ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXIX, № 9 РАДИОФИЗИКА 1986

УДК 530.18

КОЛЛАПС И МНОЖЕСТВЕННОЕ ДРОБЛЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛНОВЫХ СТРУКТУР

Н. А. Жарова, А. Г. Литвак, Т. А. Петрова, А. М. Сергеев, А. Д. Юнаковский

Аналитически и численно показано, что самовоздействие волновых структур в нелинейной среде с аномальной дисперсией проявляется в виде множественного (каскадного) дробления коллапсирующих трехмерных сгустков поля (фрактального коллапса).

Одним из фундаментальных явлений в нелинейной динамике неодномерных волн является процесс самофокусировки [1,2]. В простейшем случае слабо нелинейной среды этот процесс описывается хорошо известным двумерным параболическим уравнением

$$-iE_t + E_{xx} + E_{yy} + |E|^2 E = 0. \tag{1}$$

Здесь $E_t \equiv \partial E/\partial t$, $E_{xx} \equiv \partial^2 E/\partial x^2$, $E_{yy} \equiv \partial^2 E/\partial y^2$. Из развитой для уравнения (1) аналитической теории [3,4], опирающейся на численное исследование его решений [5], следует, что самофокусировка локализованных распределений приводит к возникновению за конечное время сингулярностей, в которые вовлекается строго фиксированная величина энергии $\int |E|^2\,dxdy = P_0$. Эта энергия (обычно называемая критической) равна энергии низшей стационарной моды уравнения (1) — таунсовской моды $E = v_0(r_\perp)\,e^{-i\gamma t}$, $\gamma = \mathrm{const}$ [6].

Для многих проблем, особенно для задач нелинейной динамики волн в плазме, важным является вопрос, как видоизменяется характер самофокусировки волновых пакетов в трехмерном случае, в котором для описания процесса необходимо исследовать трехмерное уравнение [2,7]

$$-iE_t + E_{xx} + E_{yy} + \alpha E_{zz} + |E|^2 E = 0, \tag{2}$$

знак коэффициента α зависит от типа дисперсии волн.

В случае положительного знака $\alpha = +1$, соответствующего волнам с обычными поверхностями показателя преломления, вывод о возникновении сингулярности (волновом коллапсе) сохраняется и в трехмерном случае, однако при этом пакеты схлопываются с утечкой энергии, так что в особенность уходит нулевая энергия [8]. Вопрос о роли таких коллапсов в общей динамике самовоздействия трехмерного волнового пакета недостаточно исследован.

В данной работе рассматривается нелинейная динамика трехмерных волн, поверхность волновых векторов которых имеет седловую точку, т. е. коэффициент α отрицателен: $\alpha = -1$. Этот случай также соответствует достаточно широкому классу волн, например гравитационным волнам на глубокой воде [9], плазменным колебаниям в замагниченной плазме: верхнегибридным [10], циклотронным [11] и др. Как будет показано ниже, самовоздействие волн с таким законом дисперсии может приводить к последовательному рождению все более мелкомасштабных волновых структур. Процесс множественного дробления исходного распределения поля представляет собой одну из разновидностей волнового коллапса, который в данном конкретном проявлении можно назвать фрактальным.

Исследуем поведение локализованного в пространстве волнового пакета $E(x, y, z)$ в рамках уравнения (2) с $\alpha = -1$. Очевидно, что разные знаки дисперсии по поперечному и продольному направлениям должны приводить к противоположности эффектов нелинейной рефракции по этим направлениям. В рассматриваемом нами случае поперечная рефракция лучей по-прежнему соответствует самофокусировке, а продольная модуляция может приводить к дефокусировке, препятствующей схлопыванию.

Уравнение (2) обладает рядом интегралов, среди которых наиболее важными являются

$$I_0 = \int |E|^2\, dx\, dy\, dz; \tag{3.1}$$

$$I_2 = \int \{|E_x|^2 + |E_y|^2 + \alpha\, |E_z|^2 - (1/2)\, |E|^4\}\, dx\, dy\, dz. \tag{3.2}$$

Используя эти интегралы, для квадрата продольного (по координате z) размера пакета

$$\overline{b}^2 = \int z^2 |E|^2\, dx\, dy\, dz \Big/ \int |E|^2\, dx\, dy\, dz.$$

можно получить соотношение, которое мы сразу приведем для случая $\alpha = -1$:

$$\frac{d^2}{dt^2}\,\overline{b}^2 = 8 \int \left(|E_z|^2 + \frac{1}{4}\,|E|^4\right) dx\, dy\, dz \Big/ \int |E|^2\, dx\, dy\, dz. \tag{4}$$

Из (4) следует, что стационарные трехмерные солитоны в рамках (2) не существуют, а асимптотическое поведение произвольного пакета всегда характеризуется ростом его продольного размера. Для пакетов, не обладающих начальной «подфокусировкой» по z (например, имеющих однородное начальное распределение фазы), $\overline{b}^2$ является монотонно растущей функцией времени. Однако соотношение (4), в принципе, не исключает возникновения локальных сингулярностей за счет поперечного схлопывания на конечных интервалах времени.

Для выяснения этого вопроса рассмотрим сначала динамику трехмерного пакета в безаберрационном приближении, базирующемся на минимизации лагранжиана уравнения (2):

$$L = \int_0^t dt \int \left[\frac{i}{2}\,(E_t E^* - \text{к.с.}) + |E_x|^2 + |E_y|^2 - |E_z|^2 - \frac{|E|^4}{2}\right] dx\, dy\, dz. \tag{5}$$

Выбирая в качестве пробных функции гауссовой формы

$$E = A(t) \exp\left[-\frac{r^2}{2a^2(t)} - \frac{z^2}{2b^2(t)} - i\alpha(t)\, r^2 - i\beta(t)\, z^2 - i\gamma(t)\right], \tag{6}$$

$$r^2 = x^2 + y^2,$$

запишем для поперечного (a) и продольного (b) масштабов пакета следующие соотношения:

$$\ddot{a}/4 = 1/a^3 - P/a^3 b; \tag{7}$$

$$\ddot{b}/4 = 1/b^3 + P/a^2 b^2. \tag{8}$$

Постоянный параметр $P = A^2 a^2 b / 4\sqrt{2}$, пропорциональный полному числу квантов в распределении (6), в дальнейшем будем называть ВЧ энергией поля. Из уравнения (8) видно, что безаберрационное приближение сохраняет важное свойство точных решений (1), заключающееся в монотонном расширении структуры поля вдоль оси z. При этом поперечная динамика поля существенно зависит от энергии, приходящейся на единицу длины в продольном направлении $P_z=P/b$. Если начальное значение P_{z0}, взятое при $\dot{a}=0$, $\dot{b}=0$, превосходит критический уровень $P_{z\text{кр}}$ (см. рис. 1), продольное расплывание пакета не останавливает поперечное сжатие и в результате за конечное время t_0 образуется особенность, вблизи которой справедливо асимптотическое решение

$$a=\sqrt{2}\left(\frac{P}{b_*}-1\right)^{1/4}(t_0-t)^{1/2},$$

$$b=b_*+\frac{2P}{b_*^2(P/b_*-1)^{1/2}}(t_0-t)\ln(t_0-t).$$

Наоборот, для $P_{z0}<P_{z\text{кр}}$ поперечная самофокусировка заканчивается на конечном размере, после чего распределение, монотонно расширяясь по всем направлениям, выходит в режим линейной дефокусировки: $a\sim t$, $b\sim t$.

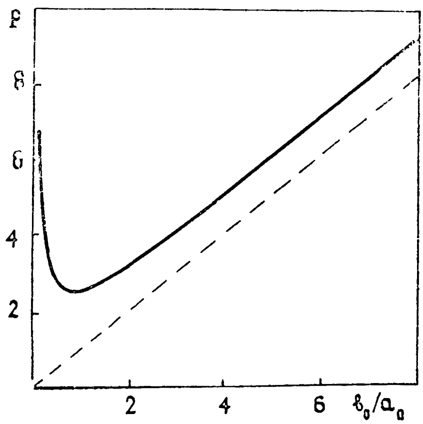

Рис. 1. Зависимость критической мощности $P_{\text{кр}}$ от начального соотношения масштабов b_0/a_0. В безаберрационном приближении при $P>P_{\text{кр}}$ пакет фокусируется в нить. При $P<P_{\text{кр}}$ особенность в решении не образуется и в конечном счете пакет дефокусируется.

Итак, безаберрационное приближение предсказывает появление сингулярностей в решении за счет формирования и схлопывания нитевидных ($a/b\sim(t_0-t)^{1/2}\to 0$) волновых структур. Заметим, что требуемая для этого «погонная» энергия в нити больше так называемой критической мощности самофокусировки (в наших обозначениях равной единице), следующей из задачи о коллапсе двумерных распределений поля [2] в рамках уравнения (2) с $\alpha=0$. Однако из детального анализа этого уравнения также известно, что на заключительной стадии эволюции двумерных структур из схлопывающего распределения всегда выделяется мощность, в точности равная критической, и именно она уходит в особенность. Энергетические «излишки», сбрасываемые при самофокусировке, не влияют на ход процесса. Если в соответствии с этой теорией предположить, что при коллапсе поля в полном уравнении (2) часть энергии высвечивается из основного распределения и устанавливается $P/b_*=1$, мы неизбежно должны заключить, что схлопывание остановится на некотором поперечном размере и сменится дефокусировкой пакета.

Этот минимальный поперечный масштаб можно найти, воспользовавшись полученным в [4] асимптотическим законом изменения во времени ширины

$$a(t)\underset{t\to t_0}{\approx}[(t_0-t)/|\ln(t_0-t)|]^{1/2} \tag{9}$$

и законом вытекания энергии из фокусирующегося двумерного решения $P/b-1\underset{t\to t_0}{\approx}1/[\ln(t_0-t)]^2$. Оценка дает $a_{\min}^2\approx\delta t^*/|\ln\delta t^*|$, где $(\ln\delta t^*)^4\,\delta t^*\approx b_0/a_0$. Заметим, что к ограничению самофокусировки приводит лишь учет совместного влияния двух процессов — продольного расплывания пакета и поперечного сбрасывания «лишней» энергии. Очевидно, что речь идет о тонких явлениях, для адекватного описания которых может оказаться недостаточным использование грубых характеристик распределения, таких, как ширина и амплитуда. Поэтому требуется более подробное исследование асимптотической стадии формирования особенности. Ниже мы покажем, что реальной причиной ограничения поперечной самофокусировки является дробление пространственной структуры поля*.

С целью исследования структурной устойчивости двумерных коллапсирующих распределений перейдем из лабораторной в систему координат, всесторонне сжимающуюся к некоторой точке ($r=0$, $z=z_0$) (выберем в ней $z_0=0$). Производя соответствующее преобразование поля по закону

$$E(r, z, t)=\frac{1}{a(\tau)}\,u\left(\frac{r}{a(\tau)}, \frac{z}{a(\tau)}, \tau\right)\exp\left(-i\frac{a_t}{4a}r^2\right), \tag{10}$$

получим из (2) уравнение

$$\hat{L}u\equiv -iu_\tau+\Delta_\xi u-u_{\eta\eta}+u|u|^2=-u\frac{\xi^2}{4}\left(2\frac{a_\tau^2}{a^2}-\frac{a_{\tau\tau}}{a}\right)-i\eta u_\eta\frac{a_\tau}{a}. \tag{11}$$

Здесь $\xi=r/a$, $\eta=z/a$, $a=a(\tau)$, $\tau=\int dt/a^2$ — новая шкала отсчета времени, для которой момент образования особенности отнесен в бесконечность. При приближении к моменту особенности однородное по z решение уравнения (11) асимптотически выходит на «таунсовскую» моду $u=V_0(\xi)\exp(-i\tau)$. С учетом (9) члены в правой части (11) асимптотически (пропорционально $1/\ln(t_0-t)$) исчезают, и анализ устойчивости нужно проводить в рамках более простого уравнения $\hat{L}u=0$. Фактически задача сводится к определению собственных значений оператора $\hat{L}_1$ [7] ($\hat{L}_1\psi\equiv(\Delta+\varkappa^2-1+3V_0^2)(\Delta+\varkappa^2-1+V_0^2)\psi=-\gamma^2\psi$), полученного из $\hat{L}$ посредством линеаризации $\hat{L}$ на фоне основной таунсовской моды ($u=[V_0(\xi)+v(\xi)\exp(\gamma\tau-i\varkappa\eta)]\exp(-i\tau)$). Оператор $\hat{L}_1$ является несамосопряженным, поэтому собственные числа оказываются комплексными. С точки зрения проблемы устойчивости, нас интересуют наиболее быстро растущие возмущения — их инкремент и волновое число $\varkappa$. Зависимость инкремента неустойчивости от $\varkappa$, полученная численно, изображена на рис. 2. Максимальный инкремент $(\mathrm{Re}\,\gamma)_{max}\approx\approx 0{,}75$ достигается при $\varkappa^*\approx 0{,}6$, а в предельном случае длинноволновой модуляции ($\varkappa\to 0$) справедлива зависимость $\mathrm{Re}\,\gamma\sim\sqrt{\varkappa}$, найденная в [7]. При увеличении $\varkappa$ неустойчивыми оказываются моды более высокого порядка (с большим числом вариаций по ξ), однако они нарастают медленнее и, видимо, не играют существенной роли в процессе разрушения основной моды поперечного коллапса. Пока характерная ширина по z начального распределения b_0 больше некоторого критического значения $b_0\gtrsim 10\,a_0$ ($\varkappa_0\approx 2\pi a_0/b_0<\varkappa^*\approx 0{,}6$), можно

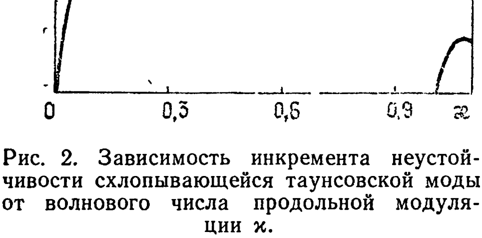

Рис. 2. Зависимость инкремента неустойчивости схлопывающейся таунсовской моды от волнового числа продольной модуляции $\varkappa$.

* Задача об устойчивости трехмерного сверхзвукового коллапса ленгмюровских волн в плазме рассматривалась в работе [12].

считать неустойчивость такой же, как в однородном по z решении. При меньших соотношениях продольного и поперечного начальных масштабов включается другой механизм, препятствующий образованию особенности. Предположим, что каждое бесконечно малое сечение по z распределения с характерными размерами (a_0, b_0) фокусируется независимо от других. Замена переменных типа (10)

$$E=a(z,t)^{-1}u(r/a(z,t),\tau(z))\exp(-i(a_t/4a)r^2), \qquad (12)$$

которая представляет собой обобщенное линзовое преобразование [13] с параметром a, зависящим от z, приводит нас к уравнению

$$-iu_\tau+\mu u_{\tau}+\Delta_\xi u+u|u|^2=0, \qquad (13)$$

где $\mu=a_0^2/2b_0^2$. Уравнение (13) написано для сечения z_0, соответствующего максимуму поля ($\partial E/\partial z|_{z=z_0}=0$), без учета асимптотически исчезающих (при $\tau\to\infty$) членов. Таунсовская мода в (13) затухает при $\mu\neq0$ за счет «вытекания» энергии поля из максимума в стороны по z. Таким образом, поперечное схлопывание пакета неизбежно заканчивается дроблением его пространственной структуры и образованием нескольких вторичных мелкомасштабных сгустков поля.

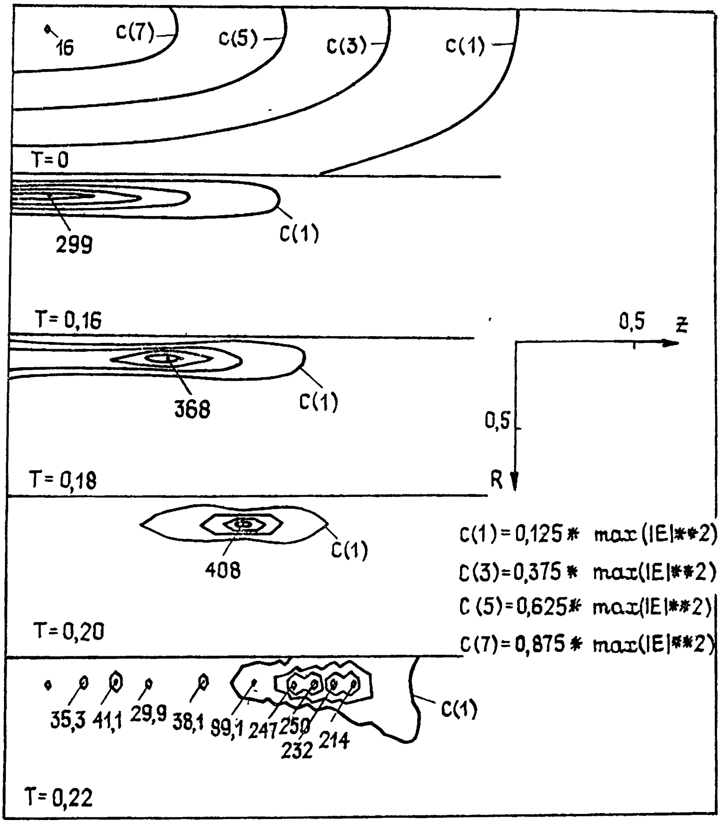

Рис. 3. Временная эволюция пакета, заданного в начальный момент в виде $E(r,z,0)=4\exp(-r^2/2-z^2/32)$.

Эволюция вторичных структур протекает по сходному с описанным выше сценарию. Возможность поперечной самофокусировки для них объясняется тем, что в процессе дробления исходного распределения имеет место локальное подрастание амплитуды поля в образующихся сгустках за счет перераспределения плотности энергии колебаний в продольном направлении. Следовательно, в отличие от эффекта трехмерного схлопывания колебаний в среде с положительной дисперсией в рассматриваемой ситуации элементарный акт нелинейной динамики поля состоит из последовательности процессов поперечного сжатия и продольного дробления пространственной структуры, в результате чего в системе рождаются все более мелкомасштабные сгустки ВЧ поля. Описанная картина самовоздействия подтверждается численными исследованиями динамики аксиально-симметричных локализованных распределений с начальной гауссовой формой поля:

$$E\,(r,\ z,\ t=0)=A_0\exp\left(-r^2/2a_0^2-z^2/2b_0^2\right). \tag{14}$$

На рис. 3 изображены линии уровня функции $|E\,(r,\ z,\ t)|^2$ и ее локальные максимумы в последовательные моменты времени для параметров $A_0=4$, $a_0=1$, $b_0=4$. На начальной стадии эволюция пакета происходит преимущественно в поперечном направлении. Прежде всего выделяется центральная часть распределения, которая начинает интенсивно сжиматься по r. Однако сжатие это неравномерное по z: в центре, где амплитуда больше, процесс происходит быстрее, чем на периферии. В результате в центре образуется перетяжка. С этого момента начинается преимущественно продольная эволюция решения. Перетяжка рвется, энергия быстро выбрасывается из центра пакета в стороны по z к его краям. Пакет, таким образом, делится на две части, каждая из которых, с точки зрения последующей эволюции, может рассматриваться как начальные условия типа (14) с другими значениями параметров $\widetilde{A}_0$, $\widetilde{a}_0$, $\widetilde{b}_0$. Действительно, после деления вторичные сгустки вновь начинают сжиматься по r. Затем на этом фоне развивается периодическая структура с характерным масштабом по z порядка поперечной ширины, после чего все распределение начинает медленно расплываться в обоих направлениях. Однако в зависимости от начальной мощности пакета описанный процесс может повториться один или еще несколько раз. Наблюдаемые в данном численном эксперименте две стадии измельчения пространственной структуры, по-видимому, соответствуют нашим представлениям о двух типах неустойчивости поперечного сжатия.

Вопрос о полном числе актов дробления представляется достаточно сложным. Следует заметить, что оно является конечным для эволюции локализованного пакета в неограниченной области пространства, поскольку средняя плотность энергии, приходящаяся на единицу длины в продольном направлении, с течением времени уменьшается (см. (4)). Когда она станет меньше критического значения, поле начинает дефокусироваться по всем направлениям (как это следует из безаберрационного приближения). Именно такое поведение (при достаточно больших t) демонстрирует нам численный эксперимент.

Другой оказывается ситуация при исследовании самовоздействия в системе с периодическими по z граничными условиями.

Ограниченность пространства эволюции по z в этом случае препятствует продольной дефокусировке распределения в целом, так что сохраняется полная энергия на периоде, а следовательно, сохраняется и начальное превышение средней по z погонной плотности энергии колебаний над критической $P_{z\text{кр}}$. Такое превышение должно приводить к бесконечному повторению актов сжатия и дробления на все более мелкомасштабном уровне. Учитывая, что при уменьшении размеров сгустков ВЧ поля сохраняется качественное подобие процесса их самодробления, в целом данный тип эволюции волн в нелинейной среде естественно назвать фрактальным коллапсом трехмерного волнового пакета.

Последовательное измельчение пространственной структуры в системе с периодическими граничными условиями наблюдалось нами в численном эксперименте, результаты которого приведены на рис. 4. Начальные условия для поля задавались в форме

$$\begin{gathered}E\,(r,\ z,\ t=0)=5\exp\left(-r^2/2\right)\left[1+0{,}01\cos\left(\pi z/2+\pi/3\right)+\right.\\ +0{,}02\cos\pi(z+0{,}2)+0{,}01\cos\left(1{,}5\,\pi z\right)+0{,}01\cos\pi\left(z+0{,}75\right)+\\ \left.+0{,}02\cos\pi\left(2{,}5\,z+2/3\right)\right],\end{gathered} \tag{15}$$

которая представляет собой однородное по z распределение со слабой модуляцией, имитирующей случайные возмущения амплитуды.

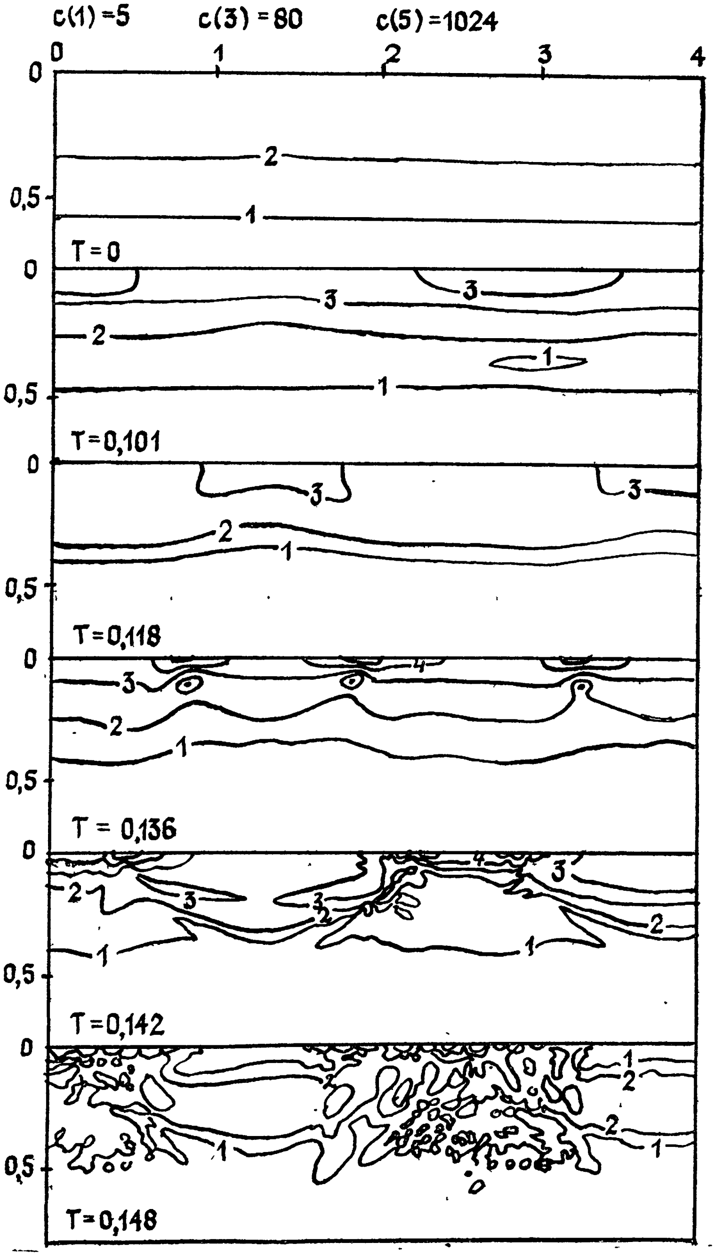

Рис. 4. Временная эволюция периодического по z начального распределения (15).

Таким образом, совокупность изложенных теоретических результатов позволяет утверждать, что в исследуемой системе реализуется принципиально новая динамика сильной турбулентности. Ее главной особенностью является последовательное измельчение структуры ВЧ поля за счет рождения новых ячеек турбулентности. При этом, несмотря на дефокусирующий характер нелинейности в продольном направлении, имеет место модуляционная неустойчивость, и в результате многократно повторяющихся актов дробления осуществляется передача энергии вверх по спектру волновых чисел. Для многих приложений рассмотренной выше теоретической ситуации (например волны в плазме) такое дробление должно приводить к эффективному поглощению энергии турбулентности в нелинейной среде.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аскарьян Г. А. — ЖЭТФ, 1962, **42**, с. 1567.
2. Беспалов В. И., Литвак А. Г., Таланов В. И. В кн.: Нелинейная оптика: Труды симпозиума. — Новосибирск, 1968, с. 428.
3. Власов С. Н., Петрищев В. И., Таланов В. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1971, **14**, № 9, с. 1353.
4. Фрайман Г. М. — ЖЭТФ, 1985, **88**, с. 390.
5. Власов С. Н., Пискунова Л. В., Таланов В. И. — ЖЭТФ, 1978, **75**, с. 1602.
6. Chiao R. J., Garmire E., Townes. H. — Phys. Rev. Lett, 1964, **13**, p. 469.
7. Захаров В. Е., Рубенчик А. М. — ЖЭТФ, 1973, **65**, с. 997.
8. Захаров В. Е. — ЖЭТФ, 1972, **62**, с. 1745.
9. Захаров В. Е. — ПМТФ, 1968, **9**, с. 86.
10. Литвак А. Г., Сергеев А. М. — В сб.: Высокочастотный нагрев плазмы. — Горький, 1983, с. 324.
11. Myra J. R., Liu C. S. — Phys. Fluids, 1980, **23**, p. 2258.
12. Малкин В. М. — ЖЭТФ, 1984, **87**, с. 433.
13. Таланов В. И. — Письма в ЖЭТФ, 1971, **11**, с. 303.

Институт прикладной физики
АН СССР

COLLAPSE AND MULTIPLE FRACTIONATION OF NONLINEAR WAVE STRUCTURES

N. A. Zharova, A. G. Litvak, T. A. Petrova, A. M. Sergeev, A. D. Yunakovskij

It is shown analytically and numerically that the self-interaction of wave structures in a nonlinear medium with anomalous dispersion appears in the form of a multiple (cascade) fractionation of three-dimensional bunches of the field (a fractional collapse).

ВНИМАНИЮ АВТОРОВ!

Всесоюзное Агентство по авторским правам (ВААП) сообщает, что журнал «Радиофизика», изданный в СССР в 1980—82 гг., перепечатан за рубежом. Гонорар, поступивший за право его перепечатки, выплачивается по желанию авторов в рублях или чеках Внешпосылторга.

Для получения гонорара авторам необходимо оформить справку-заявление и направить ее на расчет по адресу:

103670, Москва, ул. Б. Бронная, 6-а, Валютное управление ВААП.

Агентство также извещает авторов о следующем:

— 1 сентября 1986 г. прекращается прием справок-заявлений на выплату гонорара за статьи, опубликованные в журнале в 1980 г.;

— 1 декабря 1986 г. прекращается прием справок-заявлений на выплату гонорара за статьи, опубликованные в 1981 г.;

— 1 января 1987 г. прекращается прием справок-заявлений на выплату гонорара за перепечатку за рубежом статей, опубликованных в журнале в 1982 г.