, p. 117.
5. Асатрян Д Г, Газазян Э. Э. — Изв вузов — Радиофизика, 1986, **29**, № 1, с 121.
6. Стреттон Дж. А. Теория электромагнетизма. — М. — Л.: Гостехиздат, 1948.
7. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. — М: Мир, 1978, **1, 2**.

Всесоюзный научно-исследовательский институт радиофизических измерений

Поступила в редакцию 30 июля 1985 г., после переработки 3 февраля 1987 г.

## TO THE THEORY OF THE SPHERICAL HARMONIC METHOD IN ANTENNA PARAMETER MEASUREMENTS

*E. D. Gazazyan, M. I. Ivanyan*

It is shown that the results of the measurements by the spherical harmonic method are independent of the reflected and any other radiation falling directly to the probe from the subjects outside the measurement sphere.