

УДК 530.145.61+530.182

ЛОКАЛИЗАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКОГО ХАОСА В КВАНТОВЫХ СИСТЕМАХ

Б. В. Чириков, Д. Л. Шепелянский

Численные эксперименты с простой квантовой моделью показывают, что длина локализации динамического хаоса определяется скоростью диффузии в классическом пределе. Проведено исследование явления локализации вблизи критического значения параметра модели. Определены условия делокализации в случае неоднородной диффузии.

1. Введение. Явление динамического хаоса, т.е. случайного (непредсказуемого) движения полностью детерминированной (динамической) системы классической механики к настоящему времени изучено уже весьма досконально и в основном понято (см., например, [1,2]). Помимо важного прикладного значения в проблеме устойчивости движения динамический хаос представляет для физики и большой принципиальный интерес, поскольку он существенно меняет наши традиционные представления о природе и механизме случайности и статистических законов, распространяя последние (при определенных дополнительных условиях) на предельно простые системы (всего две степени свободы для консервативной гамильтоновой системы и даже одна степень свободы в случае периодического внешнего возмущения). Для дальнейшего существенно, что источником динамического хаоса является в конечном счете непрерывность фазового пространства в классической механике, а механизм, с помощью которого эта непрерывность трансформируется в хаотичность движения, связан с сильной (экспоненциальной) неустойчивостью траекторий [3]. Характерной особенностью динамического хаоса является диффузия в фазовом пространстве, а значит, и непрерывный спектр движения.

Ввиду отмеченного выше фундаментального значения динамического хаоса возникает естественный и важный вопрос, в какой мере сохраняется это явление в более точной квантовой механике. Ответ на этот вопрос был дан Крыловым [4]: в квантовой механике такой хаос невозможен ввиду дискретности спектра любой ограниченной в фазовом пространстве системы, равно как и дискретности самого фазового пространства. Поясним, что речь идет о свободной эволюции квантовой системы (ее вектора состояния $\psi(t)$) без промежуточных измерений.

Возможно, что именно поэтому в большинстве работ по «квантовому хаосу», обзор которых дан в [1,3], исследуются просто особенности квантового поведения при условии хаоса в классическом пределе. Однако возникает принципиальный вопрос: как совместить отсутствие хаоса в квантовой механике с принципом соответствия, который требует перехода к классической динамике, в том числе и хаотической. Этот вопрос был поставлен и решен в работе [3].

Идея решения состоит во введении характерных временных масштабов квантовой эволюции, на которых проявляются различные свойства классического хаоса. В настоящий момент известны два таких масштаба. Первый и самый короткий из них (логарифмический) $\tau_s \sim \ln q$ определяется быстрым расплыванием волновых пакетов вследствие экспоненциальной неустойчивости классических траекторий [3,5]. Здесь безразмерное время τ измеряется в единицах периода движения, а $q \propto$

$\propto \hbar^{-1}$ — характерный квантовый параметр задачи (в дальнейшем положим $\hbar=1$). На этом очень коротком масштабе времени квантовый волновой пакет движется, согласно теореме Эренфеста, по классической траектории и, таким образом, квантовая динамика обладает всеми свойствами классического хаоса.

Второй, значительно более длинный (степенной) и поэтому более важный масштаб времени τ_d имеет порядок $\ln \tau_d \sim \ln q$ и определяет процессы диффузии и релаксации в квантовой динамике. Этот масштаб был обнаружен в численных экспериментах [6] и объяснен в [3]. Целью настоящей работы является более подробное изучение диффузионного масштаба τ_d .

2. Модель. Как и в предыдущих работах [6–8], мы используем модель, описываемую так называемым стандартным отображением. В классическом пределе отображение $(I, \theta) \rightarrow (\bar{I}, \bar{\theta})$ имеет вид (в безразмерных величинах)

$$\bar{I} = I + k \sin \theta, \quad \bar{\theta} = \theta + T\bar{I}, \quad (1)$$

где (I, θ) — переменные действие—фаза, T — период отображения, а k — параметр возмущения. В квантовом случае отображение для волновой функции $\psi \rightarrow \bar{\psi}$ принимает вид [6]

$$\bar{\psi} = \exp\left(i \frac{T}{2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right) \exp(-ik \cos \theta) \psi. \quad (2)$$

При этом действие квантуется ($I=n$ — целое), а переход к классическому пределу соответствует $k \rightarrow \infty$, $T \rightarrow 0$, $K = kT = \text{const}$. Последний параметр полностью определяет динамику классической модели (1). В зависимости от значения параметра K существуют два качественно различных режима: финитное ($|I| \leq \sqrt{k/T}$) и инфинитное движения. Критическое значение K , разделяющее оба режима, равно $K_{cr} = 0,9716...$ [9]. Следует отметить, что в обоих режимах существуют как регулярные, так и хаотические компоненты движения, причем мера первых стремится к нулю с ростом K [2].

При $K > K_{cr}$ движение в единой хаотической компоненте может быть описано как диффузия по I со скоростью (см. [10] и п. 5 ниже)

$$D_{cl} \equiv \frac{\langle (\Delta I)^2 \rangle}{\tau} = \frac{D_0(K)}{T^2} \approx \frac{1}{T^2} \begin{cases} (K^2/2)(1+2J_2(K)+2J_2^2(K)) & (K \geq 4,5), \\ 0,30 (K - K_{cr})^3 & (K \leq 4,5) \end{cases}, \quad (3)$$

где τ — число итераций отображения, а $J_2(K)$ — функция Бесселя.

В квазиклассической области закон диффузии (3) сохраняется в пределах диффузионного масштаба времени, который для рассматриваемой модели, согласно [3], имеет порядок $\tau_d \sim D_{cl} \sim k^2$. При $\tau \ll \tau_d$ квантовая зависимость D_q в согласии с принципом соответствия хорошо повторяет все детали классической диффузии, в том числе и не описываемые простым соотношением (3). Это иллюстрируется на рис. 1, где кружки представляют численные данные классической модели (1) [11], сплошная кривая — теория (3) [10], а кресты — численные данные для квантовой модели (2) [12] с $k \approx 40$.

При $\tau \gg \tau_d$ квантовая диффузия останавливается и переходит в стационарные колебания [13], которые были прослежены вплоть до $\tau = 5 \cdot 10^4$ [14], что означает дискретность спектра квазиэнергий модели (2) [3]. Уже по этой причине «квантовый хаос» во всей квазиклассической области не является истинным, как в классическом пределе. Мы будем называть его псевдохаосом. Отметим, что отклонения от настоящего хаоса начинаются уже на гораздо меньшем масштабе τ_s , что проявляется, в частности, в отсутствие локальной неустойчивости квантового движения при $\tau > \tau_s$ [15] и появлении остаточных корреляций [15, 16] (см. также [1]).

При $T \geq 1$ движение является существенно квантовым [1]. Тем не менее псевдохаос сохраняется и в этой области при дополнительном условии $k \geq 1$. Однако его статистические свойства, в частности скорость начальной диффузии, вообще говоря, отличаются от области $T \leq 1$ даже при $k \gg 1$. В обратном случае $k \ll 1$ справедлива обычная квантовая теория возмущений (в отсутствие резонанса), что означает малость поправок к невозмущенным состояниям, т. е. регулярность квантовой динамики независимо от характера движения в классическом пределе. Такой механизм квантовой стабилизации классического хаоса, связанный с дискретностью квантового спектра, был рассмотрен в работе Шурыка [17].

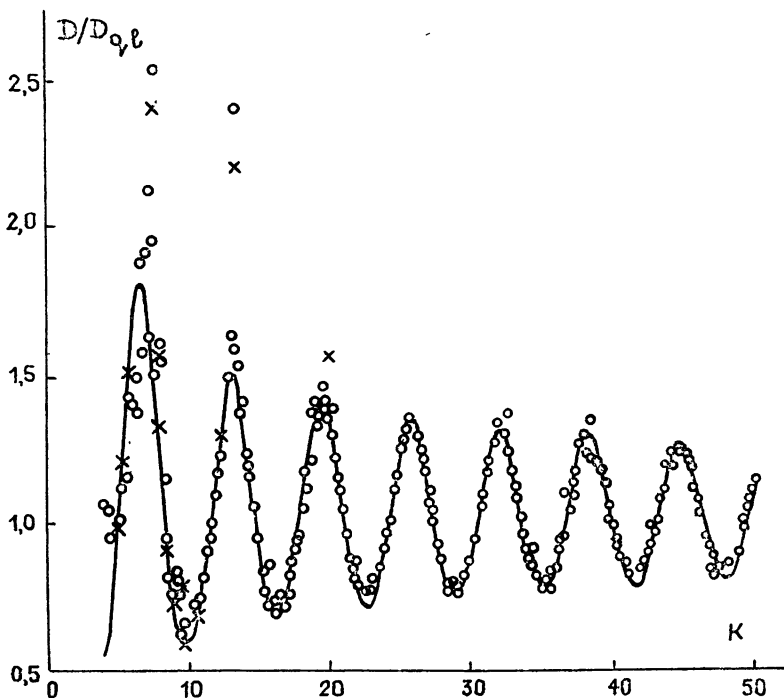


Рис. 1.

В случае классического нелинейного резонанса условие квантовой стабилизации принимает вид $k/T \leq 1$, что имеет следующий простой физический смысл: число уровней, захваченных в резонанс, $\sqrt{k/T} \leq 1$ [17]. Если оба параметра малы ($k \leq 1$, $k/T \leq 1$), то все невозмущенные состояния сохраняются. Это — область глобальной применимости теории возмущений. При $k \leq 1$, но $k/T \geq 1$ невозмущенные состояния сохраняются только между резонансами. Внутри резонансов невозмущенные состояния смешиваются, однако движение остается регулярным и можно перейти к новым, резонансным, квантовым числам и соответствующим им собственным функциям квазиэнергии. Наконец, в квазиклассической области, при $k \geq 1$ и $k/T \geq 1$ (но $kT \leq 1$) смешивание происходит для всех невозмущенных состояний, но область смешивания не превосходит ширины отдельного резонанса.

Описанная выше квантовая динамика модели имеет место только для иррациональных значений параметра $T/4\pi$. В случае рациональных $T/4\pi$ возникает специфическое для данной модели явление квантового резонанса [18]. При этом спектр квазиэнергий становится непрерывным, а действие $|n|$ растет пропорционально τ ($\tau \rightarrow \infty$) при любом k . Эта особенность модели связана с характером невозмущенного спектра $E_n = n^2/2$ и не является типичной для квантовой динамики. По этой же причине динамика модели (2) определяется величиной T , взятой по модулю 4π .

3. Принцип квантовой локализации хаоса. Следуя [3], рассмотрим сначала качественно механизм ограничения диффузии в модели (2). Он основан на следующих простых физических соображениях. По принципу соответствия квантовое движение в квазиклассической области должно быть, в каком-то смысле, близко к классическому, по крайней мере на некотором характерном масштабе времени. Это очевидно для самого короткого масштаба τ_s , т. е. до расплывания волновых пакетов, которые движутся по классическим траекториям. При $\tau \gg \tau_s$ квантовая динамика, конечно, не совпадает полностью с классической, однако, как показывает численное моделирование [3,6,15], классическая диффузия в системе продолжается. Если бы диффузия была неограниченной, как в классическом пределе, то спектр квазиэнергий был бы непрерывным. Существенно, однако, что и в случае чисто дискретного спектра со средней плотностью уровней ρ_0 классическая диффузия может продолжаться в течение времени

$$\tau \sim \tau_d \sim \rho_0. \quad (4)$$

Это вытекает непосредственно из принципа неопределенности, поскольку при $\tau \ll \rho_0$ система не разрешает («не чувствует») дискретный характер спектра. Оценка (4) и определяет диффузионный масштаб времени для модели (2). Поясним, что плотность ρ_0 в (4) определяется только собственными функциями, представленными в данном состоянии системы, эффективное число которых всегда конечно.

Для оценки величины ρ_0 рассмотрим вначале эволюцию одного произвольного невозмущенного состояния. Тогда вследствие классической диффузии за время τ_d будет эффективно возбуждено некоторое число соседних невозмущенных состояний $\Delta n \sim (D_{cl} \tau_d)^{1/2}$. Это значит, что точные собственные функции системы являются суперпозициями нескольких (порядка Δn) невозмущенных состояний. И наоборот, любое невозмущенное состояние представляется таким же числом собственных функций. Отсюда $\rho_0 \sim \Delta n \sim \tau_d$ согласно (4) и [3]:

$$\tau_d \sim D_{cl}, \quad l \sim \Delta n \sim D_{cl}, \quad (5)$$

где l — эффективное число невозмущенных состояний, вовлеченных в стационарные колебания после прекращения диффузии. Иначе можно сказать, что величина l определяет размер области локализации собственных функций в невозмущенном базисе (по n). Мы будем называть l длиной локализации. Замечательной особенностью соотношений (5) является устанавливаемая ими связь существенно квантовых характеристик движения — диффузионного масштаба τ_d и длины локализации l , со скоростью диффузии D_{cl} в классическом пределе.

Оценка (5) для τ_d , очевидно, не зависит от начального состояния системы, как и длина локализации собственных функций. Что же касается длины локализации l для стационарных колебаний, то оценка (5) справедлива только в том случае, когда размер начального состояния $l_0 \ll l$. Если же $l_0 \gtrsim l$, то по порядку величины размер состояния не изменяется.

В работе [19] была отмечена аналогия между описанной выше локализацией в импульсном пространстве (по n) и хорошо известной локализацией Андерсона в случайном потенциале (см., например, [20]). Наиболее существенное различие между обоими явлениями связано с тем, что в рассматриваемой нами модели (2) нет никаких случайных параметров. Продолжая эту аналогию, можно заметить, что квантовый резонанс соответствует делокализованным блоховским состояниям в периодическом потенциале [18,19]. Отметим также, что механизм локализации в обеих системах является, вообще говоря, совершенно различным в зависимости от параметров движения. Так, для модели (2) при $K \gtrsim 1$ и $k > 1$ локализация связана с остановкой классической диффузии вследствие квантовых интерференционных эффектов. Если же $K \leq 1$ ($k > 1$), то локализация определяется квантовым туннелированием в классически недоступную область.

4. Квантовая локализация при однородной диффузии. В дальнейшем мы будем рассматривать квантовую локализацию, связанную только с прекращением классической диффузии, т. е. для модели (2) мы будем предполагать, что $K > K_{cr}$ и $k \gg 1$. Рассмотрим вначале более простой случай однородной (по n) диффузии при $K \gg 1$. В этом случае можно также практически пренебречь устойчивой компонентой движения [21]. Для уточнения оценки (5) нужно прежде всего определить более аккуратно диффузионный масштаб τ_d и (или) длину локализации l . Как выяснилось, наиболее удобно это сделать именно для величины l , поскольку закон локализации собственных функций, предсказанный в [22] по аналогии с локализацией Андерсона, можно приближенно представить в виде следующего выражения:

$$|\varphi_m(n)| \propto e^{-|n-m|/l + \xi_{nm}}, \quad (6)$$

где случайная величина ξ_{nm} характеризует флуктуации вокруг средней экспоненциальной локализации, причем $\langle \xi_{nm} \rangle = 0$.

Пусть в начальный момент времени система находится в состоянии с $n = 0$. Тогда стационарные колебания, устанавливающиеся при $\tau \gg \tau_d$, характеризуются усредненным по времени распределением

$$\bar{f}(n) = \overline{|\psi(n, \tau)|^2} = \sum_m |\varphi_m(0) \varphi_m(n)|^2. \quad (7)$$

Отметим, что $\bar{f}(n)$ является аналогом коррелятора плотность — плотность в твердом теле [20]. Учитывая, что в среднем

$$\langle |\varphi_m(n)|^2 \rangle \approx \frac{1}{l_s} e^{-2|n-m|/l_s}, \quad (8)$$

из (7) получаем

$$\bar{f}(n) \approx \frac{1}{2l_s} \exp\left(-\frac{2|n|}{l_s}\right) \left(1 + \frac{2|n|}{l_s}\right), \quad \bar{n}^2 = l_s^2. \quad (9)$$

Величина l_s может отличаться от длины локализации собственных функций l . Причина этого связана с флуктуациями ξ_{nm} . Так, в случае гауссовых флуктуаций с $\langle (\Delta \xi_{nm})^2 \rangle = D_\xi |\Delta n|$ имеем ($m = 0$)

$$|\varphi_0(n)| \sim \int_{n/l}^{\infty} \exp\left(-\frac{n}{l} + \xi - \frac{\xi^2}{2D_\xi n}\right) d\xi. \quad (10)$$

После вычисления интеграла получаем

$$\frac{1}{l_s} = \frac{1}{l} - \frac{D_\xi}{2}, \quad D_\xi l \leq 1, \quad \frac{1}{l_s} = \frac{1}{2l^2 D_\xi}, \quad D_\xi l \geq 1. \quad (11)$$

Аналогичное явление хорошо известно в твердом теле [20]. Пример стационарного распределения показан на рис. 2 для $k = 10$, $T = 0,5$, $K = 5$, $x = 2n/l_s$, $\bar{f}_N = \bar{f}(n) 2l_s/(1+x)$, прямая $\bar{f}_N = e^{-x}$. В пределах статистических флуктуаций закон (9) выполняется в огромном диапазоне, охватывающем около 10 порядков изменения \bar{f}_N . Типичная крупномасштабная структура связана, по-видимому, с сильными флуктуациями величины ξ_{nm} (см. (10)).

В численных экспериментах длина локализации l_s определялась из стационарного распределения на основе соотношения (9). Согласно (5) отношение

$$\alpha = l_s/D_{cl} = l_s T^2/D_0 \quad (12)$$

не должно зависеть от параметров модели (2). На рис. 3 приведены наши численные данные для зависимости $l_s T^2$ от D_0 (кружки) в двойном десятичном логарифмическом масштабе. Видно, что в диапазоне, охватывающем почти 4 порядка, ожидаемая зависимость (12) действительно выполняется, причем среднее значение $\langle \alpha \rangle = 1,04 \pm 0,03$ (ошиб-

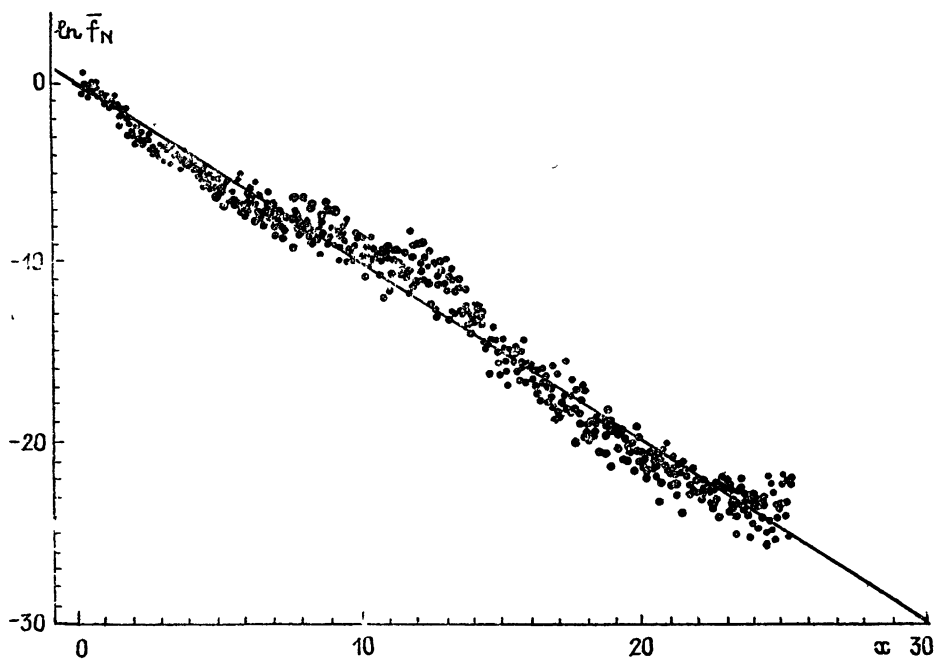


Рис. 2.

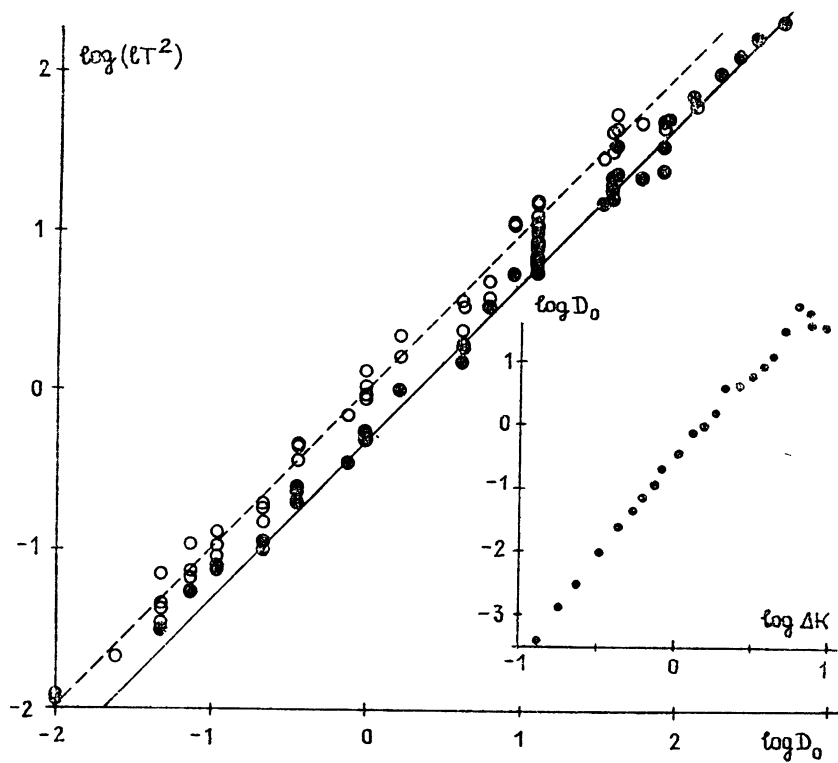


Рис. 3.

ка — статистическая) очень близко к единице. Квантовый параметр возмущения k изменялся в интервале $5 - 120$, $T \leq 1$, а длина локализации $l_s = 9 \div 180$. На этом же рисунке приведены данные, полученные в [23] для длины локализации собственной функции: $l^{-1} = \langle \ln |\varphi_m(n)|/n \rangle$ (точки). Параметры менялись в интервалах: $k = 5 \div 75$, $T \leq 1$, $l = 8 \div 1300$. Среднее значение $\langle \alpha \rangle = 0,57 \pm 0,02$. Для вычисления l в [23] использовался специальный метод, который позволяет обойтись без нахождения полных собственных функций. Несмотря на разброс точек полученные данные отчетливо показывают, что $l_s \approx 2l$. Из этого соотношения определяем скорость диффузии ξ_{nm} в волновой функции: $D_\xi = 1/l = 2/D_{cl}$. Прямое вычисление D_ξ методом работы [23] подтверждает это соотношение.

Фактически, как видно на рис. 3, закон локализации (12) остается справедливым и в области $K \sim 1$, где классическая диффузия становится существенно неоднородной и появляются большие области устойчивого движения. Отметим, что в диапазоне значений K на вставке рис. 3 зависимость D_0 от $\Delta K = K - K_{cr}$ является очень сложной (см. (3)).

5. Квантовая локализация в критической области. При $K \rightarrow K_{cr}$ скорость классической диффузии в модели (1) резко падает вследствие образования специфической критической структуры [9,24]. Согласно [24] $D_0 \propto (\Delta K)^3$ ($\Delta K = K - K_{cr}$). Этот закон согласуется со старыми измерениями D_0 [21] и был более аккуратно проверен нами в интервале $K = 1,1 \div 2,8$, где скорость диффузии можно описать эмпирической формулой (3) (см. вставку на рис. 3).

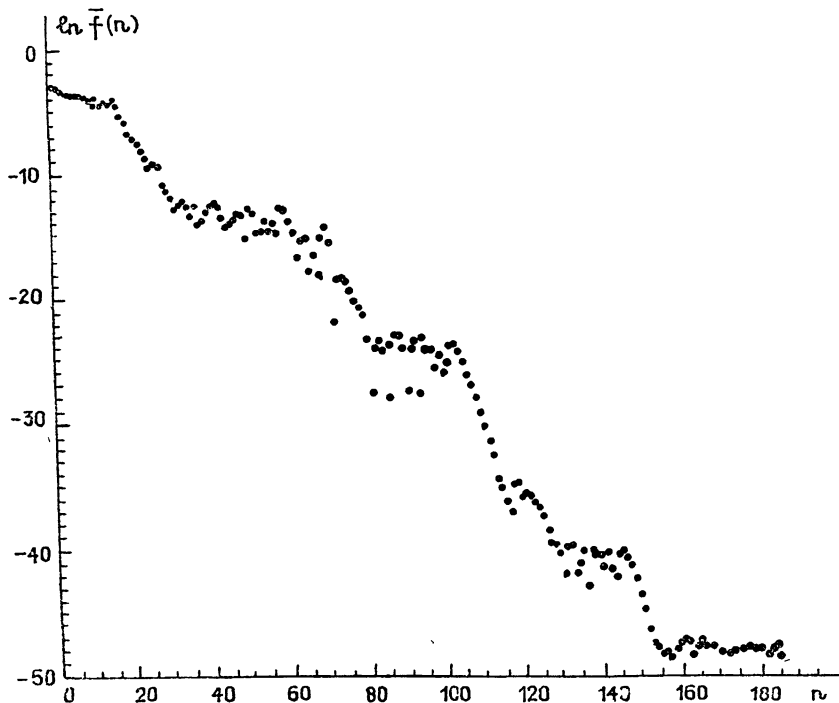


Рис. 4.

Выражение (3) дает среднюю скорость диффузии за время, много большее времени перехода между соседними целыми резонансами (примерно равное $130 (\Delta K)^{-3}$). Локальная скорость диффузии в этой области становится резко неоднородной, опять-таки за счет образования критической структуры. Тем не менее, закон квантовой локализации (12) удовлетворительно выполняется и в этой области при дополнительном условии, что квантовый параметр k достаточно большой. В противном случае характер стационарного распределения резко изменяется (рис. 4,

$k = 10$, $K = 1,5$, период резонансной структуры $2\pi/T \approx 42$). Здесь неоднородность диффузии приводит к немонотонному изменению $\bar{f}(n)$. Ясно видны четыре целых резонанса, которые соответствуют «плато» $\bar{f}(n)$. Самое нижнее плато определяется ошибками округления при счете. Плато внутри резонансов образуются за счет быстрой колебаний по n . Между резонансами, в областях критической структуры, скорость диффузии, а вместе с ней и длина локализации резко уменьшаются, что и приводит к быстрому падению $\bar{f}(n)$. Будем называть этот случай неоднородной локализацией.

Оценку для k_{cr} можно получить следующим образом. Используя метод, описанный в п. 3, представим длину локализации в виде

$$l^2 \sim k^2 + (D_0/T^2) \tau_d \sim \tau_d^2. \quad (13)$$

Здесь член k^2 характеризует вклад первого периода возмущения (для начального состояния $n=0$), который является существенным при $D_0 \rightarrow 0$ ($K \rightarrow K_{cr}$). Из (13) видно, что возможны два различных режима квантовой локализации в зависимости от соотношения обоих слагаемых. Если $k^2 \ll D_0 \tau_d / T^2$, т. е. вкладом первого периода возмущения можно пренебречь, то $l \sim D_0 / T^2$ и мы возвращаемся к прежнему выражению (12). Это — режим быстрой диффузии, которая приводит к гладкому стационарному распределению (рис. 2). Этот режим сохраняется и при $K \rightarrow K_{cr}$, если только квантовый параметр k достаточно велик (13). В обратном предельном случае $D_0 \tau_d / T^2 \ll k^2$ медленной диффузии локализация становится неоднородной (рис. 4). Граница между этими режимами дается оценкой $k^2 \sim D_0 \tau_d / T^2$ или

$$D_0 k_{cr} / K^2 \approx 1, \quad (14)$$

где эмпирическое значение параметра неоднородности взято из численных данных. Границу (14) можно связать с характеристиками критической структуры при $K \rightarrow K_{cr}$. Простая резонансная теория такой структуры описана в [25]. Согласно этой теории, надкритическое возмущение $\epsilon = \Delta K > 0$ разрушает все мелкие масштабы критической структуры вплоть до масштаба с характерным временем движения $\tau_\epsilon \sim \epsilon^{-1}$. Тогда из (14) находим $\tau_\epsilon \sim k_{cr}^{1/3}$, где мы использовали оценку $D_0 \sim \epsilon^3$ (3) и положили $K \approx 1$.

Если вместо квантового параметра k использовать \hbar , понимая переход к классическому пределу как $\hbar \rightarrow 0$, то последняя оценка принимает вид $\tau_\epsilon \sim \hbar^{-1/3}$ и формально совпадает с результатом работы [26], полученным другим методом. Однако интерпретация этого результата у нас совершенно иная. Во-первых, в [26] время $\hbar^{-1/3}$ никак не связано с величиной возмущения ϵ . Во-вторых, авторы [26] понимают его как диффузионный масштаб τ_d . На самом деле, однако, последний много больше (см. (13)):

$$\tau_d \sim k_{cr} \sim \hbar^{-1} \gg \tau_\epsilon \sim k_{cr}^{1/3} \quad (k_{cr} \gg 1).$$

6. Делокализация. Если в процессе диффузии ее скорость изменяется, то это может существенно повлиять на характер квантовой локализации. В частности, возможна делокализация, когда квантовая диффузия продолжается неограниченно долго. Это явление было исследовано в работе [3] на модели (2), в которой параметр $k(\tau)$ явно зависел от времени. В случае степенной зависимости $k = k_1 \tau^\mu$ ($k_1 > 1$) делокализация наступает при $\mu \geq 1/2$.

Ниже мы рассмотрим пример неоднородной по n диффузии, приняв $D_{cl}(n) = D_1 n^\beta$. Если β достаточно велико, т. е. скорость диффузии растет быстрее n , то число невозмущенных состояний (Δn), связанных диффузией, к некоторому моменту времени τ будет расти быстрее τ . Поскольку число собственных состояний квазиэнергии и их плотность $\rho_0 \geq \Delta n \sim \tau$, то равенство (4) не достигается и локализации не происходит. Это и определяет условия делокализации.

Пусть начальное $n = n_0 \sim 1$. Тогда из уравнения диффузии получаем $D_1 \tau \sim n^{2-\beta} < D_1 n$. Последнее неравенство и дает границу делока-

лизации: $\beta \geq 1$, $D_1 \geq 1$, а условие $D_1 \geq 1$ эквивалентно требованию, чтобы $k \sim \sqrt{D_1} \geq 1$ при любом τ (граница Шурыяка, см. п. 2). Отметим, что ограничение $\beta \geq 1$ в точности совпадает с упомянутым выше условием $\mu \geq 1/2$ при явной зависимости скорости диффузии от времени. Если начальное $n_0 \gg 1$, то локализация возможна и при $\beta > 1$, когда длина однородной локализации (5) с $D_{cl} = D_{cl}(n_0) < n_0$. Отсюда условие делокализации [27] $D_1 \geq n_0^{1-\beta} \ll 1$. В противном случае система «не почувствует» роста D_{cl} с n . При $n_0 \sim 1$ это условие переходит в $D_1 \geq 1$. Описанный механизм делокализации оказался существенным при возбуждении атома водорода монохроматическим полем [27].

Нам приятно отметить постоянный интерес и поддержку А. В. Гапонова-Грехова, которому мы выражаем свою глубокую признательность.

ЛИТЕРАТУРА

1. Заславский Г. М. Стохастичность динамических систем. — М. Наука, 1984.
2. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. — М.: Мир, 1984.
3. Chirikov B. V., Izrailev F. M., Shepelyansky D. L. — Sov. Sci. Rev., 1981, 2 С, р. 209.
4. Крылов Н. С. Работы по обоснованию статистической физики. — М.: АН СССР, 1950.
5. Berman G. P., Zaslavsky G. M. — Physica, 1978, 91 A, № 3—4, р. 450.
6. Casati G., Chirikov B. V., Ford J., Izrailev F. M. — Lecture Notes in Physics, 1979, 93, р. 334.
7. Hogg T., Huberman B. A. — Phys. Rev. Lett., 1982, 48, № 11, р. 711.
8. Hanson J. D., Ott E., Antonson T. M. — Phys. Rev., 1984, 29 A, № 2, р. 819; Phys. Rev. Lett., 1984, 53, № 23, р. 2187.
9. Greene J. M. — J. Math. Phys., 1979, 20, № 6, р. 1183.
10. Rechester A. B., Rosenbluth M. N., White R. B. — Phys. Rev., 1981, 23 A, № 5, р. 2664.
11. Rechester A. B., White R. B. — Phys. Rev. Lett., 1980, 44, № 24, р. 1586.
12. Шепелянский Д. Л. Автореферат диссертации. — Новосибирск, 1981.
13. Чириков Б. В. — УФН, 1983, 139, № 2, с. 360.
14. Casati G. — Private communication, 1985.
15. Shepelyansky D. L. — Physica, 1983, 8 D, № 1—2, р. 208.
16. Шепелянский Д. Л. — ТМФ, 1981, 49, № 1, с. 117.
17. Шурыяк Э. В. — ЖЭТФ, 1976, 71, № 6, с. 2039.
18. Израйлев Ф. М., Шепелянский Д. Л. — ТМФ, 1980, 43, № 3, с. 417.
19. Fishman S., Greppe D. R., Prange R. E. — Phys. Rev., 1984, 29 A, № 4, р. 1639.
20. Лифшиц И. М., Гредескул С. А., Пастур Л. А. Введение в теорию неупорядоченных систем. — М.: Наука, 1982.
21. Chirikov B. V. — Phys. Rep., 1979, 52, № 5, р. 263.
22. Fishman S., Greppe D. R., Prange R. E. — Phys. Rev. Lett., 1982, 49, № 8, р. 509.
23. Shepelyansky D. L. — Phys. Rev. Lett., 1986, 56, № 7, р. 677.
24. MacKay R. S., Meiss J. D., Percival I. C. — Physica, 1984, 13 D, № 1—2, р. 55.
25. Chirikov B. V., Shepelyansky D. L. — Physica, 1984, 13 D, № 3, р. 395; Chirikov B. V. — Proc. Int. Conf. Plasma Physics, Lausanne, 1984, 2, р. 761.
26. Fishman S., Greppe D. R., Prange R. E. — Phys. Rev. Lett., 1984, 53, № 13, р. 1212.
27. Casati G., Chirikov B. V., Shepelyansky D. L. — Phys. Rev. Lett., 1984, 53, № 27, р. 2525.

Институт ядерной физики
СО АН СССР

LOCALIZATION OF DYNAMICAL CHAOS IN QUANTUM SYSTEMS

B. V. Chirikov, D. L. Shepelyansky

Numerical experiments with a simple quantum model show that the localization length of dynamical chaos is determined by the diffusion rate in the classical limit. The investigation of the localization phenomenon near the critical parameter value is carried out. The conditions of delocalization in the case of inhomogeneous diffusion are determined.