ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXIX, № 9 РАДИОФИЗИКА 1986

УДК 532,59+530.182

УДАРНЫЕ ВОЛНЫ, РАСПРОСТРАНЯЮЩИЕСЯ ПО СОЛИТОНАМ НА ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ

В. Е. Захаров

Методом обратной задачи построено точное решение уравнения Кадомцева—Петвиашвили, описывающего слабонелинейные волны на поверхности неглубокой жидкости. Решение описывает «волну выпрямления», распространяющуюся по искривленному солитону. Одновременно получены классы точных решений для одномерного уравнения теплопроводности с источником.

1. В 1974 году была установлена [1] применимость метода обратной задачи рассеяния (МОЗР) к некоторым нелинейным волновым гамильтоновым системам в двумерном пространстве. Наиболее известной из таких систем является уравнение Кадомцева—Петвиашвили (КП)

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_t + 6\,uu_x + u_{xxx}) = 3\alpha^2 u_{yy}, \tag{1.1}$$

описывающее слабонелинейные волны в средах с малой дисперсией. В зависимости от знака дисперсии различаются два случая: $\alpha^2 = -1$ (уравнение КП-1) и $\alpha^2 = +1$ (уравнение КП-2). В этом последнем случае уравнение (1.1) описывает гравитационные волны на поверхности неглубокой жидкости. В обоих случаях уравнение (1.1) имеет точное решение в виде простого солитона

$$u = \frac{2\varkappa^2}{\mathrm{ch}^2 \varkappa\,(x - 4\varkappa^2 t)}. \tag{1.2}$$

Еще в 1970 г. было установлено [2], что в рамках уравнения КП-1 солитон неустойчив и имеет тенденцию к самопроизвольному изгибанию. Напротив, в рамках уравнения КП-2 солитон устойчив. По солитону могут распространяться колебания звукового типа, обладающие некоторым затуханием, природа которого состоит в излучении звуковых волн в пространство позади распространяющегося солитона. Инкремент неустойчивости солитона (для случая КП-1) и закон дисперсии звука, включая его затухание (для случая КП-2), были точно вычислены при помощи МОЗР в работе [3] (см. по этому поводу также работу [4]).

В настоящей работе будут предъявлены точные решения уравнения КП-2, описывающие нелинейное распространение звука по солитону. Соответствующие решения содержались еще в работах [1,3], но не были должным образом интерпретированы. Рассмотрение показывает, что эти решения описывают распространение по солитону «волн выпрямления», подобных тем, которые могут распространяться по предварительно искривленной растянутой нити в вязкой среде. При выпрямлении происходит потеря энергии солитона в виде звука, распространяющегося назад. Поэтому такие волны можно рассматривать еще как ударные волны разрежения, сопровождающиеся изгибом солитона. Представляется вероятным, что найденные решения могут оказаться полезными при изучении распространения солитонов в реальных ситуациях. Например, их можно применить для описания поведения волны цунами, прошедшей зону неоднородности дна океана.

2. Рассмотрим ситуацию, которая возникает при попытках применить точные методы, объединенные под общим названием «метод обратной задачи», к нелинейным уравнениям, в том числе к уравнению КП-2. Это применение удобно осуществить в два этапа. На первом из них целесообразно предъявить способ построения достаточно обширного класса точных решений рассматриваемого уравнения. Это относительно легко сделать, если сделать вообще возможно, т. е. если уравнение является одним из списка, условно говоря, интегрируемых при помощи МОЗР уравнений (уравнение КП к этому списку относится). Далее необходимо из полученного набора решений выбрать те, которые нас действительно интересуют, т. е. решают заранее поставленную для уравнения начальную или краевую задачу. Даже для наиболее просто поставленных задач это может оказаться трудной проблемой. Так, задача Коши для уравнения КП-2 во всей плоскости xy при быстроубывающих при $|x^2+y^2|\to\infty$ начальных условиях была решена лишь в 1983 г. в работе [5]. Ниже будет показано, что результаты этой работы можно воспроизвести очень просто. Весьма важная для приложений задача Коши в плоскости xy при убывающих при $|x|\to\infty$, но ограниченных при $|y|\to\infty$ начальных данных до сих пор не решена, и подход к ее решению неизвестен. Тем более это относится к краевым задачам. Причина трудностей здесь состоит в том, что найденные точные решения в общем положении имеют на плоскости xy более или менее сильные особенности и не имеют физического смысла. Поэтому разумной является задача о выделении точных решений, заведомо свободных от особенностей, даже если они, возможно, и не решают никакой начальной или краевой задачи. Такие решения имеют физический смысл и могут быть использованы в приложениях. К их числу относятся и построенные нами решения типа волн выпрямления солитонов.

3. Рассмотрим способ построения точных решений уравнения (1.2), описанных в [1]. Пусть дано уравнение Гельфанда—Левитана—Марченко

$$K(x,z)+F(x,z)+\int\limits_x^\infty K(x,s)\,F(s,z)\,ds=0. \tag{3.1}$$

Здесь $F(x,z)$ — известная, а $K(x,z)$ — неизвестная функции. Обе они зависят еще от дополнительных переменных y и t. Пусть функция F подчиняется двум уравнениям:

$$\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}=0; \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial t}+4\left(\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 F}{\partial z^3}\right)=0. \tag{3.3}$$

Тогда функция $u(x,y,t)=2\dfrac{d}{dx}K(x,x,y,t)$ подчиняется уравнению (1.1).

Вместо уравнения (3.1) можно использовать уравнение

$$K(x,z)+F(x,z)+\int\limits_{-\infty}^{x} K(x,s)\,F(s,z)\,ds=0. \tag{3.4}$$

Полученные решения будут отличаться от предыдущих заменой $x\to -x$, $t\to -t$, допускаемой уравнением (1.1).

Перед тем как переходить к анализу отдельных решений уравнения (1.1), которые можно получать при помощи описанной процедуры, заметим, что эта процедура может быть существенно обобщена [6,7]. Представим функции F и K в виде

$$F = \iint\limits_{\substack{\mathrm{Re}\lambda_1>0\\ \mathrm{Re}\lambda_2>0}} T(\lambda_1, \bar\lambda_1, \lambda_2, \bar\lambda_2) \exp[-(\lambda_1 x + \lambda_2 z) - \tag{3.5}$$
$$-(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)y + 4(\lambda_1^3 - \lambda_2^3)t]\, d\lambda_1 d\bar\lambda_1 d\lambda_2 d\bar\lambda_2;$$

$$K = \int\limits_{\mathrm{Re}\lambda>0} K(\lambda, \bar\lambda, x, y, t) \exp(-\lambda z + \lambda^2 y + 4\lambda^3 t)\, d\lambda\, d\bar\lambda. \tag{3.6}$$

Очевидно, F удовлетворяет уравнениям (3.2), (3.3). Подставляя (3.5), (3.6) в (3.1), получим интегральное уравнение

$$K(\lambda, \lambda, x, y, t) + \int T(\lambda_1, \bar\lambda_1, \lambda, \bar\lambda) \exp(-\lambda_1 x - \lambda_1^2 y + 4\lambda_1^3 t)\, d\lambda_1 d\bar\lambda_1 +$$
$$+ \iint \left(\frac{K(\lambda_1, \bar\lambda_1, x, y, t)\, T(\lambda_2, \bar\lambda_2, \lambda, \bar\lambda)}{\lambda_1 + \lambda_2} \times \right. \tag{3.7}$$
$$\left. \times \exp[-(\lambda_1 + \lambda_2)x + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)y + 4(\lambda_1^3 + \lambda_2^3)t] \right) d\lambda_1 d\bar\lambda_1 d\lambda_2 d\bar\lambda_2 = 0.$$

В уравнении (3.7) сознательно не указаны области, по которым происходит интегрирование. Согласно схеме [1] это должны быть области $\mathrm{Re}\,\lambda_1 > 0$, $\mathrm{Re}\,\lambda_2 > 0$. При этом знаменатель в (3.7) не обращается в нуль. Однако в работах [6,7] показано, что уравнением (3.7) можно пользоваться, считая, что интегрирование распространено на полные комплексные плоскости λ_1, λ_2. Интеграл в (3.7) понимается при этом в смысле главного значения

$$\frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{|\lambda_1 + \lambda_2|^2 + \varepsilon^2}\ . \tag{3.8}$$

Для решения $u(x, y, t)$ теперь имеем

$$u(x, y, t) = 2\frac{d}{dx} \int K(\lambda, \bar\lambda, x, y, t) \exp(-\lambda x + \lambda^2 y + 4\lambda^3 t)\, d\lambda\, d\bar\lambda. \tag{3.9}$$

Формула (3.9) позволяет нам угадать, в каком виде следует искать ядро $T(\lambda_1, \bar\lambda_1, \lambda, \bar\lambda)$, чтобы получить убывающие в плоскости решения. Пусть искомое решение является достаточно малым. Тогда приближенно можно получить

$$K(\lambda, \bar\lambda, x, y, t) = -\int T(\lambda_1, \bar\lambda_1, \lambda, \bar\lambda) \exp(-\lambda_1 x - \lambda_1^2 y + 4\lambda_1^3 t)\, d\lambda_1 d\bar\lambda_1,$$
$$u = -2\frac{d}{dx} \int T(\lambda_1, \bar\lambda_1, \lambda, \bar\lambda) \exp[-(\lambda + \lambda_1)x + (\lambda^2 - \lambda_1^2)y + \tag{3.10}$$
$$+ 4(\lambda_1^3 - \lambda^3)t]\, d\lambda_1 d\bar\lambda_1.$$

Для убывания $u \to 0$, при $x^2 + y^2 \to 0$ необходимо

$$\mathrm{Re}(\lambda + \lambda_1) = 0, \quad \mathrm{Re}(\lambda_2 - \lambda_1^2) = 0, \tag{3.11}$$

что дает $\lambda_1 = -\bar\lambda$, т. е.

$$T(\lambda_1, \bar\lambda_1, \lambda, \bar\lambda) = R(\lambda, \bar\lambda)\, \delta(\lambda_1 + \bar\lambda)\, \delta(\bar\lambda_1 + \lambda).$$

Уравнение (3.7) приобретает теперь вид

$$K(\lambda, \bar\lambda, x, y, t) + R(\lambda, \bar\lambda) \exp(\bar\lambda x - \bar\lambda^2 y - 4\bar\lambda^3 t) + \tag{3.12}$$
$$+ \iint \frac{K(\lambda_1, \bar\lambda_1, x, y, t)\, R(\lambda, \bar\lambda)}{\lambda_1 - \bar\lambda} \times$$

$$\times \exp\left[-(\lambda_1-\overline{\lambda})\,x+(\lambda_1^2-\overline{\lambda}^2)\,y\right] d\lambda_1 d\overline{\lambda}_1=0$$

и становится эквивалентным интегральному уравнению, выведенному для быстроубывающего случая в работе [5] совершенно другим способом. Заметим, что при произвольном $R(\lambda,\overline{\lambda})$ мы получим, вообще говоря, комплексные решения уравнения (1.1). Для получения вещественных решений необходимо наложить требование

$$\overline{R}(\overline{\lambda},\lambda)=R(\overline{\lambda},\lambda). \tag{3.13}$$

Факт быстрого убывания решения в плоскости xy для конечных T легко проверить по индукции, рассматривая итерации в уравнении (3.12). Ряд итераций будет сходиться для достаточно малых $R(\lambda,\overline{\lambda})$, точные условия его сходимости неизвестны.

4. Перейдем к построению точных решений другого типа, не сводящихся к быстроубывающим. Будем исходить из уравнения Марченко (3.1) и искать его решение в виде

$$F(x,z,y,t)=\varphi(x,y,t)\,\psi(z,y,t). \tag{4.1}$$

Функции φ и ψ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=0,\quad \frac{\partial\psi}{\partial y}-\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=0, \tag{4.2}$$

а также уравнениям

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+4\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3}=0,\quad \frac{\partial\psi}{\partial t}+4\frac{\partial^3\psi}{\partial z^3}=0. \tag{4.3}$$

После подстановки (4.1) в уравнение (3.1) имеем

$$u=2\frac{d^2}{dx^2}\ln\Delta,\quad \Delta=1+\int_x^\infty \varphi(x)\,\psi(x)\,dx. \tag{4.4}$$

Вопрос о выборе функций φ и ψ далеко не тривиален. Функция ψ удовлетворяет уравнению теплопроводности, некорректному при $y\to-\infty$, а функция φ — обратному уравнению теплопроводности, некорректному при $y\to\infty$. Если функция $\Delta(x,y)$ обращается в нуль на некоторой кривой $x=x_0(y)$, на этой кривой возникают особенности типа

$$u=2\frac{1}{(x-x_0(y))^2}.$$

Для отсутствия особенностей необходимо выполнение жесткого условия

$$\Delta>0. \tag{4.5}$$

Этому условию можно удовлетворить, если положить

$$\varphi=\int_0^\infty f(\lambda)\exp(-\lambda x-\lambda^2 y+4\lambda^3 t)\,d\lambda; \tag{4.6}$$

$$\psi=\int_0^\infty g(\lambda)\exp(-\lambda x+\lambda^2 y+4\lambda^3 t)\,d\lambda, \tag{4.7}$$

где $f(\lambda)\geqslant 0$, $g(\lambda)\geqslant 0$ — неотрицательные вещественные функции. При

$$f(\lambda)=g(\lambda). \tag{4.8}$$

Решение (4.4) является симметричным относительно замены $y\to-y$.

К решениям типа (4.4) принадлежит солитон (1.2). В этом случае

$$f(\lambda) = g(\lambda) = \sqrt{2\varkappa}\,\delta(\lambda - \varkappa). \tag{4.9}$$

Рассмотрим решения типа (4.4), близкие к солитону (1.2) в том смысле, что функции $f(\lambda)$ и $g(\lambda)$ сосредоточены на узких носителях вблизи точки $\varkappa$: $(\varkappa - a) < \lambda < (\varkappa + a)$, $a \ll \varkappa$. В этом случае выражение для Δ

$$\Delta = 1 + \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{f(\lambda_1)\, g(\lambda_2)}{\lambda_1 + \lambda_2} \times$$
$$\times \exp\left[-(\lambda_1 + \lambda_2)\, x - (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)\, y + 4(\lambda_1^3 + \lambda_2^3)\, t\right] d\lambda_1\, d\lambda_2 \tag{4.10}$$

упрощается до вида

$$\Delta = 1 + e^{-2\varkappa x'}\, \Phi(x' + 2\varkappa y - 8\varkappa^2 t)\, \Psi(x' - 2\varkappa y - 8\varkappa^2 t) \tag{4.11}$$

Здесь $x' = x - 4\varkappa^2 t$ — координата в системе отсчета солитона, а

$$\Phi(s) = \sqrt{2\varkappa} \int_{\varkappa - a}^{\varkappa + a} f(\lambda)\, e^{-\lambda s}\, d\lambda; \tag{4.12}$$

$$\Psi(s) = \sqrt{2\varkappa} \int_{\varkappa - a}^{\varkappa + a} g(\lambda)\, e^{-\lambda s}\, d\lambda. \tag{4.13}$$

Пусть $f(\lambda) = g(\lambda) = A = \mathrm{const}$, так что решение симметрично относительно замены $y \to -y$.

Рассмотрим выражение (4.11) в асимптотической области $2\varkappa y \gg 8\varkappa^2 t$. Здесь асимптотика не зависит от времени:

$$\Delta = 1 + \frac{A^2}{y^2} \exp\left[-2\varkappa(x + 2\varkappa a y)\right]. \tag{4.14}$$

Эта асимптотика соответствует слабо изогнутому солитону, вершина которого расположена на линии

$$x = -2\varkappa a y - \frac{1}{2\varkappa} \ln \frac{A^2}{y^2}. \tag{4.15}$$

Амплитуда солитона вдоль линии является постоянной и равна $\varkappa^2$.

Пусть теперь $y \ll 4\varkappa t$. Здесь зависимостью от y можно пренебречь, имеем

$$\Delta \simeq 1 + \frac{A^2}{16\varkappa^4 t^2} \exp\left\{-2\left[(\varkappa - a)\, x' + 8\varkappa^2 a t\right]\right\}, \quad x' = x - 4\varkappa^2 t. \tag{4.16}$$

Выражение (4.16) соответствует «выпрямленному» солитону уменьшенной амплитуды $2(\varkappa - a)^2$, распространяющемуся назад со скоростью

$$V = \frac{8\varkappa^2 a}{\varkappa - a} + \frac{1}{2\varkappa t}.$$

Уменьшение амплитуды солитона объясняется излучением волн малой амплитуды назад в зону отрицательных значений координаты x'. Таким образом, волну выпрямления можно трактовать как ударную волну разряжения.

При более сложных выборах $f(\lambda)$ и $g(\lambda)$ возникает достаточно богатый набор точных решений уравнения КП-2. Если эти функции содержат в себе сингулярные компоненты в виде δ-функций от λ, то в фоне излучения $x' \to -\infty$ будут присутствовать солитоны меньшей амплитуды, отделяющиеся в результате выпрямления основного солитона.

5. Применение метода обратной задачи к уравнению (1.1) основано на том, что это уравнение есть условие совместности переопределенной линейной системы:

$$\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + u\Phi = 0; \tag{5.1}$$

$$\Phi_t + 4\Phi_{xxx} + 6u\Phi_x + 3\,(u_x + \alpha w)\,\Phi = 0, \quad w_x = uy. \tag{5.2}$$

Построение точных решений уравнения КП одновременно позволяет строить точные решения этой линейной системы. Они задаются формулами

$$\Phi\,(x, y, t) = \Phi_0\,(x, y, t) + \int\limits_x^\infty K\,(x, s, y, t)\,\Phi_0\,(s, y, t)\,ds. \tag{5.3}$$

Здесь Φ_0 — произвольное решение невозмущенной системы

$$\alpha \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} + \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x^2} = 0, \quad \Phi_{0t} + 4\Phi_{0xxx} = 0, \tag{5.4}$$

а $K\,(x, z, y, t)$ — решение уравнения Марченко, которое в данном случае имеет вид

$$K\,(x, z, y, t) = -\frac{\varphi\,(x, y, t)\,\psi\,(z, y, t)}{1 + \int\limits_x^\infty \psi(s, y, t)\,\psi(s, y, t)\,ds}. \tag{5.5}$$

При $\alpha = \pm 1$ уравнение (5.1) представляет собой уравнение теплопроводности с источниками, и построение его точных решений имеет большое прикладное значение для геофизических задач, в частности для задач электроразведки. Поэтому весьма актуальной является задача расширения класса функций $u(x, y)$, при которых такое решение возможно (одновременно — это расширение класса точных решений уравнения КП). Для этого можно было бы, обобщая использованную выше процедуру, выбирать в (3.7) ядро T в виде вырожденного

$$T\,(\lambda_1, \overline{\lambda}_1, \lambda, \overline{\lambda}) = \sum_{n=1}^{N} f_n\,(\lambda_1, \overline{\lambda_1})\,g'_n\,(\lambda, \overline{\lambda}). \tag{5.6}$$

Уравнение (3.7) при этом превратится в конечную систему линейных алгебраических уравнений и легко решится. Нерешенным, однако, является вопрос, какие ограничения следует наложить на функции f_n и g_n для того, чтобы полученное решение не имело особенностей. Решение этого вопроса является актуальной задачей ближайшего будущего.

ЛИТЕРАТУРА

1. Захаров В. Е., Шабат А. Б. — Функциональный анализ и его приложения, 1974, 6, вып. 3, с. 43.
2. Кадомцев Б. Б., Петвиашвили В. И. — ДАН СССР, 1970, 192, вып. 4, с. 753.
3. Захаров В. Е. — Письма в ЖЭТФ, 1975, 22, с. 364.
4. Бурцев С. П. — ЖЭТФ, 1985, 88, вып. 2, с. 461.
5. Ablowitz M. J., Bar Yaacov D., Fokas A. S. — Studies Appl. Math., 1983, 69, p. 135.
6. Захаров В. Е., Манаков С. В. — Зап. научн. семинаров ЛОМИ, 1984, 153, с. 190.
7. Захаров В. Е., Манаков С. В. — Функциональный анализ и его приложения, 1985, 19, вып. 2, с. 11.

Институт теоретической физики
АН СССР

SHOCK WAVES PROPAGATING ON SOLITONS ON THE SURFACE OF A FLUID

V. E. Zakharov

The inverse problem method is used to construct an exact solution to the Kadomtsev — Petviashvili equation describing weakly nonlinear waves on the surface of a shallow fluid. The solution describes an «erection wave» propagating on a curved soliton. Classes of exact solutions to a one-dimensional equation of thermal conductivity with a source are obtained.

ГЕОМАГНЕТИЗМ И АЭРОНОМИЯ, т. XXVI, № 2, 1986 г.

Смирнов В. С., Остапенко А. А. Поперечные резонансы волновода Земля—ионосфера в авроральной области.

Рассмотрена тонкая структура спектральных и поляризационных характеристик поперечных резонансов волновода Земля—ионосфера в условиях различных авроральных возмущений. Показано, что относительная величина расщепления резонансных частот, обусловленная геомагнитным полем, мала, а добротности резонансных колебаний правой и левой поляризации могут отличаться в несколько раз.

Дружин Г. И., Торопчинова Т. В., Шапаев В. И. Регулярный шумовой фон в ОНЧ-излучении и мировые очаги гроз.

В периоды высокоширотных экспедиций проводились эксперименты по регистрации ОНЧ-излучений при различных ориентациях рамочной антенны. Анализ соотношений между амплитудами РШФ при различных положениях антенны показал, что принимаемое излучение можно аппроксимировать моделью двух источников, один из которых локализован, а другой «изотропен» по азимуту. Детально исследованы азимутальные углы прихода излучения от локализованных источников. Получена формула для определения азимута прихода сигнала. Анализ данных, полученных в осенне-зимние периоды и в различных пунктах регистрации, показал, что локализованными источниками РШФ являются мировые очаги гроз.

Чмырев В. М., Биличенко С. В., Казанская Ю. Б., Костин В. М., Лазарев В. И., Тельцов М. В. Авроральные частицы, связанные с нелинейными альфвеновскими волнами.

Найдены потоки электронов, переносимые альфвеновскими волнами в авроральной плазме. Определены коэффициенты отражения косых альфвеновских волн от ионосферы на частотах порядка 1 Гц. Обнаружены частицы — предвестники· дискретные всплески кэВ-электронов, которые регистрируются за несколько секунд до электромагнитного скачка (ЭМС) и возникают, по-видимому, в результате локального ускорения частиц выше спутника на расстоянии нескольких земных радиусов в авроральной зоне. Появление восходящих потоков горячих (надтепловых) ионов может быть обусловлено частичной диссипацией энергии ЭМС на столкновениях в ионосфере.
