

УДК 621.373.12.532

СТОХАСТИЧЕСКАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ КОЛЕБАНИЙ В ДИССИПАТИВНЫХ СИСТЕМАХ

В. С. Афраймович, Н. Н. Веричев, М. И. Рабинович

Экспериментально (на аналоговой моделирующей установке) обнаружено явление взаимной стохастической синхронизации диссипативно связанных автогенераторов шума. Явление заключается в почти полном совпадении хаотических реализаций генераторов с различными параметрами и наблюдается при достаточно большой величине связи. На примере ансамбля параметрических генераторов шума построена приближенная теория стохастической синхронизации.

1. В отличие от явления взаимной синхронизации периодических колебаний, в силу своей распространенности и привычности кажущегося сегодня очевидным, явление синхронизации стохастических колебаний, напротив, кажется чем-то маловероятным или даже невозможным. Действительно, основное свойство стохастического движения динамической системы — его локальная неустойчивость — при организации связи между разными стохастическими движениями на первый взгляд может только усиливаться. До настоящего времени было неясно, каковы механизмы, которые могли бы этому помешать. Один из таких механизмов выявлен в данной работе, где строится приближенная теория взаимной стохастической синхронизации простых параметрических генераторов шума и приводятся результаты эксперимента на аналоговой моделирующей установке.

Явление вынужденной стохастической синхронизации было обнаружено в 1984 году в работе [1] при численном исследовании процессов пространственного развития турбулентности в «потоковой» динамической системе — полубесконечной цепочке односторонне связанных тождественных автогенераторов. Было установлено, что периодические в начале (на границе) системы колебания при распространении вдоль цепочки превращаются в квазипериодические и затем в стохастические. На некотором j^* -м элементе цепочки колмогоровская энтропия [2] становится положительной и при дальнейшем продвижении вдоль j возрастает, как и размерность [2] предельного множества, восстановляемого по стохастической реализации. Однако, начиная с $j=j^{**}$, этот рост стабилизируется и средние характеристики хаоса (спектр мощности, энтропия, размерность) перестают зависеть от j . Обнаруженное явление можно интерпретировать следующим образом. Рассмотрим «блоки» из $N \geq j^*$ элементов цепочки, последовательно воздействующие друг на друга. Как показано в [3], в каждом из таких N элементарных стохастических автогенераторов достаточно быстро устанавливается метастабильный хаотический режим, который может изменяться в соответствии со свойствами внешнего сигнала (поступающего с предыдущего «блока среды»). Если этот сигнал гармонический, то возможна регуляризация хаоса — вниз по цепочке распространяется фронт перехода «хаос — периодические колебания», если же этот внешний сигнал хаотический, то можно ожидать еще большей хаотизации движения — увеличения энтропии и размерности. Тот факт, что наблюдается стационарность этих характеристик вдоль цепочки, как раз и есть проявление вынужденной стохастической синхронизации колебаний: каждый следующий автогенератор воспроизводит стохастический сиг-

нал, поступающий на его вход. В работе [4] явление вынужденной стохастической синхронизации подтверждено экспериментально на примере односторонне связанных стохастических автогенераторов с инерционной нелинейностью.

Явление взаимной стохастической синхронизации ранее не наблюдалось и не обсуждалось.

2. Взаимная стохастическая синхронизация колебаний наблюдалась нами в системе диссипативно связанных генераторов с хаотической индивидуальной динамикой:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= y_1, \quad \frac{dy_1}{dt} = -k_1 y_1 - x_1 (1 + q \cos \theta + x_1^2) - c (y_1 - y_2), \\ \frac{dx_2}{dt} &= y_2, \quad \frac{dy_2}{dt} = -k_2 y_2 - x_2 (1 + q \cos \theta + x_2^2) + c (y_1 - y_2), \\ \frac{d\theta}{dt} &= \Omega. \end{aligned} \quad (1)$$

Каждый из генераторов

$$\frac{d^2 x_{1,2}}{dt^2} + k_{1,2} \frac{dx_{1,2}}{dt} + (1 + q \cos \Omega t) x_{1,2} + x_{1,2}^3 = 0 \quad (2)$$

в широкой области параметров q, k демонстрирует хаотические колебания, свойства которых достаточно хорошо изучены [5-8]. Эти свойства были воспроизведены в аналоговом эксперименте. Сравнение результатов аналогового моделирования системы (2) с численными результатами [7] позволило убедиться в качественно правильном представлении всех наблюдаемых на аналоговом устройстве движений и бифуркаций по пути к хаосу. Из этого сравнения следует оценка точности количественных «аналоговых результатов» — около 5%.

Как известно, при изменении параметров (q или k) в системе (2) возможен кризис, в результате которого один тип хаотического странного аттрактора сменяется другим (см. рис. 1) — аттрактор из симметричного относительно начала координат становится несимметричным или наоборот. Ниже исследуется взаимодействие таких различных аттракторов при $c > 0$.

Предварительно обратим внимание на полную стохастическую синхронизацию движений, которая наблюдалась при взаимной связи идентичных генераторов. При $k_1 = k_2$, начиная с некоторого критического значения связи $c = c^*$, независимо от начальных условий в парциальных генераторах устанавливались совпадающие нерегулярные пульсации $x_1(t) \equiv x_2(t)$, $y_1(t) \equiv y_2(t)$ (рис. 2). В пятимерном пространстве системы (1) этому режиму отвечал странный аттрактор, проекции которого на подпространства $\{x_1, y_1\}$ и $\{x_2, y_2\}$ были идентичны*. При $c \leq c^*$ наблюдалась частичная стохастическая синхронизация: реализации $x(t) = x_1(t) - x_2(t)$ и $y(t) = y_1(t) - y_2(t)$ имели вид редкой последовательности коротких импульсов, частота появления которых резко падала при $c \rightarrow c^*$.

Стохастическая синхронизация наблюдалась и при различных параметрах индивидуальных генераторов. При этом суть эффекта заключалась в следующем. Проекции странного аттрактора на «парциальные подпространства» при $c > c^*$ оказывались одинаковыми (см. рис. 3), несмотря на качественное их различие при $c < c^*$, но движение по ним было не изохронным. На плоскости $\{x, t\}$ этому соответствовало движение точек $x_{1,2}(t)$ по практически одинаковым кривым, однако расстояние между точками было случайной функцией времени с нулевым средним.

* Это наблюдалось при $k_1 = k_2 = 0,46$, $q = 50$, $\Omega = 2$, $c = 10$.

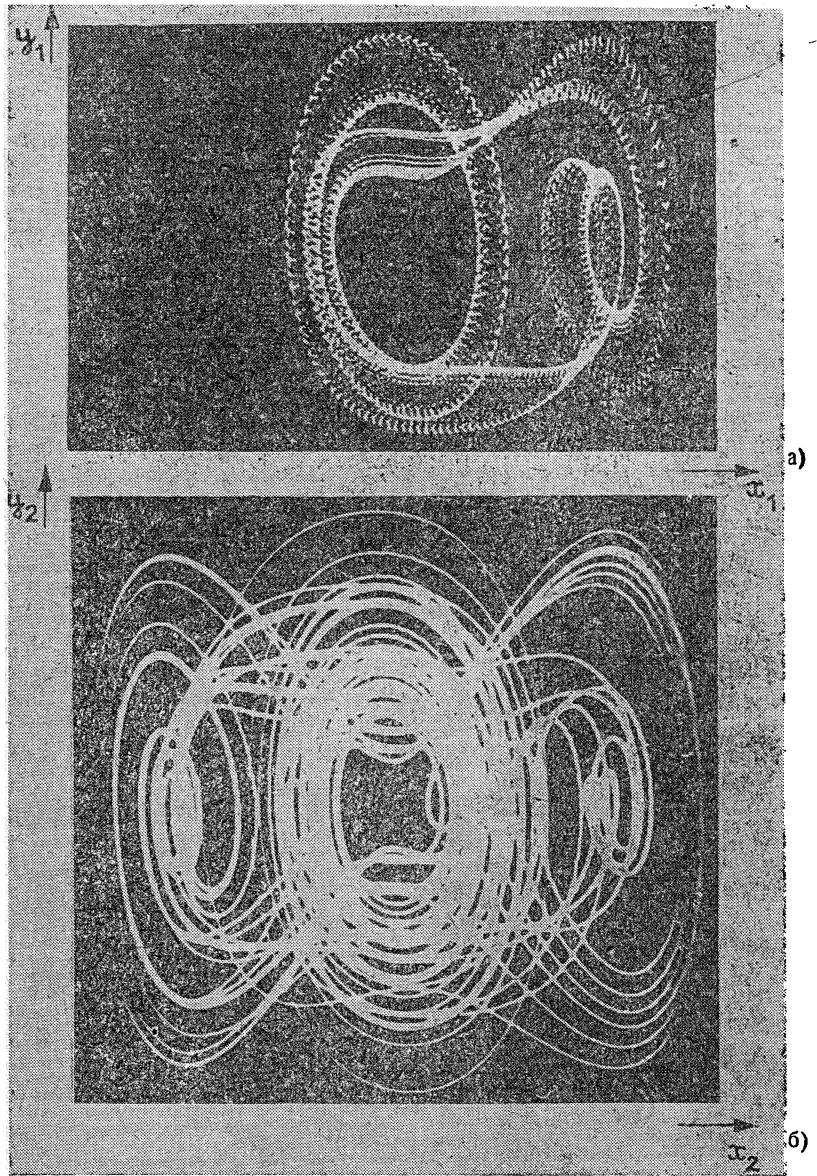


Рис. 1. Различные типы стохастических аттракторов в системе (2) ($q = 50$, $\Omega = 2$).
а) $k = 0,5$, б) $k = 0,46$.

3. Приближенную теорию явления стохастической синхронизации построим на примере ансамбля нетождественных параметрических автогенераторов с диссипативной взаимной связью *:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= y_i, \quad \dot{y}_i = -(k_i + c) y_i - x_i (\omega_i^2 + q_i \cos \theta) - F_i(x_i) + c \sum_{k \neq i} y_k, \\ \dot{\theta} &= \Omega, \quad i = 1, \dots \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь c характеризует величину связи, $|k_i - k_j| \ll k_{i,j}$, $|\omega_i - \omega_j| \ll \ll |\omega_{i,j}|$, $\|F_i - F_j\| \ll \|F_{i,j}\|$, причем $dF_i/dx_i \geq 0$, $\omega_i \neq 0^{**}$. Система (1) является частным случаем системы (3) при $N = 2$. Частными случаями ансамбля (3) являются и дискретные модели одномерных и неравновесных сред с диффузией, подобные рассмотренным в [9; 10].

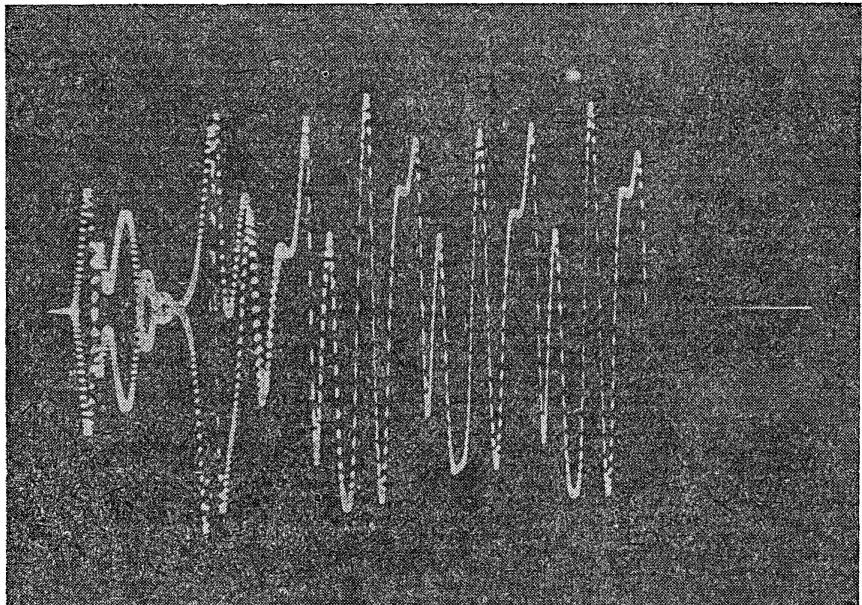


Рис. 2. Полная стохастическая синхронизация колебаний в генераторах с одинаковыми параметрами ($q = 50$, $\Omega = 2$, $k_1 = k_2 = 0,46$, $c = 10$) — с ростом t реализаций $x_1(t)$ и $x_2(t)$ становятся тождественными.

Предположим, что существует решение (3) $\{x_i(t, c), y_i(t, c)\}$, равномерно ограниченное по c , т. е. $|x_i(t)| \leq M$, $|y_i(t)| \leq M$, где M не зависит от c^{***} , и докажем близость проекций $x_i(t)$, $y_i(t)$ для всех $i = 1, \dots, N$ на бесконечном интервале времени.

Положим $x_j - x_i = u_{ij}$, $y_j - y_i = v_{ij}$, тогда (3) перепишется в виде

$$\begin{aligned} \dot{u}_{ij} &= v_{ij}, \quad \dot{v}_{ij} = -(k_i + 2c) v_{ij} - u_{ij} \left(\omega_i^2 + q \cos \Omega t + \right. \\ &\quad \left. + \frac{dF_i(x_i + \alpha_{ij} x_j)}{dx_i} \right) + \varepsilon_{ij}(x_i, y_i), \end{aligned} \quad (4)$$

где $\alpha_{ij} \in [0, 1]$, $\max |\varepsilon_{ij}| \leq \varepsilon$. Здесь ε характеризует величину разброса параметров индивидуальных автогенераторов.

* Проводимые ниже рассуждения проходят и для некоторых других типов диссипативной связи, определяемых, например, слагаемыми вида $c(y_{i+1} - y_i)$, $c(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1})$ и т. п. Кроме того, функцию $q_i \cos \theta$ можно заменить любой периодической функцией с нулевым средним.

** Эти условия означают, что в бездиссипативном пределе ансамбль (3) превращается в ансамбль нелинейных осцилляторов с «однокрым потенциалом».

*** Проведенный эксперимент показал, что все решения (3) обладают таким свойством.

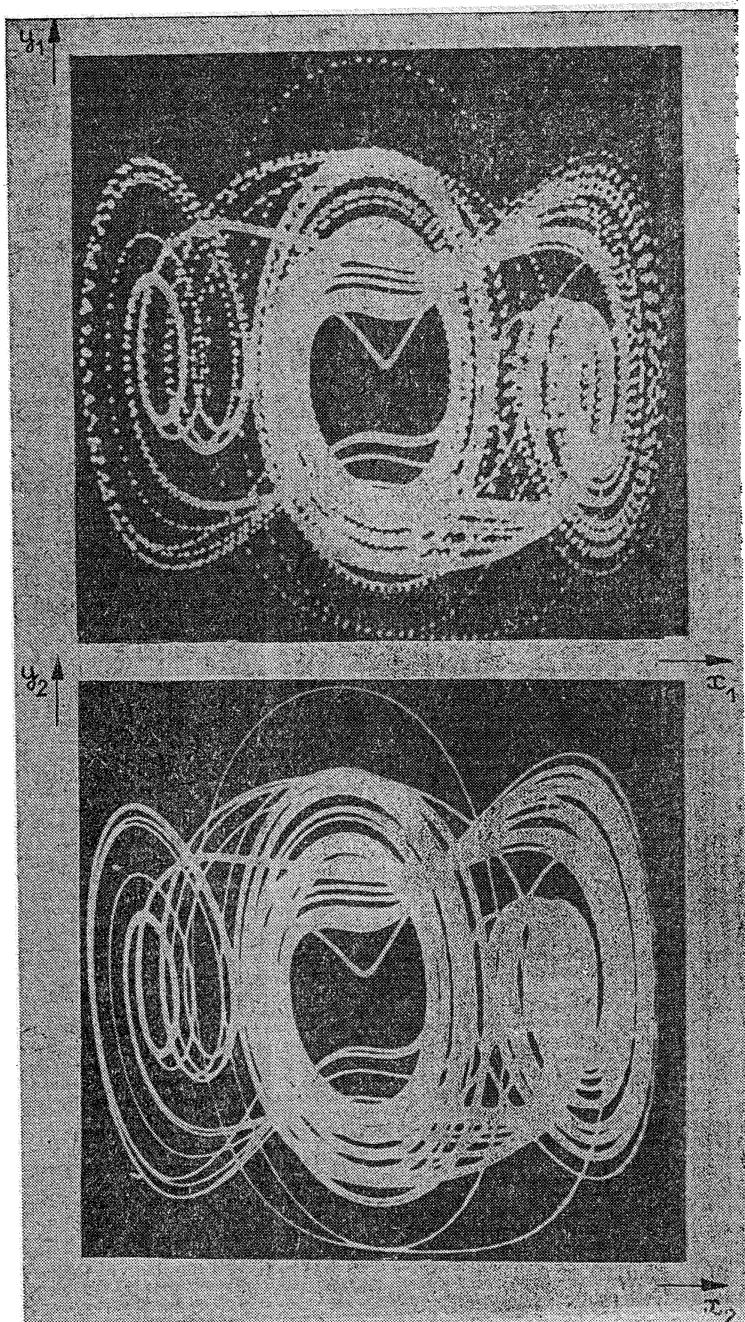


Рис. 3. Проекции странного аттрактора системы (1) на «парциальные подпространства» (x_1, y_1) и (x_2, y_2) ; $q=50$, $\Omega = 2$, $k_1 = 0,48$, $k_2 = 0,45$, $c = 10$ (ср. с рис. 1). Наблюдается режим стохастической синхронизации.

Зафиксируем произвольное равномерно ограниченное решение системы (3) и покажем, что $\limsup_{t \rightarrow \infty} |u_{ij}(t)| < K\epsilon$, $\limsup_{t \rightarrow \infty} |v_{ij}(t)| < K\epsilon$ для любых i, j . Положим $k_i + 2c = p_i$.

Замена

$$v_{ij} = \eta_{ij} + h_{ij}(t) u_{ij}, \quad (5)$$

где h_{ij} удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned} -m \leq h_{ij}(t) \leq e^{-p_i t} \frac{q_i \cos \alpha_i}{\sqrt{p_i^2 + \Omega^2}} - \frac{\omega_i^2}{p_i} (1 - e^{-p_i t}) - \\ - \frac{q_i}{\sqrt{p_i^2 + \Omega^2}} \cos(\Omega t - \alpha_i), \end{aligned} \quad (6)$$

$\alpha_i = \arcsin \Omega / \sqrt{p_i^2 + \Omega^2}$, $m > 0$, приводит (4) к виду

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_{ij} = -(k_i + 2c + h_{ij}(t)) \eta_{ij} + \varepsilon_{ij}(t), \\ \dot{u}_{ij} = \eta_{ij} + h_{ij}(t) u_{ij}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\varepsilon_{ij}(t) = \varepsilon_{ij}(x_i(t), y_i(t))$ (см. Приложение). Установившееся (при $t \rightarrow \infty$) решение (7) при достаточно больших c имеет вид

$$\eta_{ij} = \int_0^t \exp \left[- \int_\tau^t (k_i + 2c + h_{ij}(\xi)) d\xi \right] \varepsilon_{ij}(\tau) d\tau \sim \varepsilon / p_i. \quad (8)$$

Следовательно, согласно (6) — (8), установившееся решение

$$u_{ij}(t) = \int_0^t \exp \left(\int_\tau^t h_{ij}(\xi) d\xi \right) \eta_{ij}(\tau) d\tau \sim \varepsilon. \quad (9a)$$

В силу (5) аналогично имеем

$$v_{ij} \sim \varepsilon. \quad (9b)$$

В случае малых ε оценка (9) уже означает частичную синхронизацию (при неблизких к нулю $x_i(t)$, $y_i(t)$).

Внимательное рассмотрение соотношений (5) — (9) (см. Приложение) позволяет установить, что $v_{ij} \sim \varepsilon$. Это означает, что реализации $x_i(t)$ и $x_j(t)$ близки вместе с первыми и вторыми производными. Таким образом, интервалы возрастания и убывания, минимумы и максимумы функций находятся близко друг к другу, разница может быть лишь в окрестностях тех точек, где одновременно $\dot{x}=0$, $\ddot{x}=0$.

В случае малых $\varepsilon \approx 1/c$ можно доказать большее — «безынерционную» связь между различными проекциями $x_j(t)$, $y_j(t)$ (с точностью до ε^2). Для простоты будем далее считать, что индивидуальные генераторы различаются лишь по параметру k_i . Положим

$$(k_i - k_j) y_j = \varepsilon_{ij} = b_{ij} \mu y_j, \quad \text{где } \mu = 1/c.$$

Тогда замена

$$x_j = x_i + U_{ij} \mu, \quad y_j = y_i + V_{ij} \mu \quad (10)$$

приводит систему (3) к виду

$$\begin{aligned} \dot{U}_{ij} = V_{ij}, \quad \mu \dot{V}_{ij} = -V_{ij} (2 + \mu k_i) + b_{ij} \mu y_j(t) - \\ - \mu U_{ij} \left(\omega_i^2 + q_i \cos \Omega t + \frac{dF_i(x_i(t))}{dx_i} \right) + O(\mu^2). \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь $U_{ij} = (1/\mu) u_{ij}$, $V_{ij} = (1/\mu) v_{ij}$ ограничены в силу (9).

По известной теореме (см., например, [11]) система (11) имеет при малых μ многообразие медленных движений, на котором лежат ее ограниченные решения. С точностью до членов более высокого порядка это многообразие записывается в виде

$$V_{ij} = -\frac{1}{2} U_{ij} \left(\omega_i^2 + q_i \cos \Omega t + \frac{dF_i(x_i(t))}{dx_i} \right) + \frac{1}{2} b_{ij} \mu y_j. \quad (12)$$

Из (11) и (12), учитывая, что $y_j = \dot{x}_j$, а $\omega_i \neq 0$, получаем, что в установившемся режиме

$$U_{ij} = (1/2) b_{ij} \mu x_j, \quad V_{ij} = (1/2) b_{ij} \mu y_j, \quad (13)$$

следовательно, в силу (10),

$$x_i = x_j \left(1 - \frac{1}{2} b_{ij} \mu^2 \right), \quad y_i = y_j \left(1 - \frac{1}{2} b_{ij} \mu^2 \right) \quad (14)$$

с точностью до членов более высокого порядка, т. е. все x_i (как и y_i) с точностью до μ^2 являются алгебраическими функциями друг друга.

4. Полученные результаты дают возможность предложить строгое математическое определение стохастической синхронизации. Дадим его для случая $N = 2$. Пусть

$$\dot{x}_1 = F_1(x_1), \quad \dot{x}_2 = F_2(x_2), \quad x_1 \in R^m, \quad x_2 \in R^n$$

— системы, описывающие первый и второй автогенераторы. Предположим, что каждая из этих систем имеет аттрактор A_1 и A_2 соответственно. Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = F_1(x_1) + cf_1(x_1, x_2), \quad \dot{x}_2 = F_2(x_2) + cf_2(x_1, x_2). \quad (15)$$

Будем говорить, что имеет место синхронизация (в частности, стохастическая) для значений параметра связи из интервала $c_1 < c < c_2$, если для этих значений c у системы (15) существует аттрактор A_c , такой, что: 1) его образы $\pi_1(A_c)$ и $\pi_2(A_c)$ при проекциях на «парциальные пространства» переводятся один в другой с помощью взаимно однозначного, взаимно непрерывного отображения, т. е. гомеоморфны (π_1 и π_2 — естественные проекции на подпространства x_1 и x_2); 2) существует гомеоморфное отображение $g: \pi_1(A_c) \rightarrow \pi_2(A_c)$, удовлетворяющее следующим свойствам:

- а) g — липшиц-непрерывно на $\pi_1(A_c)$;
- б) для любой траектории $\{T^t(x_1, x_2)\} \subset A_c$, где T^t — отображение сдвига по траекториям системы (15), $g(\pi_1(T^t(x_1, x_2))) = \pi_2(T^{t+\alpha(t)}(x_1, x_2))$, причем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t + \alpha(t)}{t} = 1^*.$$

Если $m = n$, то условие а) можно заменить на требование дифференцируемости g (g^{-1}) в окрестности $\pi_1(A_c)$ ($\pi_2(A_c)$).

Из приведенных результатов следует, что $|x_i - x_j| \leq \varepsilon K$, $|\dot{x}_i - \dot{x}_j| \leq c^{-1} \varepsilon K$, $|\ddot{x}_i - \ddot{x}_j| \leq \varepsilon K$ (K — постоянная, не зависящая от c и ε). Воспользовавшись этими неравенствами, при некоторых дополнительных ограничениях на функции $x_i(t)$ можно доказать, что множество $\{x_i(t), \dot{x}_i(t), \theta(t)\}$ взаимно однозначно и взаимно непрерывно отображается на множество $\{x_j(t), \dot{x}_j(t), \theta(t)\}$. Другими словами, это означает топологическую тождественность портретов проекций аттрак-

* По-видимому, возможна и «кратная» стохастическая синхронизация, которой соответствует равенство этого предела рациональному числу.

тора на «парциальные подпространства». Такая топологическая тождественность, дополненная условием липшиц-непрерывности (а еще лучше — дифференцируемости) отображения, гарантирует равенство размерностей проекций аттрактора*.

5. Физическая природа обнаруженнного явления представляется нам, в основном, ясной — она связана с диссипативным характером взаимодействия между элементарными генераторами. Действительно, как непосредственно следует из второго уравнения (11), при больших c «сигнал ошибки» $v_{ij} = y_j - y_i$ быстро (за характерное время $\tau \sim 1/c$) уменьшается до величины $\xi \sim \mu^2$ и остается малым при произвольном $t \rightarrow \infty$. Таким образом, диссипативная связь «убивает» рассогласование в поведении индивидуальных генераторов.

Взаимная стохастическая синхронизация нетождественных генераторов существенна для многих эффектов, наблюдавшихся при исследовании хаотической динамики многомерных систем и неоднородных неравновесных сред. В частности, обнаруженные в таких системах — неоднородных цепочках автогенераторов, возбудимых средах с диффузией, многомодовых моделях гидродинамических течений и т. д. — маломерные странные аттракторы реализуются, по-видимому, в результате проявления стохастической синхронизации, гарантирующей установление даже в неоднородной среде в среднем пространственно однородного стохастического режима. При этом размерность режима стохастической синхронизации определяется числом степеней свободы лишь одного из «элементов среды». Нетрудно представить, что в сильно неоднородных средах может, по-видимому, происходить локальная в пространстве стохастическая синхронизация близких по параметрам элементов; при этом в соседних областях среды могут существовать различные стохастические режимы. Границы соприкосновения таких локально однородных, но различных режимов — «дислокации» — в общем случае могут перемещаться, образуя движущиеся фронты переходов «хаос — хаос», аналогичные наблюдавшимся в [3] фронтам перехода «порядок — хаос».

В заключение заметим, что выше мы нигде не обращались к конкретным характеристикам реализующегося в парциальных генераторах стохастического режима. В то же время такая информация, известная, например, для странных аттракторов вблизи границы их возникновения [12], позволила бы оценить величину связи и полосу стохастической синхронизации в зависимости от параметров парциальных генераторов, в частности от их надкритичностей.

Авторы признательны А. В. Гапонову-Грехову, обсуждение с которым проблем хаотической динамики диссипативных систем стимулировало появление данной работы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Нетрудно проверить, что в системе (4)

$$\varepsilon_{ij} = (k_i - k_j) y_j + x_j (\omega_i^2 - \omega_j^2 + (q_i - q_j) \cos \Omega t + F_i(x_i) - F_j(x_j)).$$

Пусть

$$\varphi_{ij}^2 = \frac{F_j(x_j(t)) - F_i(x_i(t))}{x_j(t) - x_i(t)} = \frac{dF_i(x_i(t) + \alpha_{ij}(x_i(t), x_j(t)) x_i(t))}{dx_i}.$$

После замены (5) система примет вид

$$\begin{aligned} \dot{u}_{ij} &= \eta_{ij} + h_{ij} u_{ij}, \quad \dot{\eta}_{ij} + h_{ij} u_{ij} + h_{ij}(\eta_{ij} + h_{ij} u_{ij}) = \\ &= -(k_i + 2c)(\eta_{ij} + h_{ij} u_{ij}) - u_{ij}(\omega_i^2 + q_i \cos \Omega t + \varphi_{ij}^2(t)) + \varepsilon_{ij}(t). \end{aligned}$$

* Достаточно ли использованных выше предположений для установления липшиц-непрерывности — пока не ясно,

Функцию h_{ij} будем считать решением уравнения

$$\dot{h}_{ij} = -(k_i + 2c) h_{ij} - h_{ij}^2 - (\omega_i^2 + q_i \cos \Omega t + \varphi_{ij}^2(t)), \quad (\text{П.1})$$

например,

$$h_{ij}(t) = - \int_0^t e^{-p_i(t-\tau)} \{h_{ij}^2(\tau) + q_i \cos \Omega \tau + \omega_i^2 + \varphi_{ij}^2(\tau)\} d\tau, \quad (\text{П.2})$$

$$p_i = k_i + 2c.$$

Пусть $r_{ij}^2 = \sup_{t>0} \varphi_{ij}^2(t)$. Решение (П.2) найдем методом сжатых отображений.

2. Зафиксируем произвольное $T > 0$ и рассмотрим пространство функций $H = \{h(t)\}, 0 \leq t \leq T$, непрерывно зависящих от t и таких, что $h(0) = 0$ и

$$\begin{aligned} -m \leq h(t) \leq \psi(t) &= \frac{q_i \cos \alpha_i}{\sqrt{p_i^2 + \Omega^2}} e^{-p_i t} - \frac{\omega_i^2}{p_i} \times \\ &\times (1 - e^{-p_i t}) - \frac{q_i}{\sqrt{p_i^2 + \Omega^2}} \cos(\Omega t - \alpha_i), \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

для любой функции h из H , где $\alpha_i = \arcsin \frac{\Omega}{\sqrt{p_i^2 + \Omega^2}}$. Легко проверить, что

$$-\frac{q_i + \omega_i^2}{p_i} \leq \psi(t) \leq \max \left\{ 0; \frac{q_i - \omega_i^2}{p_i} \right\}.$$

Таким образом, при

$$-m < -q_i - \omega_i^2/p_i \quad (\text{П.4})$$

пространство H непусто и является полным метрическим пространством с расстоянием, определяемым C^0 -нормой:

$$\|\cdot\| = \sup_{0 \leq t \leq T} |\cdot|.$$

Введем в рассмотрение оператор A следующей формулой:

$$Ah = \bar{h}(t) = - \int_0^t e^{-p_i(t-\tau)} \{h^2(\tau) + \omega_i^2 + q_i \cos \Omega \tau + \varphi_{ij}^2(\tau)\} d\tau, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Справедливы:

Утверждение 1. При выполнении неравенства

$$p_i > 2 \sqrt{\omega_i^2 + q_i + r_{ij}^2} \quad (\text{П.5})$$

для

$$m = \frac{p_i - \sqrt{p_i^2 - 4(\omega_i^2 + q_i + r_{ij}^2)}}{2} = \frac{2(\omega_i^2 + q_i + r_{ij}^2)}{p_i + \sqrt{p_i^2 - 4(\omega_i^2 + q_i + r_{ij}^2)}} \quad (\text{П.6})$$

оператор A переводит пространство H в себя.

Утверждение 2. При выполнении (П.5), (П.6) оператор A является сжимающим,

3. Неподвижная точка оператора A — это и есть решение уравнения (П.2). Легко видеть, что это решение (в силу его единственности) не зависит от T и является дифференцируемым по t . Следовательно, оно удовлетворяет уравнению (П.1).

4. Для установившегося решения

$$\eta_{ij} = \int_0^t \exp \left[- \int_\tau^t (p_i + h_{ij}(\xi)) d\xi \right] \varepsilon_{ij}(\tau) d\tau$$

уравнения (7), очевидно, справедлива оценка

$$|\eta_{ij}| \leq |\varepsilon_{ij}| \int_0^t e^{-p_i(t-\tau)} e^{m(t-\tau)} d\tau \leq \frac{\epsilon}{p_i - m}. \quad (\text{П.7})$$

Заметим, что

$$p_i - m = \frac{p_i + \sqrt{p_i^2 - 4(\omega_i^2 + q_i + r_{ij}^2)}}{2}.$$

Найдем установившееся решение $u_{ij}(t)$. Для этого оценим $\int_0^t h_{ij}(\tau) d\tau$:

$$\begin{aligned} \int_0^t h_{ij}(\tau) d\tau &\leq \int_0^t \left[e^{-p_i \tau} \left(\frac{q_i \cos \alpha_i}{\sqrt{p_i^2 + \Omega^2}} + \frac{\omega_i^2}{p_i} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{q_i}{\sqrt{p_i^2 + \Omega^2}} \cos(\Omega\tau - \alpha_i) \right] d\tau - \frac{\omega_i^2}{p_i} t \rightarrow -\infty \quad \text{при } t \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Поэтому для установившегося решения

$$u_{ij}(t) = \int_0^t e^{\int_\tau^t h_{ij}(\xi) d\xi} \eta_{ij}(\tau) d\tau$$

уравнения (7) справедлива оценка

$$|u_{ij}(t)| \leq \frac{\epsilon}{p_i - m} \frac{p_i}{\omega_i^2} (1 - e^{-(\omega_i^2/p_i)t}) L,$$

где

$$\begin{aligned} L = \sup_{t \geq 0} \exp \int_0^t &\left[e^{-p_i \tau} \left(\frac{q_i \cos \alpha_i}{\sqrt{p_i^2 + \Omega^2}} + \frac{\omega_i^2}{p_i} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{q_i}{\sqrt{p_i^2 + \Omega^2}} \cos(\Omega\tau - \alpha_i) \right] d\tau. \end{aligned}$$

Следовательно, $|u_{ij}| \leq K_1 \epsilon$, а из того, что $|h_{ij}| \leq m \leq \frac{\text{const}}{p_i}$, получаем $|v_{ij}| \leq \frac{K_2 \epsilon}{p_i}$, поэтому $|\dot{v}_{ij}| \leq K_3 \epsilon$, где K_1 , K_2 и K_3 — константы, не зависящие от p_i и ϵ .

5. Предположим, что $N = 2$, $F_1(x) = F_2(x) = x^3$. Тогда $\varepsilon_{12} = (k_1 - k_2) y_2 = b_{12} \mu y_2$. Уравнение для x_2 , y_2 перепишется в виде

$$\dot{x}_2 = y_2, \quad \dot{y}_2 = -k_2 y_2 - x_2(1 + q \cos \Omega t + x_2^2) = v_{12}.$$

В силу (12) $v_{12} = (1/2)(k_1 - k_2)y_2 + O(\mu)$, поэтому, с точностью до членов более высокого порядка малости,

$$\dot{x}_2 = y_2, \quad \dot{y}_2 = -((k_1 + k_2)/2)y_2 - x_2(1 + q \cos \Omega t + x_2^2).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И., Старобинец И. М. — Письма в ЖЭТФ, 1984, 39, с. 561.
2. Eckmann J. P., Ruelle D. — Rev. Modern Phys., 1985, 57, № 3, part 1, p. 617.
3. Арансон И. С., Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И., Старобинец И. М. — ЖЭТФ, 1986, 90, № 5
4. Анищенко В. С., Арансон И. С., Постнов Д. Э., Рабинович М. И. — ДАН СССР, 1986, 286, с. 1120.
5. Ito I. — Progress Theor. Phys., 1979, 61, p. 815.
6. Izrailev F. M., Rabinovich M. I., Ugodnikov A. D. — Phys. Lett., 1981, 68A, p. 321.
7. Афраймович В. С., Рабинович М. И., Угодников А. Д. — Письма в ЖЭТФ, 1983, 38, с. 64.
8. Афраймович В. С., Рабинович М. И., Угодников А. Д. — Изв. вузов — Радиофизика, 1984, 27, № 10, с. 1346.
9. Арансон И. С., Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И. — ЖЭТФ, 1985, 89, с. 92.
10. Kuramoto Y. Chemical Oscillations Waves and Turbulence. Springer-Verlag, 1984.
11. Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б. Интегральные многообразия в нелинейной механике. — М.: Наука, 1973.
12. Schuster H. G. Deterministic Chaos. Physik-Verlag, 1984.

Институт прикладной физики
АН СССР

STOCHASTICALLY SYNCHRONIZED OSCILLATIONS IN DISSIPATIVE SYSTEMS

V. S. Afraimovich, N. N. Verichev, M. I. Rabinovich

Experiments on an analogous simulator revealed stochastic synchronization of chaos self-oscillators coupled dissipatively. Chaotic behaviour of oscillators with different parameters coincided almost completely and synchronization occurred at a rather strong coupling. Ensembles of parametric chaos oscillators were used to construct an approximate theory of stochastic synchronization.

ГЕОМАГНЕТИЗМ И АЭРОНОМИЯ, т. XXVI, № 2, 1986 г.

Власов В. И. Радиоастрономические наблюдения межпланетной ударной волны от солнечной вспышки 18 августа 1979 г.

По наблюдениям межпланетных мерцаний большого числа радиоисточников выявлена межпланетная ударная волна, возбужденная солнечной вспышкой 18.VIII-79 г. Прослежено ее расширение в пределах гелиоцентрических дистанций 0,4÷1,2 а. е. Оценена скорость распространения ударной волны на различных удалениях от Солнца. На расстоянии на 1 а. е. скорость волны составляла около 600 км/с. Показано, что скорость межпланетной ударной волны уменьшается с удалением от Солнца приблизительно обратно пропорционально гелиоцентрическому расстоянию.

Гусев В. Д., Виноградова М. Б. Флуктуации фазы ионосферного радиосигнала.

Получено выражение в приближении геометрической оптики для фазы отраженной волны на выходе из ионосферы с учетом флуктуации траектории луча. Показано, что флуктуации горизонтального смещения луча для мелкомасштабных неоднородностей вносят основной вклад в флуктуации фазы.
