

УДК 535.416.3

О ФОКУСИРОВКЕ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ УПРУГИМИ ДЕФОРМИРУЕМЫМИ ЗЕРКАЛАМИ

С. С. Чесноков

На основе метода конечных элементов построена модель упругого зеркала, деформируемого поперечными силами в заданных точках. Рассмотрен фазовый корректор в виде квадратного зеркала с четырьмя приводами, шарнирно закрепленный в центре. Проведена оптимизация размера зеркала и конфигурации приводов. Исследована применимость зеркала для коррекции фазовых искажений светового пучка, распространяющегося в случайно-неоднородной или нелинейной среде.

В связи с развитием адаптивной оптики в настоящее время большой интерес представляет исследование предельных возможностей управления световыми пучками с помощью фазовых корректоров. Наиболее распространенными являются корректоры в виде упругих зеркал, деформируемых системой поперечных сил, приложенных в ряде точек. Настоящая работа посвящена построению вычислительной модели деформируемого зеркала и анализу на ее основе эффективности управления световыми пучками, распространяющимися в случайно-неоднородной и нелинейной среде.

1. Модель фазового корректора. Для построения расчетной модели фазового корректора воспользуемся приближением тонкой пластины. Как известно [1], поперечный прогиб пластины описывается бигармоническим дифференциальным уравнением со сложными граничными условиями и представляет значительные трудности для численного анализа. Наиболее эффективным средством расчета деформаций упругих систем является, по-видимому, метод конечных элементов [2]. Согласно этому методу пластина разбивается на совокупность элементов, прогиб каждого из которых $W(x, y)$ представляется линейной формой наперед заданных базисных функций $\psi(x, y)$:

$$W(x, y) = \psi^T(x, y) A, \quad (1)$$

где ψ^T — строка базисных функций, A — столбец коэффициентов линейной формы. Это позволяет описать деформацию элемента конечным числом обобщенных координат, определенных в узловых точках. В качестве обобщенных координат элемента обычно берутся величины, имеющие простой физический смысл, например, смещения в узлах W_r , углы наклона $\varphi_r = \partial W / \partial y|_r$, $\phi_r = \partial W / \partial x|_r$ ($r = 1, 2, \dots, R$), всего по три координаты на каждый из R узлов. Эти величины образуют вектор

$$q = \begin{Bmatrix} W \\ \varphi \\ \phi \end{Bmatrix} \quad (2)$$

размерности $3R \times 1$. Если матрицу преобразования обобщенных координат q к A обозначить через $[a]$, то форму прогиба $W(x, y)$ можно записать в виде

$$W(x, y) = \psi^T(x, y) [a] q. \quad (3)$$

Сопряженный с q вектор обобщенных сил будет

$$Q = \begin{Bmatrix} P \\ N \\ T \end{Bmatrix}. \quad (4)$$

Здесь P — вектор перерезывающих сил, приложенных к узлам элемента, N, T — векторы изгибающих моментов в узлах. Обобщенные силы вычисляются на основе принципа виртуальных перемещений, согласно которому

$$\delta q^T Q = \delta U, \quad (5)$$

где $\delta U = \delta \iint_S \varepsilon(x, y) dx dy$ — вариация потенциальной энергии деформации элемента, плотность которой $\varepsilon(x, y)$, S — площадь элемента.

В случае однородной изотропной пластины [1]

$$\varepsilon(x, y) = \frac{D}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 \right],$$

где ν — коэффициент Пуассона, D — цилиндрическая жесткость. Используя (3), находим

$$\varepsilon(x, y) = q^T [a]^T [\varepsilon(x, y)] [a] q, \quad (6)$$

где

$$[\varepsilon] = \frac{D}{2} \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi^T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \phi^T}{\partial y^2} + \nu \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi^T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \phi^T}{\partial x^2} \right) + 2(1-\nu) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \phi^T}{\partial x \partial y} \right]$$

— матрица плотности потенциальной энергии элемента. Отсюда $\delta U = \delta q^T [K] q$, причем матрица жесткости элемента $[K]$ описывается выражением

$$[K] = [a]^T \iint_S [\varepsilon(x, y)] dx dy [a]. \quad (7)$$

Из (5) с учетом (7) следует

$$Q = [K] q. \quad (8)$$

Матрица жесткости определяется геометрическими и упругими характеристиками элемента, а также видом базисных функций $\phi(x, y)$. В качестве их обычно берут степенные функции. Например, для элемента в форме прямоугольника со сторонами a и b базисные функции целесообразно выбрать в виде

$$\phi^T = \left\{ 1, \frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{x^2}{a^2}, \frac{y^2}{b^2}, \frac{xy}{ab}, \frac{x^3}{a^3}, \frac{x^2 y}{a^2 b}, \frac{xy^2}{ab^2}, \frac{y^3}{b^3}, \frac{x^3 y}{a^3 b}, \frac{xy^3}{ab^3} \right\}. \quad (9)$$

Матрица жесткости имеет выраженную блочную структуру:

$$[K] = \begin{bmatrix} [K^{PW}] & [K^{P\phi}] & [K^{P\theta}] \\ [K^{NW}] & [K^{N\phi}] & [K^{N\theta}] \\ [K^{TW}] & [K^{T\phi}] & [K^{T\theta}] \end{bmatrix}.$$

Здесь $[K^{Pw}]$ — блок размерности $R \times R$, связывающий перерезывающие силы P и смещения W , $[K^{P\phi}]$ — силы P и наклоны ϕ и т. д.

Условия сопряжения для обобщенных координат соседних элементов формулируются из требования непрерывности поля смещений всей модели; для обобщенных сил — из требования уравновешенности всех сил в каждой узловой точке. Используя эти условия, можно получить

матрицу жесткости $[K_{\Sigma}]$ для модели пластины, имеющую размерность $3R_{\Sigma} \times 3R_{\Sigma}$ (R_{Σ} — число свободных узлов модели). Эта матрица обладает такой же блочной структурой, что и соответствующие матрицы отдельных элементов. Уравнение статического прогиба модели пластины под действием обобщенных сил Q_{Σ} , приложенных в узловых точках, будет

$$[K_{\Sigma}] q_{\Sigma} = Q_{\Sigma}. \quad (10)$$

Здесь $q_{\Sigma} = \begin{Bmatrix} W_{\Sigma} \\ \varphi_{\Sigma} \\ \vartheta_{\Sigma} \end{Bmatrix}$ — вектор обобщенных координат модели, имеющий $3R_{\Sigma}$ компонент.

Решение матричного уравнения (10) совместно с граничными условиями, записанными для обобщенных координат и сил в закрепленных узлах, дает полное описание деформированного состояния модели из конечных элементов. Вместе с тем, при расчете конкретных корректоров порядок алгебраической задачи (10) может оказаться чрезмерно большим, даже если используются современные ЭВМ. Например, при довольно грубой сетке разбиения квадратной пластины на 8×8 элементов число свободных узлов будет порядка 80, а размерность матрицы жесткости модели соответственно составит 240×240 .

Порядок алгебраической задачи можно существенно понизить, если воспользоваться предложенной в [3] процедурой редукции матрицы жесткости. Для этого предположим, что на модель действуют только поперечные (перерезывающие) внешние силы P_{Σ} , а внешние изгибающие моменты отсутствуют. Тогда переменные φ_{Σ} и ϑ_{Σ} не будут независимыми, и их можно исключить. Уравнение изгиба модели пластины примет при этом вид

$$[K_R] W_{\Sigma} = P_{\Sigma}, \quad (11)$$

где

$$[K_R] = ([K_{\Sigma}^{Pw}] - [K_{\Sigma}^{P\varphi}] [K_{\Sigma}^{N\varphi}]^{-1} [K_{\Sigma}^{P\varphi}]^T) - \\ - ([K_{\Sigma}^{P\vartheta}] - [K_{\Sigma}^{P\varphi}] [K_{\Sigma}^{N\varphi}]^{-1} [K_{\Sigma}^{N\vartheta}]) ([K_{\Sigma}^{T\vartheta}] - [K_{\Sigma}^{N\vartheta}] [K_{\Sigma}^{N\varphi}]^{-1} [K_{\Sigma}^{N\vartheta}]^T)^{-1} \times \\ \times ([K_{\Sigma}^{P\vartheta}]^T - [K_{\Sigma}^{N\vartheta}] [K_{\Sigma}^{N\varphi}]^{-1} [K_{\Sigma}^{P\varphi}]^T)$$

— редуцированная матрица жесткости, имеющая размерность $R_{\Sigma} \times R_{\Sigma}$.

На практике задачу о расчете деформаций корректора удобнее поставить следующим образом. Пусть нам заданы поперечные смещения зеркала в некоторых точках (там, где расположены управляющие приводы). Требуется найти смещения зеркала во всех остальных точках. При такой постановке задачи целесообразно изменить порядок компонент векторов W_{Σ} , P_{Σ} и представить их в виде

$$W_{\Sigma} = \begin{Bmatrix} W_f \\ W_k \end{Bmatrix}, \quad P_{\Sigma} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P_k \end{Bmatrix}, \quad (12)$$

где W_f — смещения зеркала в узлах, свободных от внешних нагрузок, W_k, P_k — соответственно заданные смещения зеркала в управляемых точках и приложенные в них силы. После перестановки строк и столбцов матрицы $[K_R]$ можно переписать уравнение (11) следующим образом:

$$[K_{ff}] W_f + [K_{fk}] W_k = 0, \quad (13)$$

$$[K_{kf}] W_f + [K_{kk}] W_k = P_k.$$

Из верхнего уравнения системы (13) получаем явное выражение для смещений зеркала в свободных узлах:

$$W_f = -[K_{ff}]^{-1} [K_{fk}] W_k, \quad (14)$$

Нижнее уравнение (13) дает значения сил P_k , которые нужно приложить в управляемых точках для того, чтобы в них возникли смещения W_k .

Поскольку задача о распространении светового пучка обычно решается на гораздо более мелкой сетке, чем задача о деформациях зеркала, задающего фазу пучка, для сопряжения оптической и упругой части используется интерполяция прогиба зеркала между узлами с помощью полиномов Лагранжа.

2. Оптимизация размера зеркала и расположения сервоприводов.

Развитая расчетная схема может быть применена для анализа ряда задач, представляющих интерес при проектировании адаптивных оптических систем. К ним относятся, в первую очередь, оптимизация расположения сервоприводов и выбор оптимального размера зеркала.

При расчетах будем предполагать, что фазовый корректор представляет собой квадратное зеркало, шарнирно закрепленное в центре и деформируемое системой четырех поперечных сил, точки приложения

которых расположены симметрично на некотором расстоянии r от центра (рис. 1).

В адаптивных системах обычно используют коллимированные пучки, падающие на управляемое зеркало под углом, мало отличающимся от прямого. В этом случае после отражения от зеркала, имеющего прогиб $W(x, y)$, пучок приобретает фазу $\varphi(x, y) = 2kW(x, y)$ (k — волновое число).

Пренебрегая дифракцией пучка на свободном отрезке от зеркала до входа в нелинейную среду ($z=0$), можно приближенно записать начальное распределение комплексной амплитуды электрического поля E в виде

$$E(x, y, 0) = E_0(x, y) \exp(2ikW(x, y)), \quad (15)$$

где $E = E(x, y, z)$, z — продольная координата, $E_0(x, y)$ — амплитудный профиль пучка. Для описания распространения пучка будем использовать квазиоптическое приближение теории дифракции, согласно которому

$$2ik \frac{\partial E}{\partial z} = \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + k^2(\tilde{\epsilon} + \epsilon_{NL})E, \quad (16)$$

где $\tilde{\epsilon}$ — естественные флуктуации диэлектрической проницаемости, вызванные турбулентностью среды, ϵ_{NL} — возмущения диэлектрической проницаемости, индуцируемые пучком.

Оптимизацию корректора проведем для случая линейной однородной среды ($\tilde{\epsilon} = \epsilon_{NL} = 0$). Рассмотрим фокусировку гауссова пучка на трассе длиной $z_0 = 0,25 ka_0^2$. Максимизацию освещенности в точке с координатами $x=y=0$, $z=z_0$ будем проводить посредством процедуры «восхождения на холм». Эта процедура проводится путем варьирования управляемых координат для определения градиента целевой функции с последующим шагом в направлении градиента и продолжается вплоть до достижения максимума целевой функции. В качестве оптимизируемых параметров используются размер зеркала L_R и расстояние r от его центра до точки приложения каждой из четырех поперечных сил.

Результаты расчета фокусировки пучка приведены на рис. 2—4. Там представлены зависимости пиковой интенсивности I_m в плоскости

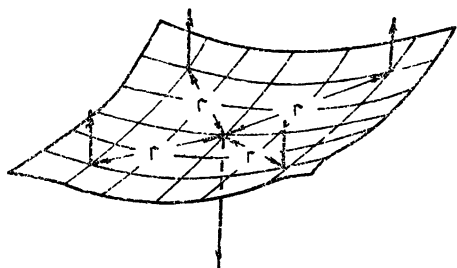


Рис. 1.

$z_0 = 0,25 ka_0^2$, нормированной на дифракционно ограниченное значение I_d (рис. 2); и смещения пластины в точках приложения сил W_x , нормированного на длину волны излучения λ (рис. 3), от расстояния r , нормированного на начальный радиус пучка a_0 . Разные кривые на графиках соответствуют различным значениям размера зеркала $L_R = 5; 10; 15 a_0$. На рис. 4 изображены линии равного смещения зеркала (а) и дифракционная картина в фокальной плоскости (б), полученные при одной из конфигураций сервоприводов, использовавшихся в расчете.

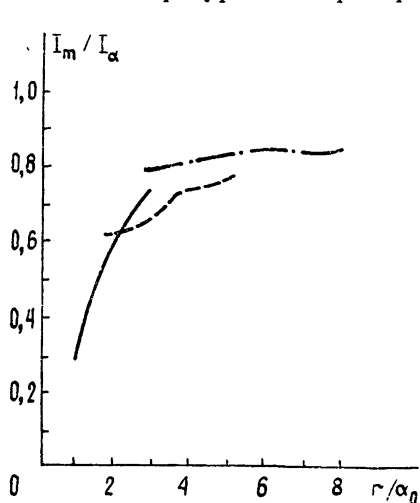


Рис. 2.

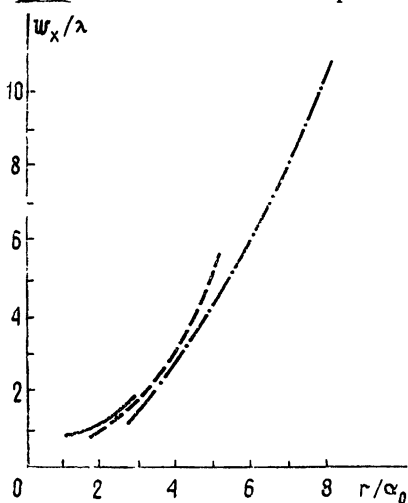
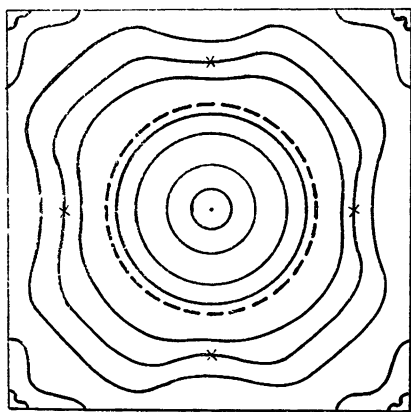
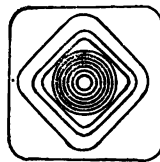


Рис. 3.

Начальный размер гауссова пучка по уровню $1/e$ показан штриховой линией, точки приложения сил помечены крестиками.



а)



б)

Рис. 4.

Анализ полученных результатов позволяет установить оптимальные соотношения r/a_0 и L_R/a_0 при известной величине W_x/λ . В дальнейших расчетах будем использовать следующие значения: $L_R = 10a_0$, $r = 4a_0$.

3. Оценка предельных возможностей фокусировки в неоднородной и нелинейной среде. Для организации процедуры управления пучком, распространяющимся в случайно-неоднородной или нелинейной среде, вместо пиковой интенсивности удобно использовать в качестве целевой функции критерий фокусировки [4]

$$J_f = \iint_{-\infty}^{+\infty} \rho(x, y) I(x, y, z_0) dx dy, \quad (17)$$

где $\rho(x, y)$ — апертурная функция объекта фокусировки, описывающая область концентрации поля в плоскости $z=z_0$. В работе принято следующее выражение для апертурной функции:

$$\rho = \exp(-(x^2+y^2)/a_0^2).$$

Флуктуации диэлектрической проницаемости $\tilde{\epsilon}(x, y, z)$ в случайно-неоднородной среде моделируются набором фазовых экранов, расположенных вдоль по трассе [5]. На каждом экране задается случайное поле $\tilde{\epsilon}_j(x, y)$, имеющее гауссову корреляционную функцию с радиусом корреляции $r_{\text{кор}}$ и дисперсией флуктуаций σ_ϵ^2 ($j=1, \dots, N_z, N_z$ — число шагов интегрирования по z). В работе использованы следующие значения параметров: $r_{\text{кор}}=1,25a_0$, $\sigma_\epsilon^2 = 0,15 \epsilon_0/(k^2 a_0^2)$, $N_z=10$ (ϵ_0 — невозмущенная диэлектрическая проницаемость среды). При таких значениях $r_{\text{кор}}$ и σ_ϵ^2 в фазе пучка преобладают искажения с масштабом порядка его радиуса, а ожидаемый эффект — турбулентное уширение — проявляется достаточно ярко. Исследования выполнены для гауссова пучка малой мощности ($\epsilon_{NL}=0$) на трассе $z_0=0,5ka_0^2$. Результаты оптимизации фазы пучка посредством процедуры восхождения на холм при «замороженных» неоднородностях среды для трех реализаций случайных экранов приведены в табл. 1. Рассмотрены следующие способы управления фазой пучка: а) неадаптивная фокусировка в плоскость $z_0 = 0,5ka_0^2$, б) фокусировка упругим зеркалом, в) апертурное зондирование без ограничений на волновой фронт [6], г) зондирование по шести полиномам Цернике [7]. Значения целевой функции (критерия фокусировки J_f) в таблице нормированы на полную мощность пучка W_0 , пиковой интенсивности I_m — на входную пиковую интенсивность I_0 .

Таблица 1

Сравнительные данные по фокусировке гауссова пучка в линейной случайно-неоднородной среде

Номер реализации	Параметры излучения при $z_0 = 0,5ka_0^2$	Управление фазой пучка			
		(а)	(б)	(в)	(г)
1	J_f/W_0	0,72	0,73	0,79	0,75
	I_m/I_0	3,27	3,76	4,06	3,91
2	J_f/W_0	0,57	0,60	0,64	0,61
	I_m/I_0	2,76	3,28	3,45	3,37
3	J_f/W_0	0,64	0,66	0,70	0,68
	I_m/I_0	2,98	3,48	3,72	3,60

Рассмотренный пример носит иллюстративный характер, поскольку проведение статистического анализа в полном объеме затруднительно из-за больших вычислительных затрат. Вместе с тем при распространении пучка через набор не коррелированных между собой фазовых экранов происходит естественное усреднение неоднородностей фазы. Поэтому анализ таблицы позволяет сделать некоторые общие выводы. В частности, видно, что основной вклад в концентрацию поля на объекте дают низшие абберации волнового фронта пучка. В самом деле, сравнение двух последних колонок таблицы показывает, что для управления без ограничений на волновой фронт (колонка в) и с ограничениями по шести полиномам Цернике (колонка г) различие по критерию фокусировки не превышает 6%, а по пиковой интенсивности — 3%. Поэтому весьма эффективным оказывается также управление по модам упругого зеркала с помощью четырех приводов (колонка б). Влияние высших аббераций на энергетические характеристики пучка оказывается в рассматриваемом случае несущественным.

Оценки предельных возможностей управления мощными пучками проведены на примере стационарного теплового самовоздействия в движущейся регулярной среде ($\varepsilon=0$). В этом случае

$$\varepsilon_{NL} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} T,$$

причем для возмущений температуры среды T , вызванных поглощением световой энергии, справедливо уравнение

$$\rho C_p V \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha I, \quad (18)$$

где ρC_p — теплоемкость единицы объема среды, V — ее скорость (направленная по оси Ox в положительном направлении), α — коэффициент молекулярного поглощения.

Количественной мерой нелинейных искажений пучка на трассе является параметр нелинейности

$$R_V = \frac{2k^2 a_0^3 \alpha (\partial n / \partial T)}{\rho C_p V n_0} I_0, \quad (19)$$

пропорциональный мощности излучения $I_0 a_0^2$ и времени взаимодействия излучения со средой a_0/V .

Для медленных систем фокусировки излучения [8] управление фазой пучка на каждом итерационном шаге осуществляется по установившемуся полю в среде. Поэтому, как и в линейной среде, поиск градиента целевой функции может быть проведен с помощью метода пробных вариаций управляемых координат. При этом предполагается, что время между двумя последующими коррекциями волнового фронта таково, что в среде успевает установиться стационарное тепловое поле.

Таблица 2

Сравнительные данные по фокусировке гауссова пучка в нелинейной среде

Параметр нелинейности R_V	Параметры излучения при $z_0 = 0,5ka_0^2$	Управление фазой пучка			
		(а)	(б)	(в)	(г)
-14	J_f/W_0	0,48	0,53	0,49	0,51
	I_m/I_0	1,09	1,84	1,17	1,22
-20	J_f/W_0	0,39	0,47	0,40	—
	I_m/I_0	0,85	1,80	0,87	—
-28	J_f/W_0	0,32	0,35	0,32	0,32
	I_m/I_0	0,67	1,09	0,65	0,67

Результаты оптимизации фокусировки гауссова пучка упругим зеркалом посредством процедуры восхождения на холм при разных значениях параметра нелинейности R_V приведены в табл. 2 (колонка а). Для сравнения там же представлены данные, полученные при моделировании алгоритма оптимального управления [4] (колонка б), апертурного зондирования по шести полиномам Цернике [7] (колонка в) и зондирования по углу наклона и радиусам кривизны волнового фронта (трехэлементный корректор [9], колонка г).

Из табл. 2 видно, что, как и в случае линейной случайно-неоднородной среды, концентрация поля на объекте достигается в основном за счет управления низшими абберациями волнового фронта. Применение простого корректора в виде упругого зеркала, управляемого в четырех точках, позволяет достаточно эффективно компенсировать тепловую дефокусировку.

Развитая в работе методика позволяет построить расчетную модель достаточно сложного фазового корректора практически любой геометрической формы с самыми разнообразными условиями закрепления. Совместное применение методов теории упругости и квазиоптического приближения теории дифракции существенно расширяет возможности численного моделирования при проектировании и исследовании адаптивных оптических систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Огибалов П. М. Изгиб, устойчивость и колебания пластинок. — М.: Гос. ун-т, 1958.
2. Zienkiewicz O. C. The finite element method in structural and continuum mechanics. — N. Y.: Mc Graw-Hill, 1967.
3. Vysloukh V. A., Kandidov V. P., Chesnokov S. S. — Internat. J. Numer. Meth. Engng., 1973, 7, p. 185.
4. Воронцов М. А., Чесноков С. С. — Изв. вузов — Радиофизика, 1979, 22, № 11, с. 1318.
5. Кандидов В. П. — Изв. АН СССР, Сер. Физическая, 1985, 49, № 3, с. 442.
6. Воронцов М. А., Чесноков С. С. — Изв. вузов — Радиофизика, 1982, 25, № 11, с. 1310.
7. Чесноков С. С. Тезисы докладов XII Всесоюзной конференции по когерентной и нелинейной оптике. — М.: Гос. ун-т, 1985, ч. I, с. 127.
8. Ахманов С. А. и др. — Изв. вузов — Радиофизика, 1980, 23, № 1, с. 3.
9. Чесноков С. С. — Квантовая электроника, 1983, 10, № 6, с. 1160.

Московский государственный
университет

Поступила в редакцию
19 ноября 1985 г.

FOCUSING OF LIGHT BEAMS BY ELASTIC DEFORMABLE MIRRORS

S. S. Chesnokov

A finite element model of elastic mirror deformed by transverse forces applied at given points is developed. A phase corrector of the square form supported in the center and deformed by four forces is considered. Optimization of the mirror size and shaker configuration is carried out. The mirror applicability for correction of phase distortion of light beams propagating in random and nonlinear media is investigated
