

УДК [512.86+530.17]: 583.3

## НЕОДНОЗНАЧНОСТИ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ В МАКРОЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ. СФЕРИЧЕСКИЕ И ТОРОИДАЛЬНЫЕ ИСТОЧНИКИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ\*

(Обзор)

*M. A. Миллер*

### Содержание

1. О прямых и обратных задачах вообще
2. Обратные задачи в электродинамике
3. Самоэкранировка
4. Зарядовые и беззарядовые источники
5. Одномерная статика
6. Двумерная статика
7. Трехмерная статика
8. Взаимоподменяемость источников
9. Самоэкранировка для переменных процессов
10. Еще один переход к статике
11. Итак, три источника и три составных части
12. И что же отсюда может следовать?

### 1. О ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ВООБЩЕ

Обычно прямые задачи состоят в отыскании следствий по заданным причинам, а обратные — причин по следствиям. Для нестационарных процессов причинно-следственная направленность определяется критерием «до → после», а для стационарных такие признаки, строго говоря, отсутствуют, и установление нужного направления до некоторой степени условно. Так, в макроэлектродинамике источниками поля являются заряды и токи, а в макромеханике причины изменения движения объектов, которые могут быть носителями этих зарядов и токов, ассоциируются с приложенными к ним силами, т. е., в частности, с теми же полями, действующими на заряды и токи. Поэтому в самосогласованных ситуациях (естественных в естественных условиях), когда имеет место совместно взаимодействующее движение электромагнитных полей и динамических объектов, приходится постулировать определенный порядок обусловленностей, руководствуясь какими-нибудь «здравыми принципами соответствия». Например, вполне очевидной (хотя бы опираясь на память о нестационарных процессах) кажется такая направленность: заряды и токи → поля → силы → движение носителей → заряды и токи и т. д. Будем называть этот порядок прямым и потому квалифицировать задачи как прямые, если исковые величины расположены в этой цепочке вслед за заданными. Однако поскольку она замкнута, то можно говорить о «до—после» только по отношению к ее отдельным фрагментам. Например, нахождение характера движения по приложенными силам или сил (полей) — по зарядам и токам — это прямые задачи, а отыскание сил по движению или зарядов и токов по полям — это обратные задачи. Но если все же какая-то недоговоренность остается (или покажется, что осталась), то, наверное, следует просто принять выбор направления «стрелы событий» без обсуждения — как некое указание сверху.

\* Статья представляет собой журнальный вариант лекции, прочитанной перед участниками научной студенческой конференции радиофизического факультета Горьковского государственного университета им. Н. И. Лобачевского в апреле 1985 года.

## 2. ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ В МАКРОЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Итак, прямые задачи электродинамики (далее всюду речь будет идти только о макроэлектродинамике, опирающейся на уравнения Максвелла) состоят в вычислении полей по заданным зарядам и токам. Это могут быть электрические заряды и токи с плотностями  $\rho^e$  и  $j^e$  или магнитные заряды и токи с плотностями  $\rho^m$  и  $j^m$ .

Как хорошо известно, в макроэлектродинамике можно и даже удобно придавать уравнениям Максвелла дуально (двойственno) симметричную форму, не оглядываясь на характер реальных микроисточников: переход от полей, создаваемых электрическими макрозарядами и токами ( $E^e, H^e, D^e, B^e, j^e, \rho^e$ ), к полям магнитных макрозарядов и токов ( $E^m, H^m, D^m, B^m, j^m, \rho^m$ ) производится простыми переобозначениями соответствующих величин, осуществлямыми только внутри области сосредоточения источников:

$$\begin{aligned} B^e &= B^m + 4\pi P^m, \quad D^e = D^m - 4\pi P^e, \quad H^e = H^m, \quad E^e = E^m, \\ \rho^{(e)}_m &= -\nabla \cdot P^{(e)}_m, \quad j^{(e)}_m = \partial P^{(e)}_m / \partial t. \end{aligned} \quad (1)$$

Принцип перестановочной двойственности, или дуальности, утверждает инвариантность уравнений Максвелла относительно замены ( $E^e \rightarrow H^m, H^e \rightarrow -E^m, D^e \rightarrow D^m, B^e \rightarrow B^m, \rho^e \rightarrow \rho^m, j^e \rightarrow j^m, \rho^m \rightarrow -\rho^e, j^m \rightarrow -j^e$ ); далее эту операцию мы будем обозначать как ( $e \rightleftarrows m$ ). Источники (1) автоматически удовлетворяют уравнению непрерывности

$$\nabla \cdot j^{(e)}_m + \partial \rho^{(e)}_m / \partial t = 0, \quad (2)$$

но несколько усложненно описывают системы с отличным от нуля монопольным моментом (суммарным зарядом), потому что для этого приходится выстраивать «струну диполей» и уносить второй ее конец на бесконечность.

В принципе даже в макроописании можно считать зарядовые источники ( $\rho$ ) первичными, а токовые ( $j$ ) — вторичными, ассоциируя их с перемещением зарядов ( $j = \rho u$ ), т. е. опираться на гидродинамический вариант лоренцевой электродинамики; тогда соотношение (2) обретает смысл закона сохранения заряда! Однако вполне допустимо не прибегать к модельным представлениям, а трактовать и заряды и токи как вполне самостоятельные «феноменологические сущности», но не независимые друг от друга, а связанные уравнением (2), причем связанные даже тогда, когда они создаются извне («руками»), ибо в противном случае уравнения Максвелла окажутся неразрешаемыми.

Дальше почти всюду речь будет идти для простоты о вакууме или о вакуумоподобных средах, в этом случае ( $B = H, D = E, \epsilon = \mu = 1$ ) решения прямых задач ( $\rho, j \rightarrow E, H$ ) достаточно подробно изучены: они не доставляют никаких хлопот кроме вычислительных и интерпретационных. Иначе обстоит дело с задачами обратными ( $E, H \rightarrow \rho, j$ ): они либо предельно просты — их решения сводятся к простому дифференцированию, это — когда поля заданы во всех точках пространства, либо уж очень сложны, обладают бесконечно значимыми решениями и, вообще говоря, не имеют общих алгоритмов подхода к ним, это — когда области задания полей и источников «разнообъемны», например поля известны только вне некоторого объема  $V$  (особые усложнения возникают, если он многосвязный), а источники сосредоточены внутри  $V$ . Получается задача о «черном ящике» с неизвестными зарядами и токами внутри, т. е. разновидность обширного класса диагностических проблем, встречающихся во многих физических (и не только физических) исследованиях, где требуется понять, как могут быть устроены источники, не имея доступа к месту их размещения. Правда, разновидность достаточно «безподвохная», поскольку поля вне  $V$  предполагаются сразу же заданными «разумно», т. е. реализуемыми физическими средствами без каких-либо математических подгонок и аппроксимаций. Ко-

нечно, это не самая насущная из обратных задач, подсказываемых большими и малыми нуждами приложений. Часто требуется обеспечить вне  $V$  распределение потоков энергии или плотностей энергии или напряжений или других комбинаций полей безразлично к тому, какие конкретно поля привлекаются для этих целей. И тогда появляется важнейший предфактор — установление критериев осуществляемости задания, который в «правильных» задачах соблюдается само собой.

И, наконец, еще одно замечание. Выше говорилось про поля вне  $V$  и про источники внутри  $V$ . Но возможно и «обращение» обратных задач, когда поля заданы внутри  $V$ , а источники — вне. Такие ситуации не менее резонны как при общем рассмотрении вопроса, так и в прикладных делах (создание полей, обеспечивающих требуемое движение частиц в электронно-оптических системах и т. п.).

### 3. САМОЭКРАНИРОВКА

Как правило, обратные задачи решаются неоднозначно. И простейшие из них с осуществляемо заданными полями не составляют исключения. Можно даже выделить множество ветвей, в каждой из которых имеется неограниченное число взаимно сводящихся (и в этом смысле зависимых) решений.

Несмотря на известность или очевидность методов построения таких ветвей, мы позволим себе сделать некоторые повторы с тем, чтобы потом естественным образом перейти к неожиданностям.

Будем называть распределение источников внутри  $V$  самоэкранированным, если создаваемое им поле всюду вне  $V$  равно нулю. Существование таких решений доказывается формально математически. Но, пожалуй, более выразительным является способ физического конструирования самоэкранированных распределений, позволяющий убедиться в достоверности теоремы еще до (и даже без) ее доказательства. В духе одного из наставлений Д. Пойа.

Пусть внутри  $V$  расположены произвольным образом заряды и токи  $\rho^e(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{j}^e(\mathbf{r}, t)$ , нигде не соприкасающиеся с поверхностью  $S$ , облегающей  $V$  (в крайнем случае,  $S$  можно слегка отодвинуть). Мысленно покроем  $S$  идеально проводящей пленкой, на которой  $E_{\text{тан}} = 0$ . Такая пленка является идеальным (электрическим) экраном: поля, создаваемые источниками  $\rho^e(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{j}^e(\mathbf{r}, t)$ , не выходят за пределы  $S$ . Следовательно, индуцированные на  $S$  поверхностные заряды и токи  $\rho_{\text{пов}}^e(r_s, t)$ ,  $\mathbf{j}_{\text{пов}}^e(r_s, t)$  в точности компенсируют поля, создаваемые вне  $V$  источниками  $\rho^e(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{j}^e(\mathbf{r}, t)$ . Их совместное распределение (пленка уже не нужна) будет самоэкранированным. Отсюда вытекает один из вариантов формулировки принципа Гюйгенса—Кирхгофа (теорема Лава): поле вне  $V$ , производимое источниками  $\rho^e(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{j}^e(\mathbf{r}, t)$ , расположеными внутри  $V$ , может быть создано эквивалентными источниками —  $\rho_{\text{пов}}^e(r_s, t)$ ,  $-\mathbf{j}_{\text{пов}}^e(r_s, t)$ , расположенными на охватывающей  $V$  поверхности  $S$ . Двойственная операция ( $e \rightleftharpoons m$ ) дает еще одно самоэкранированное распределение  $\rho^{(e)}(r, t) + \rho_{\text{пов}}^{(e)}(r_s, t)$ ,  $\mathbf{j}^{(e)}(r, t) + \mathbf{j}_{\text{пов}}^{(e)}(r, t)$ . Кроме того, возможны комбинации: объемные электрические токи экранируются поверхностными магнитными (заменяющими действие идеального магнитного экрана  $H_{\text{тан}}|_S = 0$ ) и т. д.

В обращенном варианте, когда источники размещены вне  $V$ , вся схема физконструирования самоэкранированных решений остается пригодной, но сами решения могут принципиально различаться. Фактически они основываются на двух прямых задачах о возбуждении полей сторонними токами в дополнениях друг друга объектах: в эндовоибраторе и экзовоибраторе с идеальными границами. В первом случае (при отсутствии потерь энергии на уход в тепло или на возврат в источники) поле представляется набором дискретных мод, причем строго на собственных частотах ( $\omega = \omega_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ) может быть осуществлено самоэкранирование с помощью чисто поверхностных источников

$\rho_{\text{пов}}^{(e)}(r_s) e^{i\omega_n t}$ ,  $j_{\text{пов}}^{(e)}(r_s) e^{i\omega_n t}$ . В случае же экзовибратора почти всегда имеются потери на излучение, и самоэкранирование внутренней области поверхностными источниками на границе возможно только для затухающих собственных колебаний. Как обычно, переход к статике ( $\omega_n \rightarrow 0$ ) требует особого рассмотрения, что и будет сделано чуть позже.

Пока речь шла только о строгом экранировании, присутствие поверхностных источников в той или иной их модификации было необходимо, поскольку переход из одной области (где поле тождественно обращается в нуль) в другую (где оно отлично от нуля) должен сопровождаться скачками либо самого поля, либо его пространственных производных (хотя бы дальних\*).

Однако существуют многочисленные распределения с приближенным самоэкранированием источников, достаточно плавно размазанных по объему. По существу своему описанный выше метод физконструирования может быть распространен на любые системы с локализованными или квазилокализованными полями — будь то слои с неоднородными проницаемостями, поддерживающие поверхностные волны, или объемы, покрытые оболочками с мнимыми показателями преломления  $\sqrt{\epsilon} = i |\sqrt{\epsilon}|$  (типа закритической плазмы) и т. п. Способ «паразитирования» на таких решениях элементарен, среда «убирается», а ее действие заменяется, согласно (1), эквивалентными токами  $j^{(e)}_m = \partial P^{(e)} / \partial t$ ,  $j^{(m)}_m = c \nabla \times P^{(m)}$  (где  $P^e$  и  $P^m$  — векторы электрической и магнитной поляризаций). Такие системы, однако, обладают утечкой (туннельным просачиванием поля через запирающий слой), и поэтому соответствующие распределения токов дают лишь приближенную самоэкранировку.

#### 4. ЗАРЯДОВЫЕ И БЕЗЗАРЯДОВЫЕ ИСТОЧНИКИ

Решение любой обратной задачи так или иначе предусматривает знание решений прямых задач. Последние различаются по типам источников. Для любых случаев (кроме зарядовой статики ( $\partial/\partial t \rho^{(e)} = 0$ )) классификацию можно производить, основываясь на свойствах токов  $j^{(e)}_m(r, t)$ , считая заряды производными, определяемыми из (2) опять-таки с точностью до временной постоянной. В этом отношении макроэлектродинамика даже как бы отвлекает от первородности зарядов в микромоделях, усреднением которых она может быть выведена.

Согласно известной теореме векторного анализа, которой фактически пользовался еще Максвелл [4], хотя ее первая «официальная» формулировка «закреплена» за Гельмгольцем [5], произвольное векторное поле представляется суммой потенциального и вихревого; для токовых полей мы примем такие обозначения:

$$j^{(e)}_m = c \nabla \psi^{(e)}_m + c \nabla \times P^{(e)}_m. \quad (3)$$

Здесь электродинамическая постоянная  $c$  введена для «выравнивания размерностей». Представление (3) разделяет поля неоднозначно: функцию  $c \nabla f = -c \nabla \times F (\Delta f = 0)$  можно перебрасывать из потенциальной части в вихревую и обратно. Кроме того, (3) допускает неограниченно усложненные перепредставления вида  $\nabla(\nabla \cdot) \nabla(\nabla \cdot) \dots$  (для потенциальных частей) и  $(\nabla \times)(\nabla \times)(\nabla \times) \dots$  (для вихревых частей), так что решение вопроса о том, сколько и каких токовых потен-

\* Свойства локализованных полей вполне корректно сопоставляются со свойствами сигналов при переходе в движущуюся систему отсчета локализованный «сгусток поля» превращается в импульсный сигнал с неаналитическим передним фронтом, впрочем, и задним тоже.

циалов разумно привлекать, зависит от конкретной ситуации, определяемой мультипольной структурой источников\*.

Вихревые и потенциальные компоненты токов, как известно, создают качественно различные поля. Потенциальные токи не порождают полей излучения в вакуумно-подобных средах (т. е. TE-, TM-, TEM-мод или полей поперечного типа): электрические потенциальные токи возбуждают безмагнитные поля ( $j_{\text{пот}}^e \rightarrow E$ ), а магнитные токи — безэлектрические ( $j_{\text{пот}}^m \rightarrow H$ )\*\*. Поэтому такие источники не без основания называют зарядовыми, поскольку в пределе  $\partial/\partial t \rightarrow 0$  производимые ими поля вырождаются в поля зарядовых электро- и магнитостатик. Справедливо и обратное: зарядовая статика порождает потенциальные токовые источники по рецепту

$$j^{(e)}_{(m)} = c\nabla\psi^{(e)}_{(m)}, \quad \Delta\psi^{(e)}_{(m)} = -\partial\rho^{(e)}_{(m)}/c\partial t. \quad (4)$$

Что касается вихревых компонент, то они, естественно, являются беззарядовыми ( $\partial\rho^{(e)}_{(m)}/\partial t = 0$ ) и описываются двумя скалярными функциями, поскольку на три их компоненты наложена одна связь ( $\nabla \cdot j^{(e)}_{(m)} = 0$ ). Согласно представлению Гельмгольца — Неймана [2,5] эти две функции  $\chi(r, t)$  и  $\eta(r, t)$  полезно выбирать так, чтобы

$$j^{(e)}_{\text{вих}} = c\nabla \times (r\chi) + c\nabla \times (\nabla \times r\eta). \quad (5)$$

Таким образом, произвольный источник электромагнитного поля задается тремя скалярами  $\Psi$ ,  $\chi$ ,  $\eta$ , что находится в полном согласии с проблемой замыкания уравнений Максвелла [9]: поле вне области источников (сторонних и индуцированных) описывается двумя скалярами, а внутри — тремя. Соотношения (2) — (5) позволяют распорядиться этими скалярами с выгодой для модельных представлений и построения наиболее элементарных самоэкранированных источников.

## 5. ОДНОМЕРНАЯ СТАТИКА

Статические системы (а под таковыми понимаются системы, в которых и поля, и источники не зависят от времени:  $\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$ ,  $\frac{\partial j}{\partial t} = 0$ ,  $\frac{\partial E}{\partial t} = 0$ ,  $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ ) во многих отношениях особенны. Прежде всего зарядовые и токовые (а для статики это чисто скалярные и чисто векторные) источники можно рассматривать раздельно. Во-вторых, эти источники взаимозаменяемы (факт, известный еще со времен Ампера); это значит, что никакими измерениями вне  $V$  нельзя отличить зарядовый диполь от токового, если первый создается зарядами  $\rho^{(e)}_{(m)}$ , а второй — вихревыми токами  $j^{(e)}_{(m)}$ . И любой мультиполь тоже. Только токовый монополь имеет подводимую к объему извне «струну диполей», названную в [3] потоководом. В классическом «изготовлении», в отличие от «струны Дирака» [10], она естественным образом может быть засечена. Наконец, поля статических источников достаточно хорошо локализованы, просты и наглядны, что делает возможным сравнительно легко прослеживать их качественные изменения при деформациях области источников.

\* Достаточно полная информация о разложении произвольных распределений векторных источников по полной системе мультиполей содержится в книгах [5—7], а также в обзорной статье [2], где дано фактически исчерпывающее изложение этого вопроса применительно к соответствующим задачам классической и квантовой электродинамики.

\*\* Разумеется, при наличии пространственной дисперсии ситуация меняется: потенциальные токи могут порождать поля излучения, обязаные продольным (потенциальным) волнам [8].

Будем для определенности иметь дело пока только с «е-системами», держа на вооружении дуальное преобразование ( $e \rightleftharpoons m$ ). В одномерной статике элементарным источником является одиночная заряженная плоскость  $\rho = \rho_{\text{пов}} \delta(x)$  (индекс «е» временно опускаем), создающая антисимметричное поле  $E = -\nabla \varphi$ ,  $\varphi = -2\pi \rho_{\text{пов}} |x|$  (это — функция Грина для идеальной «математической» струны). В свободном пространстве вне области источников никакого иного поля, кроме однородного, быть не может. Оно — единственное осуществимое, и потому обратная задача решается универсально, но, конечно, с точностью до самоэкранированных распределений. Они тоже просты. Обычный плоский конденсатор с зарядами  $\pm \rho_{\text{пов}}$  на обкладках и с зазором  $\Delta x$  между ними дает нужное решение. В пределе — это одномерный точечный диполь  $\rho = -p_{\text{пов}} \nabla \delta(x)$ , где  $p_{\text{пов}} = \rho_{\text{пов}} \Delta x \rightarrow \text{const}$  ( $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\rho_{\text{пов}} \rightarrow \infty$ ). Система легко симметризуется: два конденсатора с одной общей пластиной (параллельное соединение емкостей) в пределе дают плоский квадруполь\*:

$$\rho = D_{\parallel} \frac{\partial^2 \delta(x)}{\partial x^2} = D_{\parallel} \Delta_{\parallel} \delta(x), \quad D_{\parallel} = (\rho_{\text{пов}} \Delta x) \Delta x = p_{\text{пов}} \Delta x = \text{const} \quad (6)$$

и т. д. Тем самым построение зарядового самоэкранированного распределения завершено. Оно может обладать очень изрезанной тонкой внутренней структурой, но все эти разновидности источников относятся к одной и той же ветви неоднозначности. Кстати, порождаемые такими источниками в переменном случае токи будут тоже локализованы по тем же правилам:  $dj_x/dx = -\partial\rho/\partial t$ .

Мы решились воспроизвести это элементарное построение только потому, что в нем фактически заложены почти все основные свойства двумерных и трехмерных систем, так что если подходить к ним, отправляясь от одномерных, то некоторые их «странные черты» будут выглядеть более или менее очевидными.

## 6. ДВУМЕРНАЯ СТАТИКА

Двухмерный объем  $V$  — это цилиндр произвольного сечения, в простейшем случае — кругового. Переход от плоского листа к круговому цилиндуру («операцию цилиндризации») можно рассматривать как топологическое свертывание большого прямоугольника со склеиванием двух противоположных краев и растяжением вдоль образующих (см. рис. 1). Причем плоский лист, обладавший антисимметричным двухсторонним полем при таком свертывании, «теряет» внутреннее поле и становится источником с односторонним полем. Можно сказать, что такие правила преобразования, но вся эта мысленная процедура имеет и адекватный физический аналог. Если взять заряженный гибкий и растягивающийся проводящий лист и свернуть его в цилиндрическую трубку, то получится система с вытесненным полем изнутри (с точностью до краевых влияний), т. е. заряд распределится по периметру трубы так, что задача внутреннего самоэкранирования «решится автоматически»: для цилиндра кругового сечения это распределение с равномерной плотностью. Соответствующая трансформация плоского конденсатора в цилиндрический дает распределение, самоэкранированное по отношению и к внутренней, и к внешней областям. Сжатие в точечный (осевой) источник приводит к распределению

$$\rho = D_{\perp} \Delta_{\perp} \delta(r_{\perp}), \quad (7)$$

формально обобщающему квадрупольное распределение (6) на две переменные. Здесь  $D_{\perp} = (\rho_{\text{лин}} \Delta r) r_0 = p_{\perp} r_0 \rightarrow \text{const}$  (при  $r_0 \rightarrow 0$ ). Это —

\* Строго говоря, в одномерном случае нельзя говорить о разложении по полям внешних мультиполей, поскольку вне источников поле всегда одинаково однородно, т. е. соответствует только полю одномерного монополя. Поэтому такой двойной конденсатор сходен с квадруполем лишь по своему «внутреннему устройству», а не по создаваемым им внешним полям,

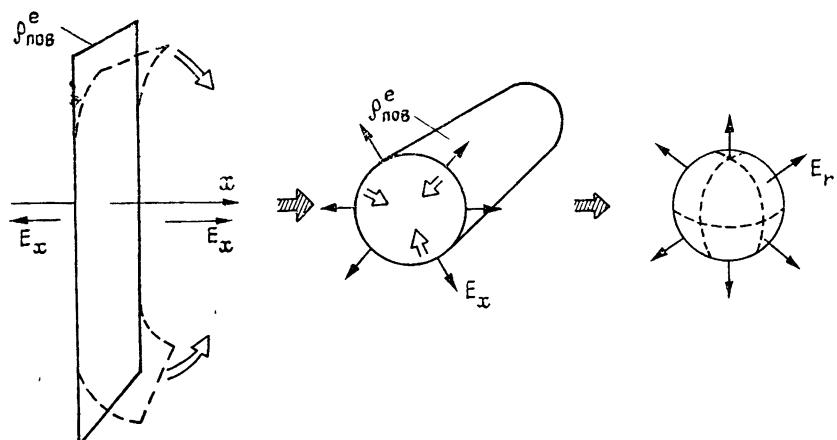


Рис. 1. Преобразование плоского заряженного листа в цилиндрический и сферический источники, самоэкранированные по отношению к внутренней области.

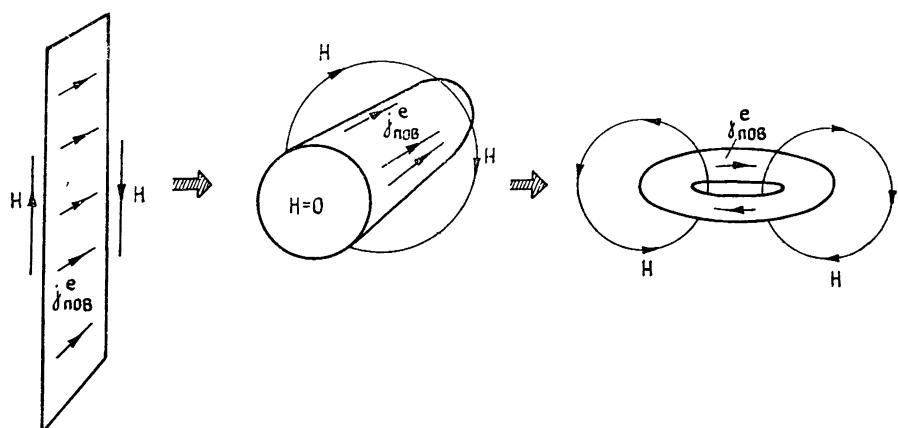


Рис. 2. Преобразование плоского токового листа в цилиндрические и тороидальные источники ( $\theta$ -мода), самоэкранированные по отношению к внутренней области.

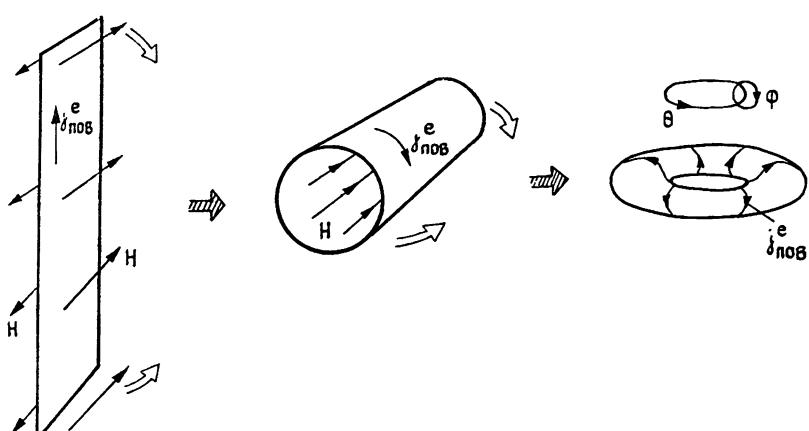


Рис. 3. Преобразование плоского токового листа в цилиндрические и тороидальные источники ( $\phi$ -мода), самоэкранированные по отношению к внешней области.

аксиально-симметричный аналог одномерного квадрупольного момента, введенного в разд. 5 с некоторыми оговорками. Объем произвольной формы может быть заполнен набором (дискретным или непрерывным) элементарных самоэкранированных источников типа (7) или в общем случае увит замкнутыми поверхностями, на которые уложены дипольные слои постоянной плотности  $p_{\text{пов}} = \text{const } \mathbf{n}$  ( $\mathbf{n}$  — нормаль к поверхности). Так конструируются точечные, поверхностные и объемные самоэкранированные зарядовые источники.

Сходные «преобразования цилиндризации» могут быть проделаны и с токовыми листами (см. рис. 2 и 3). В одномерной токовой статике (магнитостатике, если ток  $j \rightarrow j^e$ ) одиночный токовый лист  $j^e = j_{\text{пов}}^e \delta(x)$  создает антисимметричное постоянное магнитное поле  $\mathbf{H} = (2\pi/c) j_{\text{пов}}^e \times \times \mathbf{x}_0$  ( $2U(x) - 1$ ), где  $\mathbf{x}_0$  — единичный вектор вдоль  $x$ , а  $U(x)$  — ступенчатая функция ( $U'(x) = \delta(x)$ ).

Ток может течь по двум направлениям:  $\mathbf{y}_0$  и  $\mathbf{z}_0$ , что соответствует двум равноправным модам поля ( $j_z^e \rightarrow H_y$ ) и ( $j_y^e \rightarrow H_z$ ). Однако это вырожденное равноправие устраниется при свертывании плоского листа в цилиндр. Если скручивать лист в плоскости  $xy$ , оставляя  $z$ -направление параллельным оси цилиндра, то мода ( $j_z^e \rightarrow H_y$ ) превратится в ( $j_z^e \rightarrow H_\phi$ ) ( $r, \phi, z$  — цилиндрические координаты) или, согласно электродинамической терминологии, в моду типа TM (поперечно-магнитную) по отношению к аксиальному направлению, она возбуждается продольными («кабельными») токами ( $j_{\text{пов}}^e$ ) и для равномерно обтекаемого кругового цилиндра является источником внутреннего самоэкранирования, аналогичным зарядовому. Другая же мода ( $j_y^e \rightarrow H_z$ ) породит моду типа LM (продольно-магнитную), возбуждающую поперечными («соленоидными») токами, обеспечивающими внешнее самоэкранирование\*. В предельном переходе к двумерно-точечному источнику это самоэкранированное распределение описывается формулой

$$j^e = c\nabla \times p_{\text{лин}}^m \delta(\mathbf{r}_\perp) \mathbf{z}_0 = c\nabla \delta(\mathbf{r}_\perp) \times p_{\text{лин}}^m \mathbf{z}_0, \quad (8)$$

где  $p_{\text{лин}}^m$  — постоянный вектор погонного магнитного момента. Выражение (8) исполняет функции первого члена в разложении (5), второй же член описывает в двумерном случае продольные токи, только что полученные конструктивно вместе с преобразованием TM-моды. Самоэкранировка продольных токов достигается в системах типа коаксиала, в точечном пределе это дает распределение вида

$$j_z^e = \mathbf{z}_0 D_\perp \Delta_\perp \delta(\mathbf{r}_\perp), \quad (9)$$

что является векторным вариантом аксиально-симметричного квадруполя типа (7). В терминах (5) это эквивалентно заданию продольной компоненты электрического векторного потенциала, сосредоточенной на оси,  $\mathbf{A}^e = \mathbf{z}_0 A_z^e \delta(\mathbf{r}_\perp)$ ; тогда из уравнений Максвелла сразу следует (9), поскольку

$$\frac{4\pi}{c} j^e = \nabla \times (\nabla \times A_z^e \mathbf{z}_0 \delta(\mathbf{r}_\perp)) = -\mathbf{z}_0 A_z^e \Delta \delta(\mathbf{r}_\perp). \quad (10)$$

\* Таким образом, продольный ток при скручивании в цилиндр ведет себя «зарядо-подобно», а поперечный ток — «векторо-подобно», т. е. внешнее экранирование изменяется на внутреннее. С этим свойством связан интересный эффект, кажущийся парадоксальным. Неподвижный равномерно заряженный цилиндр ( $\rho_{\text{пов}}$ ) создает поле ( $E_r$ ) только вне себя, а конвекционный ток  $i_c = \rho_{\text{пов}} u$ , возникающий при вращении такого цилиндра, ведет к появлению поля ( $H_z$ ) только внутри цилиндра, что, вообще говоря, не совместимо с рецептами преобразования полей специальной теории относительности. Может даже сложиться мнение, что при вращении электрически нейтрального соленоида, обтекаемого током, из него наружу «вылезет» статическое поле  $E_r = 4\pi\rho_{\text{пов}} = 4\pi j_\phi u/c$ , нарушая тем самым законы сохранения заряда. К счастью, правильное применение правил преобразования полей в неинерциональных системах отсчета снимает все недоразумения. В соответствующем месте книги [12] допущена неточность.

Элементарные источники (8) и (9) решают вопрос построения произвольных самоэкранированных распределений по той же схеме обобщений, которая была обсуждена выше, т. е. из них можно образовывать двойные токовые слои или соленоиды произвольного сечения.

## 7. ТРЕХМЕРНАЯ СТАТИКА

Обобщение на трехмерные системы можно производить двумя приемами: формальным и наглядным. В случае симметричных зарядовых распределений нагляден и сам формализм: по виду выражение для  $\rho(r)$  не отличается от (9),

$$\rho = D \Delta \delta(r), \quad (11)$$

но теперь оно описывает модель сферического конденсатора, изображенного на рис. 1 (внутренняя сфера  $r=r_0$  с зарядом  $-Q$ , наружная  $r=r_0 + \Delta r$  с зарядом  $+Q$ ). Величину  $D = (Q \Delta r) r_0 = p_r r_0 \rightarrow \text{const}$  ( $\Delta r \ll r_0 \rightarrow 0$ ) следовало бы считать сферически симметричным квадрупольным моментом, хотя это не совмещается с уже принятой терминологией\*.

Токовые же обобщения проще проводить, прибегая к наглядным топологическим манипуляциям, которые при желании могут быть названы «операциями тороризаций» источников: длинный цилиндр свертывается, как это показано на рис. 2, 3, и склеивается торцами, превращаясь в тор, а затем вся система сжимается в точку. При этом «кабельные» (ранее текущие вдоль  $z$ ) токи замыкаются и становятся кольцевыми — мы будем их называть  $\theta$ -токами, а «соленоидные» или  $\phi$ -токи (координатные обозначения показаны на рис. 3, 8) претерпевают лишь незначительные деформации. А вот магнитные поля, возбуждаемые этими токами, изменяются кардинально: поля  $\theta$ -токов заполняют только внешнее пространство тора и отсутствуют внутри, а поля  $\phi$ -токов, наоборот, сохраняются только внутри тора. В точечном пределе вся картина описывается формулами:

для  $\theta$ -моды тока

$$j_\theta^e = c \nabla \delta(r) \times p^m \mathbf{x}_0, \quad H = \nabla \times (\nabla(1/r) \times p^m \mathbf{x}_0), \quad (12)$$

и для  $\phi$ -моды тока

$$j_\phi^e = c \nabla \times (\nabla \delta(r) \times t^e \mathbf{x}_0), \quad H_\theta = 4\pi \nabla \delta(r) \times t^e \mathbf{x}_0. \quad (13)$$

Здесь  $r = |\mathbf{r}|$ ,  $p^m = p^m \mathbf{x}_0$  — магнитный дипольный момент распределения токов (12), а  $t^e = t^e \mathbf{x}_0$  — так называемый электрический торoidalный момент распределения токов (13). По размерности он эквивалентен квадрупольному моменту, да и по исполняемым функциям система токов (13) напоминает внутренний квадруполь, ту особую его разновидность, которая обеспечивает полную внешнюю самоэкранировку. Этот интереснейший и по своей природе и по своим свойствам объект был назван в свое время *анаполем* (Зельдович, Компанеец [1]). Но потом по каким-то причинам название это стало приобретать оттенок архаичности, а в макроэлектродинамике оно и вовсе не прижилось — там с соленоидными торами обращаются как с безымянными. Далее мы постараемся придерживаться «первого слова», именуя объекты (13) электрическими анаполями или  $e$ -анаполями.

Итак, объект (11) обладает и внутренним и внешним экранированием, (12) — только внутренним, а (13) — только внешним. В принципе и (12) и (13) могут быть достроены до (11). Но, поскольку наша цель состоит в выяснении ветвей неоднозначности внешних (или «прямых») обратных задач, то мы будем достраивать только объект (12) с тем, чтобы он стал самоэкранированным и для внешней области то-

\* Этот момент принято связывать также со средним квадратом радиуса размазывания заряда, который для модели (11) можно записать в виде  $\bar{r}^2 Q = \int \rho r^2 dv = 6D$ , где в отличие, например, от [2] «восстановлена» размерность квадрата длины для  $\bar{r}^2$ .

же. Для этого по аналогии с цилиндрическим случаем необходимо прибегнуть к системе двух противоположно текущих  $\theta$ -токов, т. е. построить тор в форме свернутого коаксиального кабеля. В точечном пределе это дает

$$\mathbf{j}_\theta^e = -c\nabla\Delta\delta(\mathbf{r}) \times \mathbf{x}^m \mathbf{x}_0, \quad H_\varphi = \nabla \times \mathbf{A}_\theta^e, \quad \mathbf{A}_\theta^e = 4\pi\nabla\delta(\mathbf{r}) \times \mathbf{x}^m \mathbf{x}_0, \quad (14)$$

где  $\mathbf{A}^e$  — векторный потенциал, а величина  $\mathbf{x}^m$  по размерности эквивалентна октупольному (внутреннему) магнитному моменту и функционально тоже с ним сходна. Объект (14) похож на анаполь (13), но не является двойственным ему  $m$ -анаполем; он получается из  $e$ -анаполя путем анзаца:  $\mathbf{t}^e \rightarrow \mathbf{x}^m$ ,  $\mathbf{H}_\theta \rightarrow \mathbf{A}_\theta^e$ ,  $(4\pi/c) \mathbf{j}_\theta^e \rightarrow \mathbf{H}_\varphi$ . Как будто бы это не токовый анаполь, а полевой анаполь — тороидальный соленоид, обтекаемый полем  $H_\varphi$ , и, следовательно, как ясно из (14) или из его цилиндрического предшественника (9), (10), дающий внешнее самоэкранирование поля вектор-потенциала  $\mathbf{A}^e$ . Нетрудно предсказать (см. разд. 9), что, поскольку для переменных источников изменение во времени  $\mathbf{A}_\theta^e$  порождает электрическое поле  $\mathbf{E}_\theta$ , то  $H$ -анаполь (14) будет вести себя аналогично  $m$ -анаполю (соленоидному тору, обтекаемому магнитным  $\varphi$ -током), и поэтому (14) можно было бы назвать магнитным «пред-анаполем», хотя такой своеобразный объект, наверное, заслуживает и более выразительного наименования\*.

## 8. ВЗАИМОПОДМЕНЯЕМОСТЬ ИСТОЧНИКОВ

Как было продемонстрировано в разд. 3, неоднозначность решения обратных задач, прежде всего, обусловлена возможностью внесения в источники (пока все еще имеются в виду статические источники) распределений типа (11), (13) и (14) с невылезающими наружу полями. Самоэкранированные системы сразу же удваиваются, если применить к ним операцию дуализации ( $e \rightleftharpoons m$ ). Однако фактически эти наборы еще более обильны и неопределены. Если взять за исходный объект «сгусток  $\rho^e$ », то можно, как это продемонстрировано на рис. 4, создавать с его помощью электрические токи ( $\mathbf{j}^e = \rho^e \mathbf{u}$ ), магнитные заряды ( $\rho^m = -\nabla \cdot \mathbf{P}^m$ ,  $c\nabla \times \mathbf{P}^m = \mathbf{j}^e$ ), магнитные токи ( $\mathbf{j}^m = \rho^m \mathbf{u}$ ) и снова электрические заряды ( $\rho^e = -\nabla \cdot \mathbf{P}^e$ ,  $c\nabla \times \mathbf{P}^e = \mathbf{j}^m$ ). Цепочка замыкается, и, значит, понятие исходного объекта условное: любое из распределений источников, дающее как частное, так и общее решение задачи (с учетом неограниченных самоэкранирующих вложений) может быть изготовлено из любых элементов, представленных на рис. 4.

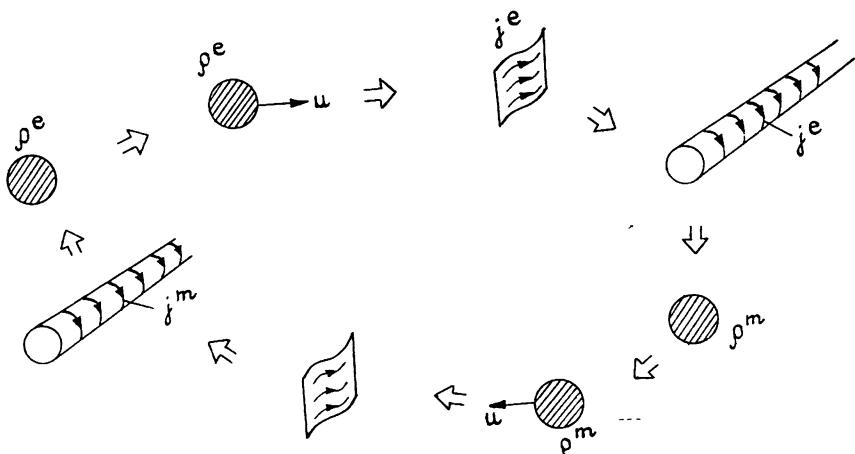


Рис. 4. Взаимоподменяемость электрических зарядов и токов магнитными зарядами и токами.

\* Ясно, что по этому пути можно двигаться и дальше — вводить пред-пред-анаполи и т. д., которые потом для  $e^{i\omega t}$  процессов «оживут» и станут магнитными мультиполиями соответствующего ранга [3].

Разумеется, речь идет не об изготовлении в натуре, а о воображаемом «производстве моделей», выполняемом по определенным правилам из сторонних источников, поддерживаемых какими-либо внешними средствами (возможно даже и не электродинамического или не макроэлектродинамического характера), т. е. из распределений, в принципе не нарушающих никаких «законных» физических запретов. Поэтому такие занятия не должны бы считаться предосудительными только потому, что им недостает замыкающих доводов, превращающих требуемое распределение зарядов и токов в динамически самосогласованное и в той или иной степени устойчивое. Но, конечно, это скорее модельная физика, нежели прикладная, она обладает известной отвлеченностю от естественного эксперимента, хотя все ее конструкции, в принципе, воплощаемы и даже занимательны. Так что помимо установлений ветвей неоднозначности решений обратных задач соответствующих уравнений математической физики появляется возможность еще и придумывания различных теоретических игрушек и «дисплеек», которые могут, вообще говоря, возыметь и более серьезные воздействия на наши представления о богатстве и содержательности максвелловской электродинамики, чем кажется на стадии этих вот педагогически развлекательных упражнений.

Ограничимся лишь одним примером. Поскольку торцы  $E$ -потоководов (рис. 4) имитируют точечные электрические заряды, а торцы  $H$ -потоководов — точечные магнитные заряды, то вращением таких потоководов вокруг одного из торцов, как центра, можно имитировать соответственно электрические и магнитные вихревые токи. Вообразим себе устройство в виде велосипедного колеса с равномерно распределенными спицами, каждая из которых представляет  $H$ -потоковод. Благодаря амперовой компенсации встречных электрических токов, формирующих потоководы, такая система спиц эквивалента двум дискам с противоположно текущими в плоскости колеса азимутальными токами. Краевой эффект на ободе ( $r=r_b$ ) описывается как магнитное поле ( $H$ ) поверхности магнитного заряда  $\rho_{\text{пов}}^m$ . При равномерном вращении дисков с угловой скоростью  $\Omega$  появляется электрическое поле  $E \sim (\Omega r_b/c)H$  (нерелятивистское приближение), совпадающее с полем магнитного тока  $j_\varphi^m = \Omega r_b \rho_{\text{пов}}^m$ , текущего вдоль обода. Но это, разумеется, не вихревое, а потенциальное поле: его источником является электродипольный слой, образованный электрическими зарядами на вращающихся токовых дисках  $\rho_{\text{пов}}^e \sim \frac{j_{\text{пов}}^e \Omega r_b}{c^2}$ .

Для нейтрализации магнитного заряда в центре необходимо привлечь еще пару противоположно вращающихся дисков с токами противоположных направлений. Вот какое хитроумное устройство может быть придумано для создания кольцевого магнитного тока чисто электрическими средствами. В принципе любой вихревой магнитный ток «вполне изготавливается» из электрических без подключения  $H$ -потоководов извне.

## 9. САМОЭКРАНИРОВКА ДЛЯ ПЕРЕМЕННЫХ ПРОЦЕССОВ

Выше уже говорилось о принципах конструирования самоэкранированных эндовибраторных распределений источников в общем случае. Попытаемся сейчас на основе приобретенного опыта в статике предложить несколько вариантов точечных самоэкранированных объектов. Зарядовые источники обобщаются элементарно. В силу (2) изменение заряда (11) должно сопровождаться появлением сторонних токов

$$\nabla \cdot j^e = -i\omega \rho^e = -i\omega D \Delta \delta(r), \quad j^e = -i\omega D \nabla \delta(r). \quad (15)$$

Здесь и далее для упрощения описания операция  $\partial/\partial t$  заменена на  $i\omega$  (ограничение не принципиальное, но удобное, поскольку в идеальном эндовибраторе самоэкранированные распределения распадаются на синусоидальные колебания, которые мы будем описывать фактором  $e^{i\omega t}$ ).

Бисфера (15) обладает уникальным свойством: она сохраняет самоэкранировку при любых зависимостях от времени  $p^e(t)$  и  $j^e(t)$  благодаря своей высокой симметрии. Обычно же эффект самоэкранировки не безразличен к изменениям источников во времени, и, в частности, самоэкранированные статические объекты, вообще говоря, становятся излучающими в переменных режимах. Это относится и к  $e$ -анаполю (13) и, как уже говорилось выше, к пред-анаполю (14).

Мы по-прежнему будем оперировать в основном с точечными объектами. Но для переменных полей «точечность» предполагает еще и малость в сравнении с длиной волны излучаемых (фактически или виртуально) волновых полей:  $kL=L/\lambda \ll 1$  ( $\lambda=\lambda/2\pi$ ).

Простейшим излучающим токово-зарядовым точечным объектом является элементарный электрический диполь, в частности зарядовый диполь в режиме  $e^{i\omega t}$ -колебаний, «запитываемый» точечным током:

$$p^e = -p^e \nabla \delta(r), \quad j^e = +i\omega p^e \delta(r). \quad (16)$$

Возбуждаемое им поле описывается известными формулами Герца. Естественно, что ток (16), как всякое векторное распределение, разбивается в соответствии с (3) на потенциальный и вихревой. Потенциальный ток создает только близлежащее безмагнитное поле, совпадающее с полем квазиэлектростатического диполя. Основная же часть поля, ответственная за излучение, образуется за счет вихревой компоненты. Разложению (3) для тока (16) можно придать вид следующего тождества:

$$4\pi p^e \delta(r) \equiv \nabla \times \left( \nabla \frac{1}{r} \times p^e \right) - \nabla \left( \nabla \frac{1}{r} \cdot p^e \right) \quad (17)$$

( $r = |r|$ ,  $p^e$  — постоянный вектор,  $\Delta(1/r) = -4\pi\delta(r)$ ). Интерпретация (17) проста (см., например, [4<sup>3</sup>]): первый член имеет структуру статического поля токового диполя, а второй — эквивалентного ему зарядового диполя, так что их разность дает всплеск поля внутри двойного слоя, создающий нужный перепад потенциала. Фактически (17) — запись «принципа эквивалентности», установленного еще Ампером, но доведенного до полного математического завершения Максвеллом [4]. Излучение обязано первому члену в (17), т. е. ф-ткам, текущим по вложенным друг в друга торам, в статическом пределе вырождающимся в  $e$ -анаполю (кое-какие тонкости будут отмечены в разд. 10) с некоторым тороидальным моментом  $t_x^e$ ; при  $\omega \neq 0$  электромагнитное поле вылезает из анаполя наружу, обретая вид поля электрического диполя с моментом

$$p_x^e = ikt_x^e. \quad (18)$$

Выходит, что сам по себе точечный зарядовый диполь (16) «производит на свет» весьма протяженную систему вихревых токов, плотность которых убывает пропорционально кубу обратного расстояния ( $\sim 1/r^3$ ), что, кстати, как раз и обеспечивает конечное значение интегралов вида  $\int j dv$ , взятых по всему бесконечному объему области источников.

Соотношение (18) фактически подсказывает путь конструирования простейшего точечного самоэкранированного распределения. Необходимо образовать комбинацию из двух диполей, компенсирующих друг друга, в качестве одного диполя взять, например,  $e$ -зарядовый  $e$ -диполь (16), а в качестве другого —  $m$ -токовый  $e$ -диполь

$$j^m = c\nabla \delta(r) \times p^e x_0, \quad (19)$$

который для  $e^{i\omega t}$ -процессов в электротоковом исполнении выглядит как тороидальный соленоид типа (13) с моментом, удовлетворяющим соотношению (18). В результате получается объединенное распределение токов:

$$\mathbf{j}^e = i\omega [\mathbf{p}^e \delta(\mathbf{r}) + k^{-2} \nabla \times (\nabla \delta(\mathbf{r}) \times \mathbf{p}^e)], \quad (20)$$

обладающее точным самоэкранированием.

На рис. 6 приведено несколько вариантов реализации таких систем, и, пожалуй, самым «доступным» из них является вариант, повторяющий распределение зарядов и токов в стенках полого резонатора типа применяемых в кластронах. Такой резонатор — аксиально-симметричный гантелеобразного сечения — представляет собой простейший экранированный LC-контур, систему с почти сосредоточенными параметрами: двухдисковый конденсатор в центре, эквивалентный зарядовому диполю  $\mathbf{p}_Q^e = Q^e \mathbf{l}$ , подсоединен к тороидальному витку соленоида с моментом  $\mathbf{p}_I^e = ik\mathbf{t}_x^e$ . Соображения оптимизации размеров, т. е. физически «приближенной точечности» распределения (20), как раз и привели радиоинженеров (впрочем, кластрон, как таковой, был придуман физиком А. Виттом) к резонаторам такой формы. Очевидно, что равенство  $\mathbf{p}_Q^e + \mathbf{p}_I^e = 0$  выполняется только для определенного значения  $\omega = \omega_0$ , определяемого геометрией резонатора. В качестве примера на рис. 6 взят резонатор прямоугольного сечения, для него

$$k^2 = \omega^2/c^2 = \frac{2l}{a^2 H \ln(b/a)} \quad (\lambda \gg a \gg l, \bar{\lambda} \gg H, \bar{\lambda} = \lambda/2\pi). \quad (21)$$

Результаты и обозначения заимствованы из книги [14]. Из (21) видно, что всегда существует такой порядок предельного перехода ( $l/H \rightarrow 0$ ,  $b/a \rightarrow 1$ ,  $ka \rightarrow 0$ ), при котором этот объект можно идеализировать точечным источником при любых  $\bar{\lambda}$ . Значит, вместе со своим дуальным аналогом ( $e \rightleftharpoons m$ ) самоэкранированная система токов (20) способна исполнять функции универсального добавка к решению обратных задач в любом диапазоне частот. Причем, дуальный аналог может выглядеть как битор с кабельной  $\theta$ -модой тока, подсоединененный к магнитному конденсатору — отрезку прямого соленоида (рис. 7). Соответствующее распределение электрических токов дается выражением:

$$\mathbf{j}^e = c [\nabla \delta(\mathbf{r}) \times \mathbf{p}^m - k^{-2} \nabla \Delta \delta(\mathbf{r}) \times \mathbf{p}^m]. \quad (22)$$

Собственная частота колебаний  $\omega_0$  при надлежащей геометрии не отличается от (21), хотя надо иметь в виду, что обычный способ определения  $\omega_0$ , опирающийся на комплексную теорему Пойнтинга и состоящий в приравнивании запасенной внутри резонатора средней электрической энергии и средней магнитной энергии, хорошо срабатывает в случае (20), но для резонатора типа (22) требует еще учета реактивной энергии взаимодействия сторонних токов с отличными от нуля полями ( $\int \mathbf{j}^e \mathbf{E}^* dv \neq 0$  и  $\int \mathbf{j}^m \mathbf{H}^* dv \neq 0$ ).

## 10. ЕЩЕ ОДИН ПЕРЕХОД К СТАТИКЕ

Обратный переход от переменных полей к статическим реализует одну возможность, которая в тривиальной статике не просматривается [3]. Речь идет о статике, «организованной» с помощью нестационарных токов. Как известно, любое гармоническое колебание представляется в общем случае двумя компонентами:

$$f(t) = A_c \cos \omega t + A_s \sin \omega t, \quad (23)$$

и в пределе при  $\omega \rightarrow 0$  должно получаться тоже два независимых решения, хотя обычно сохраняется только одно  $f(t) \rightarrow A_c = \text{const}$ . Обычно, но не всегда. Например, при изучении возбуждения осциллятора на точно резонансной частоте или (для пространственного аналога) при прохождении волн точно на границе перехода от нормального распространения к туннельному, учет «секулярного члена», описывающего линейный рост функции источника или отклика, принципиально необходим, т. е. предельное значение для выражения (23) должно иметь вид

$$\lim f(t) \Big|_{\substack{\omega \rightarrow 0 \\ (A_s \omega) \rightarrow \text{const}}} = A_c + (A_s \omega) t. \quad (24)$$

При этом, как следует из (2) или прямо из уравнений Максвелла, электрические и магнитные поля на подходе к статике ведут себя по-разному. Например, линейно растущему заряду  $\rho^e = \rho_1^e(t/\tau)$  отвечает линейно растущее поле  $E = E_1(t/\tau)$  ( $\sin$ -предел в (22)) и, значит, постоянный ток  $j^e = j_0^e$  и постоянное магнитное поле  $H = H_0$  ( $\cos$ -предел в (22))\* . Таким образом, существует режим, который можно было бы назвать *предстатикой*, когда электрические и магнитные поля при  $\omega \rightarrow 0$  выходят на разные предельные состояния.

Ограничимся обсуждением сразу же трехмерных вихревых (беззарядовых) источников, хотя, конечно, все поэтапные преобразования от плоскостей к цилиндрам, сферам и торам, описанные в разд. 5—7, могли бы быть проделаны и для предстатических распределений тоже.

Начнем с тороидальной  $\theta$ -моды. В случае  $\cos$ -предела они создают магнитостатическое поле во внешней области ( $H_0$ ) и нулевое поле внутри (обращенное самоэкранирование). А в  $\sin$ -пределе получается комбинированное поле снаружи ( $H_1$  и  $E_0$ ) и чисто электростатическое (вихревое!) внутри тора ( $E_0$ ). Для  $\varphi$ -моды тока происходит рокировка областей: в  $\cos$ -пределе поле внутри магнитостатическое ( $H_0$ ), а снаружи — нулевое (это — анаполь с внешней самоэкранировкой), а

в  $\sin$ -пределе поле внутри комбинированное ( $H_1$  и  $E_0$ ), а снаружи — чисто электростатическое ( $E_0$ ). Для точечного тора это — поле элементарного электрического диполя.

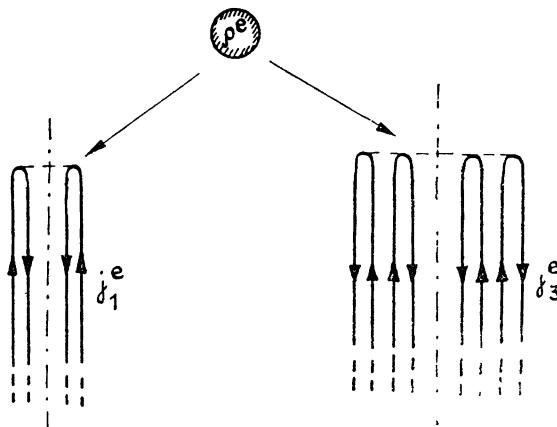


Рис. 5. Имитация электрического монополя тороидальными соленоидами («струна диполей») с нестационарными токами  $j^e = j_1^e(t/\tau)$  и  $j^e = j_3^e \times (t^3/\tau^3)$ .

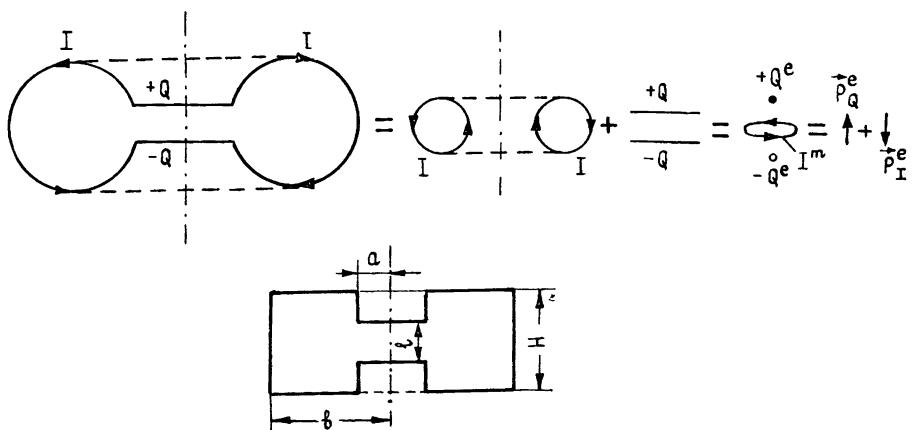


Рис. 6. Клистронный резонатор — одна из моделей самоэкранированного распределения зарядов и токов с взаимокомпенсирующими дипольными моментами.

Как было продемонстрировано в [3], возбуждение магнитостатических и электростатических полей нестационарными источниками до-

\* В этом разделе мы, следуя [3], для временных зависимостей придерживаемся таких обозначений:  $f(t) = f_n(t^n/\tau^n)$ .

пускает весьма изощренные вариации: работая с токами, изменяющими по разным степенным законам  $\mathbf{j}_n^e = j^e (t^n/\tau^n)$ , можно создавать статические поля внутренних и наружных мультиполей любого порядка. С точки зрения классификации ветвей неоднозначности достаточно изучить способы построения монополей, а затем «пропустить» их через замкнутую цепочку, изображенную на рис. 4, и далее по всем инстанциям решаемых обратных задач. Общий принцип иллюстрирован рис. 5. Это — удлиненные торы, вложенные друг в друга. Они получаются путем нанизывания обычных торов с круговым сечением на «дипольную струну» [3]. В случае ф-токов  $\mathbf{j}_n^e (n=1, 3, 5, \dots)$  точечные торцы имитируют поле магнитного монополя, в случае  $\theta$ -токов  $\mathbf{j}_n^e (n=0, 2, 4, \dots)$  получается поле электрического монополя. Операция ( $e \rightleftharpoons m$ ) рокирует магнитный монополь с электрическим.

## 11. ИТАК, ТРИ ИСТОЧНИКА И ТРИ СОСТАВНЫХ ЧАСТИ

Итак, в каждой из ветвей (электрической или магнитной) выделяются три вида статистических самоэкранированных источников: один зарядовый (бисфера) и два токовых — анаполь (тор) и преданаполь ( $\theta$ -битор). Каждый из них порождает в свою очередь свои семейства статических мультиполей. При этом полезно различать внешнее и внутреннее экранирование в зависимости от того, какая область оказывается освобожденной от поля. В случае внешнего экранирования можно прибегать к приближению точечных источников и считать, что произвольная самоэкранированная система как бы составляется из элементарных частей трех типов.

Для процессов, переменных во времени, источники, самоэкранированные в статике, могут утрачивать эти свойства и в первом (по мультипольным представлениям) приближении создавать дипольные поля во внешней области. Самоэкранирование восстанавливается путем создания систем, обладающих взаимокомпенсированным, и следовательно нулевым, дипольным моментом. Это, в частности, токи (20) и (22). Вместе с бисферическим распределением (15) они образуют три вида самоэкранированных источников в общем случае. Но, конечно, вся эта совокупность источников — не более чем модельная интерпретация известного еще с прошлого века представления (3) и (5).

## 12. И ЧТО ЖЕ ОТСЮДА МОЖЕТ СЛЕДОВАТЬ?

На этом можно было бы закончить обсуждение неоднозначностей обратных задач. Однако, поскольку они привлекают внимание к некоторому выделенному набору объектов, то по традиции, начатой еще в [2], полезно высказаться по поводу этих объектов как таковых.

Все статические самоэкранированные системы (в частности, бисфера, анаполь и преданаполь) при перемещении в пространстве ведут себя подобно обычным мультиполем: при равномерном движении в вакууме с досветовой скоростью они переносят с собой свои поля, сохраняя самоэкранировку, а при неравномерном (ускоренном, осцилляторном, круговом и т. п.) начинают «эмиттировать» часть запасенной внутри них электромагнитной энергии. Значит, в неподвижности или при  $a = \text{const}$  эти объекты «даленодейственно» не взаимодействуют ни между собой, ни с окружающими телами (неоднородностями среды), тогда как обычные мультиполи, обладая протяженными внешними полями, могут наводить на телах заряды и токи и тем самым создавать поля излучения. Эта своеобразная разновидность переходного излучения, исследованная еще в диссертационной работе Аскарьяна [15], была известна задолго до того, как появилось само понятие переходного излучения — в связи с изучением принципов работы электровакуумных приборов (теорема Шокли—Рамо). Его можно было бы назвать дифракционным, «наводимым» или «задевшим» излучением, но вряд ли нужно выделять из общего переходного излучения, поскольку заряженная частица или мультиполь излучают и при подлете к границе

раздела сред, и при пересечении ее, и при удалении от нее — и этот процесс един. А вот самоэкранированные объекты с  $\mu = \text{const}$  выделяют «истинное» переходное излучение в чистом виде, поскольку излучают только при непосредственном пересечении границы или области неоднородности среды. Исследование таких соударных взаимодействий бисфер, анаполей и преданаполей небезынтересно, но не совсем поучительно в отвлечении от конкретно реализованных моделей.

Черенковскому излучению анаполей при «продувании» их частицами окружающей среды (или при их движении сквозь среду) посвящена работа [16]. В принципе эти исследования могут быть распространены на любые самоэкранируемые объекты. Причем, конечно, особую привлекательность вызывает возможность черенковского (зоммерфельдовского) излучения в вакууме (все исторические ссылки по этому вопросу содержатся в книге [17]). Как заметил В. Л. Гинзбург, речь должна идти не о сверхсветовом излучении материального объекта (так сказать, «причино-носителя»), а об излучении «зайчика», «имида», электромагнитного изображения объекта, появляющегося и исчезающего в различных точках пространства по заранее намеченной программе и, следовательно, с заранее установленной скоростью. Ясно, что любое распределение макроисточников может быть имитировано с помощью таких изображений. Более того, иногда короткоживущее изображение проще воспроизвести, чем сам долгоживущий объект (например, из-за его не очень устойчивого в физическом воплощении состояния). Многие из этих вопросов подробно рассмотрены в [17]. Мы ограничимся здесь лишь одним пояснением, в принципе исчерпывающим проблему (если думать, что она вообще существовала).

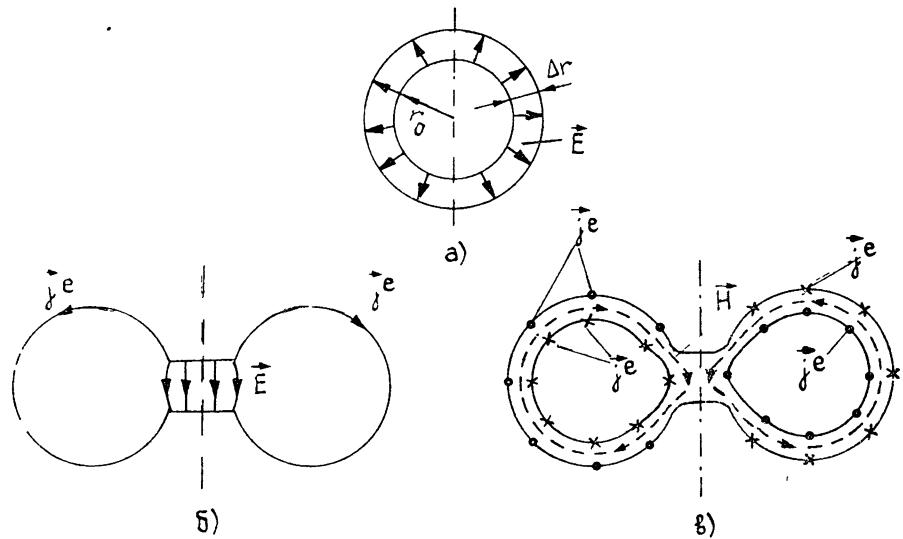


Рис. 7. Три типа самоэкранированных источников:  
а) бисфера, б)  $e$ -резонатор, в)  $m$ -резонатор.

Представим себе, что полубесконечная струна диполей в вакууме (выполненная из нанизанных на нее зарядовых или точечных источников) укорачивается или удлиняется по заранее назначенному закону. Последний произволен, так как «погашение» («зажигание») токов или векторов поляризации является локальным событием. Выходит, перемещение изображения монополя (магнитного или электрического — все равно какого) со сверхсветовой скоростью в вакууме физически воспроизводимо, и в этом смысле работа Зоммерфельда [18] может быть частично реабилитирована. Переход к сложным распределениям сводится к применению принципа суперпозиции. Но, конечно, когда возникнет задача о сверхсветовом излучении объектов (15), (20), (22), то проще подойти сразу к ней как к излучению диполей или осцилляторов.

Существуют некоторые любопытные проявления свойств тороидальных объектов и в «деловой электродинамике», например, при нужном подборе шага намотки токопроводящей спирали на тороидальной ферритовой антенне (рис. 8) можно одновременно возбуждать и  $\theta$ -моды и  $\phi$ -моды токов, излучающие, подобно электро- и магнитодипольным моментам, сдвинутым по фазе на  $\pi/2$ . Тогда получится элементарный излучатель циркулярно поляризованного поля.

Пассивные объекты типа изображенных на рис. 8 характеризуются магнитоэлектрическими восприимчивостями

$$P_{\alpha}^e = \chi_{\beta\alpha}^{ee} E_{\beta} + \chi_{\alpha\beta}^{em} B_{\beta}, \quad (25)$$

$$P_{\alpha}^m = \chi_{\alpha\beta}^{me} E_{\beta} + \chi_{\beta\alpha}^{mm} B_{\beta},$$

где псевдотензоры  $\chi_{\alpha\beta}^{em}$  и  $\chi_{\beta\alpha}^{me}$  при отсутствии потерь обладают дуальной антисимметрией  $\chi_{\alpha\beta}^{em} = -\chi_{\beta\alpha}^{me}$ , что снижает всякие патологические исключения для применения теории взаимности [19] к искусственным средам, выполненным из вкраплений типа (23).

Возможно, что читатель, ознакомившись с этой статьей, будет несколько озадачен помещением ее в тематический сборник по нелинейным явлениям. Утешением может служить то, что в нелинейных средах самоэкранированные объекты остаются такими же, какими они были в линейных средах. Кроме того, сами по себе эти объекты не могут быть линейными или нелинейными, последнее относится к взаимодействию между ними, к средам, из них составленным, и к системам, к которым они могут быть приписаны [2, 3, 20], и тут, как любил когда-то выражаться А. В. Гапонов, «дело пахнет жареным», хотя многим из нас врачи не рекомендуют сейчас увлекаться употреблением такой пищи.

Автор признателен Г. В. Пермитину, А. И. Смирнову и Е. В. Суворову за участие в обсуждениях и С. Д. Жерносек за помощь в работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Зельдович Я. Б. — ЖЭТФ, 1957, 33, с. 1531.
2. Дубовик В. М., Тосуян Л. А. — Физика ЭЧАЯ, 1983, 14, с. 1193.
3. Миллер М. А. — УФН, 1984, 142, с. 147.
4. Maxwell J. C. A Treatise on Electricity and Magnetism in two volumes. — Dover Publication, 1891.
5. Морс Ф. М., Фешбах Г. Математические методы в физике — М.: Мир, 1965.
6. Роуз М. Поля мультиполей. — М.: ИЛ, 1957; Медведев Б. В. Начала теоретической физики. — М.: Наука, 1977.
7. Стреттон. Теория электромагнетизма. — М.: Гостехиздат, 1948.
8. Силин В. П., Рухадзе А. А. Электромагнитные свойства плазмы и плазмо-подобных сред. — М.: Атомиздат, 1961.
9. Игнатов Д. М., Рухадзе А. А. — УФН, 1981, 135, с. 171.
10. Коулмен С. — УФН, 1984, 144, с. 277.
11. Ландau Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. — М.: Наука, 1967.
12. Меерович Э. А. Методы релятивистской электродинамики в электротехнике. — М.: Энергия, 1966.
13. Гинзбург В. Л. — Изв. вузов — Радиофизика, 1984, 27, с. 852.
14. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны. — М.: Сов. радио, 1957.
15. Аскарьян Г. А. Диссертация. М.: ФИАН, 1962.
16. Гинзбург В. Л., Цытович В. Н. — ЖЭТФ, 1985, 42, с. 226.
17. Гинзбург В. Л. О теории относительности. — М.: Наука, 1979.
18. Sommerfeld A. — Ann. Phys., 1904, 44, p. 177.
19. Гинзбург В. Л. — Изв. вузов — Радиофизика, 1985, 28, с. 1211.
20. Волков Б. А., Горбацевич А. А., Копаев Ю. В. — ЖЭТФ, 1984, 86, с. 1870.

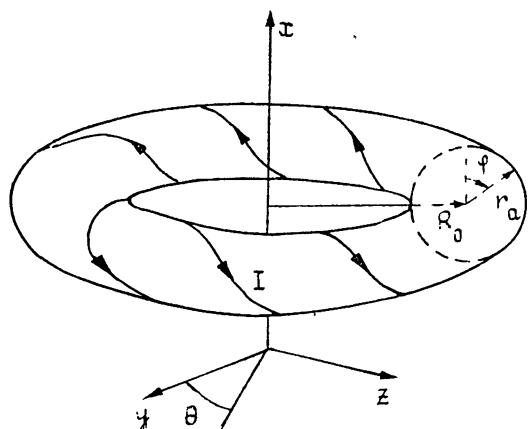


Рис. 8. Тор со спиральной токовой намоткой.