

УДК 537.87

## ВРАЩАЮЩИЕСЯ ТЕЛА И ЭЛЕКТРОДИНАМИКА ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ СИСТЕМЕ ОТСЧЁТА

*Я. Б. Зельдович, Л. В. Рожанский, А. А. Старобинский*

Уравнения Максвелла записаны в равномерно вращающейся неинерциальной системе отсчета. Величина, играющая роль энергии электромагнитного поля во вращающейся системе отсчета, может быть отрицательной, что приводит к эффекту усиления электромагнитной волны при отражении от вращающегося поглощающего тела. Рассмотрен генератор электромагнитных волн, действующий на основе этого эффекта. По этой же причине вращающееся проводящее тело может также спонтанно излучать фотоны. Вычислена интенсивность спонтанного излучения.

Вопросы генерации, распространения, отражения и поглощения электромагнитного излучения находятся в центре внимания горьковской школы. Рассматривая вопрос о генерации электромагнитных волн в целом, нельзя не удивляться разнообразию теоретических методов подхода к этой задаче. Разнообразие экспериментальных методов не меньше, но рассмотрение их не входит в нашу задачу.

Итак, существует точная, законченная квантовая электродинамика (КЭД), включающая релятивистскую квантовую теорию электронов и позитронов и квантовую теорию электромагнитного поля. Эта теория стала законченной только благодаря осуществлению программыrenomализации. Она не является истиной в последней инстанции. Это видно уже из того, что масса и заряд электрона рассматриваются как величины, определенные экспериментально. Однако в такой ограниченной постановке задачи КЭД добилась потрясающих успехов: магнитный момент электрона (а также и мюона), вычисленный по КЭД, совпадает с опытом до двенадцатого знака! При наличии такой КЭД возникает побуждение все остальные методы электродинамики рассматривать как некие приближения. В обычательском смысле приближенная теория — это не совсем точная, а значит, второстепенная теория. Обыватель говорит, что Эйнштейн «опроверг» Ньютона, а значит, Ньютон не так хорош, как думали раньше, до создания теории относительности и, добавим, квантовой механики.

Однако такой примитивный подход неверен, противоречит всему духу современной науки. Классическая механика асимптотически точна при  $v/c \rightarrow 0$ ,  $\varphi/c^2 \rightarrow 0$ ,  $\hbar \rightarrow 0$  ( $v$  — скорость тела,  $c$  — скорость света,  $\varphi$  — гравитационный потенциал,  $\hbar$  — постоянная Планка). В таком же смысле классическая электродинамика Фарадея и Максвелла является асимптотически точной в ситуации, когда велико  $N$  — число индивидуальных фотонов. При этом мы не обязаны развивать квантовую электродинамику, учитывая многофотонные процессы и затем устремляя  $N$  к бесконечности.

Классическая электродинамика имеет свою логику, свои качественные понятия и уравнения. Это богатство «приближенных» теорий и их независимое существование с необычайной силой и убедительностью изложены в известной статье Фока «О значении приближенных методов в физике» [1].

Большое число работ горьковской школы выполнено в рамках классической электродинамики и неквантовой (хотя и релятивистской) теории электронов. В этих рамках дано классическое описание эффекта индуцированного излучения свободными электронами; описано пле-

нение электронов в узлах электрического поля стоячей электромагнитной волны. Более того, в ряде случаев специфически квантовые эффекты излучения отдельных фотонов часто удается получить экстраполяцией  $N \rightarrow 0$  (точнее,  $N \rightarrow 1/2$  с учетом нулевых колебаний каждой моды) классической теории.

Предлагаемая работа, в которой новым способом рассматривается эффект сверхотражения электромагнитной волны от вращающегося тела, написана с позиций классической электродинамики и макроскопического описания свойств тела.

Вращающаяся система координат дает естественное описание происходящих процессов. Запись уравнений в такой системе может быть полезна и при рассмотрении пульсаров — вращающихся замагниченных нейтронных звезд.

Известно, как в механике переход к вращающейся системе координат приводит к появлению кориолисовой и центробежной сил.

Ниже будет показано, как уравнения электродинамики изменяются при переходе к вращающейся системе координат. Сам тип уравнений оказывается различным внутри и вне светового цилиндра, т. е. той поверхности, на которой линейная скорость вращения (т. е. произведение  $\Omega r$ , где  $\Omega$  — угловая скорость вращения,  $r$  — расстояние от оси вращения) равна скорости света. В пространстве Минковского все электромагнитные волны имеют положительную энергию, неподвижное холодное тело ничего не излучает. Во вращающейся системе координат величина, играющая роль энергии волны, может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Поэтому холодное тело, неподвижное в этой системе (т. е. вращающееся в системе Минковского), может испускать волну с энергией  $E < 0$  относительно вращающейся системы отсчета (в неподвижной системе отсчета эта волна будет иметь положительную энергию). Одновременно вращающееся проводящее тело поглотит энергию  $-E > 0$ , которая пойдет на его нагрев.

## 1. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ СИСТЕМЕ ОТСЧЕТА

Изучим вид уравнений Максвелла во вращающейся системе координат внутри светового цилиндра, воспользовавшись техникой, описанной в [2]. Переход к вращающейся системе отсчета выглядит в цилиндрических координатах следующим образом:

$$t = t', \quad r = r', \quad z = z', \quad \varphi = \varphi' + \Omega t, \quad (1.1)$$

где нештрихованные координаты относятся к неподвижной системе отсчета, а штрихованные — к системе отсчета, вращающейся с угловой скоростью  $\Omega$ . Из формулы (1.1) непосредственно следует соотношение для дифференциалов

$$dt = dt', \quad dr = dr' + [\Omega, r'] dt', \quad (1.2)$$

где  $r'$  и  $r$  — радиусы-векторы во вращающейся и неподвижной системах отсчета. Формула для интервала  $ds^2 = dt^2 - dr^2$  приобретает вид

$$ds^2 = (1 - [\Omega, r']^2) dt^2 - 2([\Omega, r'], dr') dt - dr'^2, \quad (1.3)$$

поэтому метрика во вращающейся системе координат определяется выражением

$$g_{00} = 1 - [\Omega, r']^2, \quad g_{0\alpha} = -[\Omega, r']_\alpha, \quad (1.4)$$

$$g_{\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3.$$

В соответствии с [2] введем метрику трехмерного пространства

$$\gamma_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha} g_{0\beta}}{g_{00}} = \delta_{\alpha\beta} + \frac{[\Omega, r']_\alpha [\Omega, r']_\beta}{1 - [\Omega, r']^2} \quad (1.5)$$

и вектор

$$\mathbf{g}_\alpha = -\frac{g_{0\alpha}}{g_{00}} = \frac{[\Omega, r']_\alpha}{1 - [\Omega, r']^2}, \quad (1.6)$$

а также обозначение  $\gamma = \det \| \gamma_{\alpha\beta} \|$ .

Тогда, если определить напряженности и индукции электрического и магнитного полей по формулам

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\alpha &= F_{0\alpha}, \quad \mathbf{B}^\alpha = -(1/2) V\bar{\gamma} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} F_{\beta\gamma}, \\ \mathbf{D}^\alpha &= -V\bar{g}_{00} F^{0\alpha}, \quad \mathbf{H}_\alpha = -(1/2) V\bar{\gamma} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} V\bar{g}_{00} F^{\beta\gamma}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

то оказывается, что они удовлетворяют обычным уравнениям Максвелла, а также соотношениям

$$\mathbf{D} = \mathbf{E}/V\bar{g}_{00} + [\mathbf{H}, \mathbf{g}], \quad \mathbf{B} = \mathbf{H}/V\bar{g}_{00} + [\mathbf{g}, \mathbf{E}], \quad (1.8)$$

при этом следует иметь в виду, что векторное произведение, а также операторы  $\operatorname{div}$  и  $\operatorname{rot}$  определены по отношению к метрике  $\gamma_{\alpha\beta}$ , а именно:

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}, \mathbf{B}]^\alpha &= (1/V\bar{\gamma}) \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \mathbf{A}_\beta \mathbf{B}_\gamma, \quad \operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{V\bar{\gamma}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (V\bar{\gamma} \mathbf{A}^\alpha), \\ (\operatorname{rot} \mathbf{A})_\alpha &= \frac{1}{V\bar{\gamma}} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial \mathbf{A}_\gamma}{\partial x^\beta}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Все наши рассуждения применимы лишь внутри светового цилиндра, так как за его пределами величины  $g_{00}$  и  $\gamma$  становятся отрицательными, а метрика  $\gamma_{\alpha\beta}$  теряет положительную определенность. Выразим электрическое и магнитное поля во вращающейся системе отсчета через поля в неподвижной системе отсчета, которые будем помечать тильдой:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}} &= \tilde{\mathbf{E}} + [[\Omega, r'], \mathbf{B}], \quad \mathbf{D} = V\bar{g}_{00} \tilde{\mathbf{E}}, \\ \tilde{\mathbf{B}} &= \tilde{\mathbf{B}}/V\bar{\gamma}, \quad \mathbf{H} = V\bar{g}_{00}\bar{\gamma} \tilde{\mathbf{B}} - V\bar{g}_{00}\bar{\gamma} [[\Omega, r'], \mathbf{E}] \end{aligned}$$

(здесь векторное произведение имеет тривиальный вид.). Тогда энергия электромагнитного поля во вращающейся системе отсчета, вычисляемая по формуле  $((\mathbf{E}, \mathbf{D}) + (\mathbf{H}, \mathbf{B}))/8\pi$ , принимает следующий вид:

$$(V\bar{g}_{00}/8\pi) (\tilde{\mathbf{E}}^2 + \tilde{\mathbf{B}}^2 - 2([\tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{B}}], [\Omega, r'])).$$

Чтобы понять, каковы физические следствия соотношений (1.8) и наличия нетривиальной метрики  $\gamma_{\alpha\beta}$ , рассмотрим простой пример. Пусть цилиндрическая электромагнитная волна, вектор-потенциал которой направлен вдоль оси  $z$ ,  $A_z = \exp(i\omega t + im\phi)f(r)$ , распространяется через неподвижную относительно вращающейся системы отсчета проводящую среду, проводимость которой равна  $\sigma$ . Из уравнений Максвелла следует, что

$$\tilde{\square} A_z = 4\pi j_z, \quad (1.10)$$

где  $\tilde{\square} = (\partial/\partial t - \Omega\partial/\partial\phi)^2 - \Delta$ ,  $\Delta$  — обычный оператор Лапласа, а ток  $j_z = \sigma E_z = -\sigma\partial A_z/\partial t$ . Пусть  $e^{im\phi}f(r)$  — собственная функция оператора  $\Delta$ :

$$\Delta [e^{im\phi}f(r)] = -\lambda^2 e^{im\phi}f(r).$$

Тогда из уравнения (1.10) следует, что

$$-(\omega - \Omega m)^2 + \lambda^2 = -i\sigma\omega, \quad (1.11)$$

откуда

$$\omega = \Omega m + (i\sigma \pm \sqrt{4\lambda^2 + 4i\sigma\Omega m - \sigma^2})/2. \quad (1.12)$$

Предположим, что  $4\lambda^2 \gg 4\sigma\Omega m \gg \sigma^2$ , тогда

$$\omega \approx (\Omega m \pm \lambda) + \frac{i\sigma}{2} \left( 1 \mp \frac{\Omega m}{\lambda} \right), \quad (1.13)$$

т. е. если

$$\Omega m > \lambda, \quad (1.14)$$

то наряду с экспоненциально затухающими решениями существуют экспоненциально растущие решения. Для того чтобы физически реализовать описанную модель, можно заполнить проводящим веществом цилиндрический резонатор, однако для выполнения условия (1.14) требуется, чтобы радиус резонатора был больше радиуса светового цилиндра  $r_0 = c/\Omega$ . Тем не менее, для получения экспоненциально растущей моды не обязательно, чтобы вещество заполняло весь резонатор. В разд. 2 мы, следуя [3], рассмотрим это более подробно.

Тот факт, что некоторые цилиндрические волны усиливаются, отражаясь от врачающегося цилиндра, сделанного из поглощающего электромагнитное излучение вещества, следует из термодинамических соображений. Пусть поток энергии в падающей волне, нормированный на единицу длины вдоль оси  $z$ , равен  $W$ , а поток энергии в отраженной волне —  $W_1$ . С помощью тензора напряжений электромагнитного поля легко рассчитать, что падающая волна имеет также определенный поток момента вращения  $L_z = Wm/\omega$ , где  $\omega$  — круговая частота, а  $m$  — мультипольность волны. Аналогично поток момента вращения в отраженной волне равен  $L_{z1} = W_1m/\omega$ .

Если  $E$  и  $M$  — соответственно полная энергия и полный момент вращения цилиндра (на единицу длины), то

$$\frac{dE}{dt} = W - W_1, \quad \frac{dM}{dt} = L_z - L_{z1} = \frac{m}{\omega} (W - W_1). \quad (1.15)$$

Из термодинамического тождества

$$dE = TdS + \Omega dM \quad (1.16)$$

и второго закона термодинамики следует, что

$$dE/dt - \Omega(dM/dt) \geq 0. \quad (1.17)$$

Объединяя (1.15) и (1.17), получаем окончательно

$$(W - W_1)(1 - \Omega m/\omega) \geq 0. \quad (1.18)$$

Таким образом, при выполнении условия

$$\omega < m\Omega \quad (1.19)$$

$W_1 > W$ , т. е. волна усиливается при отражении. Говоря иными словами, при выполнении условия (1.19) термодинамически возможно только рассеяние с усилением цилиндрической волны с данной мультипольностью. С энергетической точки зрения при данном процессе кинетическая энергия вращения цилиндра переходит частично в энергию волны, а частично — в тепловую энергию цилиндра.

## 2. УСИЛЕНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ПРИ ОТРАЖЕНИИ ОТ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ТЕЛА

Рассмотрим описанное в [3] усиление электромагнитных волн, создаваемое вращающимся длинным проводящим цилиндром радиуса  $r_0$ , окруженным отражающим цилиндрическим экраном. Вращение цилиндра нерелятивистское, так что  $\Omega r_0/c \ll 1$ , где  $\Omega$  — угловая частота

вращения. Цилиндр будем считать металлическим с проводимостью  $\sigma \gg \omega$ . Отражающий экран также имеет форму цилиндра с радиусом  $R_0$ ; потерями в экране будем пренебречь. Ниже показано, что экран должен находиться в волновой зоне, так что  $\omega R_0/c \geq 1$ , где  $\omega$  — частота генерируемой волны. С боков рассматриваемая система закрыта идеально отражающими стенками. Если цилиндр достаточно длинен, то влиянием этих стенок также можно пренебречь. Фактически наличие боковых стенок приводит лишь к изменению собственных частот системы и потерь, но не меняет качественных результатов.

Рассчитаем собственные частоты генератора. При выбранной зависимости от времени  $e^{-i\omega t}$  наличие генерации, т. е. экспоненциального роста амплитуды волны со временем, проявится в положительности мнимой части собственной частоты.

В данной задаче малыми параметрами являются величины  $\Omega r_0/c$  и (с учетом критерия (1.19) для небольших  $m$ )  $\omega r_0/c$ ; величина  $\sigma r_0/c$  может быть и малой, и большой. Численная величина ответа зависит от соотношения  $r_0$  и «эффективной» величины «скин-слоя»  $\delta = \delta_0 \times \sqrt{\omega / |\omega - m\Omega|}$ , где  $\delta_0 = c/\sqrt{2\pi\sigma}$  — «обычный» скин-слой.

В рассматриваемой задаче возможны две различные поляризации генерируемой волны.

А. Пусть  $E_r = E_\phi = 0$ , электрическое поле направлено по оси цилиндра. Тогда  $\Phi = A_r = A_\phi = 0$ ,  $A_z = \operatorname{Re}[f(r)e^{im\Phi - i\omega t}]$ . Границные условия есть  $|f(0)| < \infty$ ,  $f(R_0) = 0$ . При  $r < r_0$  решение имеет вид

$$f(r) = \operatorname{const} J_m(\alpha r), \quad (2.1)$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{4\pi\sigma|\omega - m\Omega|}}{c} \exp \left[ \frac{i\pi}{4} \operatorname{sgn}(\omega - m\Omega) \right],$$

возникает также ток  $j_z = \sigma(E_z - (\Omega/c)B_r)$ . При  $r > r_0$  решение есть

$$f(r) = \operatorname{const} \left[ N_m \left( \frac{\omega}{c} R_0 \right) J_m \left( \frac{\omega}{c} r \right) - N_m \left( \frac{\omega}{c} r \right) J_m \left( \frac{\omega}{c} R_0 \right) \right]. \quad (2.2)$$

При  $r = r_0$   $f(r)$  и  $f'(r)$  непрерывны, что вытекает из непрерывности  $E_z$  и  $B_\phi$  на границе вращающегося цилиндра.

Отсюда можно найти, что в первом приближении собственные частоты системы (действительные)  $\omega_0$  определяются из уравнения

$$J_m(\omega_0 R_0/c) = 0, \quad (2.3)$$

как если бы вращающийся цилиндр вообще отсутствовал. Когда  $m=1$ , то  $(\omega_0)_{\min} = 3,83(c/R_0)$ . В следующем приближении у частоты  $\omega$  появляется комплексная добавка  $\omega_1$ ,  $\omega = \omega_0 + \omega_1$ . Приведем результаты расчета для двух предельных случаев:

а)  $\delta \gg r_0$  —

$$\operatorname{Im} \omega = - \frac{\pi^3 N_m^2(\omega_0 R_0/c)}{(m+1)(m-1)!(m+1)!} \left( \frac{\omega_0 r_0}{2c} \right)^{2m} \frac{\sigma \omega_0 (\omega_0 - m\Omega) r_0^2}{c^2}, \quad (2.4)$$

б)  $\delta \ll r_0$  —

$$\operatorname{Im} \omega = - \operatorname{sgn}(\omega_0 - m\Omega) \frac{\pi^2 N_m^2(\omega_0 R_0/c)}{[(m-1)!]^2} \left( \frac{\omega_0 r_0}{2c} \right)^{2m} \times$$

$$\times (\omega_0/r_0) (c/\sqrt{2\pi\sigma|\omega_0 - m\Omega|}). \quad (2.5)$$

Видно, что  $\operatorname{Im} \omega > 0$  (имеет место генерация), если  $\omega < m\Omega$ . При фиксированных  $\omega$ ,  $\sigma$  и  $r_0$  величина  $\operatorname{Im} \omega / \omega$  максимальна, если  $\delta \sim r_0$ , и тогда  $\operatorname{Im} \omega / \omega \sim (\omega_0 r_0/c)^{2m} \ll 1$ ,

**В** Магнитное поле направлено по оси цилиндра (оси  $z$ ). Если  $B_z = f(r) e^{im\phi - i\omega t}$ , то вне цилиндра ( $r > r_0$ )

$$E_r = -\frac{mc}{\omega r} f(r) e^{im\phi - i\omega t}, \quad E_\varphi = -\frac{ic}{\omega} \frac{df(r)}{dr} e^{im\phi - i\omega t} \quad (2.6)$$

(знак  $\operatorname{Re}$  здесь всюду подразумевается)

В этом случае внутри цилиндра  $\operatorname{div} \mathbf{E} \neq 0$  и возникает индуцированный заряд  $\rho$ , а также дополнительный конвекционный ток  $\mathbf{j}_{\text{conv}} = \rho[\Omega, \mathbf{r}]$ . Подставляя выражение для полного тока

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_{\text{conv}} + \sigma(\mathbf{E} + (1/c)[V, \mathbf{B}])$$

в уравнение непрерывности

$$(1/c)(\partial\rho/\partial t) + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0,$$

находим, что с точностью до малых членов порядка  $\Omega/\sigma$

$$\rho = -(\Omega/4\pi c)(2f + rf')e^{im\phi - i\omega t}. \quad (2.7)$$

Из уравнений Максвелла, опуская малые члены вида  $(\Omega r/c)^2$ , получаем

$$f(r) = AJ_m(\alpha r) \quad (2.8)$$

при  $r < r_0$ ; величина  $\alpha$  определена в формуле (2.1). Тогда при  $r < r_0$

$$E_r = \left( \frac{imc}{4\pi\sigma r} - \frac{\Omega r}{c} \right) AJ_m(\alpha r), \quad E_\varphi = -\frac{c\alpha}{4\pi\sigma} AJ'_m(\alpha r). \quad (2.9)$$

Вне цилиндра ( $r > r_0$ )

$$f(r) = A_1 \left[ N'_m \left( \frac{\omega}{c} R_0 \right) J_m \left( \frac{\omega}{c} r \right) - N_m \left( \frac{\omega}{c} r \right) J'_m \left( \frac{\omega}{c} R_0 \right) \right], \quad (2.10)$$

а  $E_r$  и  $E_\varphi$  определяются по формуле (2.6). При этом  $E_\varphi(R_0) = 0$ .

На границе врачающегося цилиндра ( $r = r_0$ ) возникает поверхностная плотность заряда  $\mu$  и поверхностный конвекционный ток  $I_\varphi = \Omega r_0 \mu$ . Уравнение непрерывности для  $\mu$  имеет вид

$$(\partial\mu/\partial t) + \Omega(\partial\mu/\partial\phi) = j_r(r_0 - 0). \quad (2.11)$$

Отсюда находим

$$\mu = -(mc/4\pi r_0(\omega - m\Omega))f(r_0 - 0)e^{im\phi - i\omega t}. \quad (2.12)$$

Эта формула верна и при  $\omega \rightarrow m\Omega$ , если выразить  $f(r_0 - 0)$  через  $f(r_0 + 0)$  с помощью формулы (2.14). Условия сшивания на границе  $r = r_0$  имеют вид

$$[E_\varphi] = 0, \quad [E_r] = 4\pi\mu, \quad [B_z] = -(4\pi\Omega r_0/c)\mu, \quad (2.13)$$

что дает

$$f(r_0 - 0) = ((\omega - m\Omega)/\omega)f(r_0 + 0), \quad f'(r_0 - 0) = i(4\pi\sigma/\omega)f'(r_0 + 0). \quad (2.14)$$

Формулы верны и при  $\omega \rightarrow m\Omega$  (при этом  $f(r_0 - 0) \rightarrow 0$ , а поверхностная плотность  $\mu$  остается конечной).

Подставляя (2.8) и (2.10) в (2.14), можно найти собственные частоты  $\omega$ . В первом приближении  $\omega$  удовлетворяет уравнению

$$J'_m(\omega_0 R_0/c) = 0, \quad (2.15)$$

совпадающему с таковым для случая отсутствия врачающегося цилиндра. При  $m=1$  первый корень  $\omega_0 = 1,84 c/R_0$ . В следующем приближении у частоты  $\omega$  появляется комплексная добавка  $\omega_1$ ,  $\omega = \omega_0 + \omega_1$ , причем

$$\operatorname{Im} \omega = -\frac{m}{\pi (m!)^2 J_m^2 (\omega_0 R_0 / c)} \left(1 - \frac{m^2 c^2}{\omega_0^2 R_0^2}\right)^{-1} \left(\frac{\omega_0 r_0}{2c}\right)^{2m} \frac{c^2 (\omega_0 - m\Omega)}{\sigma \omega_0 R_0^2} \quad (2.16)$$

при  $\delta \gg r_0$  и

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \omega &= -\operatorname{sgn}(\omega_0 - m\Omega) \frac{1}{(m!)^2 J_m^2 (\omega_0 R_0 / c)} \times \\ &\times \left(1 - \frac{m^2 c^2}{\omega_0^2 R_0^2}\right)^{-1} \left(\frac{\omega_0 r_0}{2c}\right)^{2m} \sqrt{\frac{2 |\omega_0 - m\Omega|^3}{\pi \sigma}} \frac{c r_0}{\omega_0 R_0^2} \end{aligned} \quad (2.17)$$

при  $\delta \ll r_0$ . Снова видно, что  $\operatorname{Im} \omega > 0$ , если  $\omega < m\Omega$ . Сравнение формул (2.4), (2.5) и (2.16), (2.17) для двух различных поляризаций показывает, что если  $\sigma r_0 / c > 1$ , то в первом случае эффект усиления больше: в  $(\sigma r_0 / c)^2$  раз при  $\delta \gg r_0$  и в  $(|\omega - m\Omega| r_0 / c)^{-2}$  раз при  $\delta \ll r_0$  (для выполнения неравенства  $\delta \leq r_0$  необходимо, чтобы  $\sigma r_0 / c \gg 1$ ). При  $\sigma r_0 / c < 1$  всегда  $\delta \gg r_0$  и второй случай является более выгодным.

### 3. СПОНТАННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ПРОВОДЯЩЕГО ЦИЛИНДРА

Эффект усиления цилиндрических электромагнитных волн, падающих на слабопроводящий цилиндр радиуса  $r_0$ , вращающийся вокруг своей оси с угловой скоростью  $\Omega$ , рассматривался в [3–5]. При этом использовались уравнения классической электродинамики, записанные в неподвижной системе координат. В этих работах был также сделан вывод о том, что такой цилиндр спонтанно излучает фотоны. Мы выведем формулу для спонтанного излучения цилиндра с помощью квантования электромагнитного поля во вращающейся системе отсчета.

В неподвижных цилиндрических координатах  $r, \varphi, z, t$  квантование электромагнитного поля задается формулами

$$\begin{aligned} \hat{A}(r, \varphi, z, t) &= \int_0^\infty d\omega \int_{-\omega}^\omega dk \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \exp(-i\omega t + im\varphi + ikz) \times \\ &\times A_{\omega, k, m}(r) \hat{a}_{\omega, k, m}^+ + \text{э.с.}; \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$[\hat{a}_{\omega, k, m}^-, \hat{a}_{\omega', k', m'}^+] = \delta(\omega - \omega') \delta(k - k') \delta_{mm'}, \quad (3.2)$$

где  $A_{\omega, k, m}$  — волновые функции фотонов, имеющих энергию  $\omega$ , угловой момент  $m$  и проекцию импульса на ось  $z$ , равную  $k$ . Для квантования во вращающейся системе отсчета надо [6] произвести в формуле (3.1) замену  $\varphi = \varphi' + \Omega t$ :

$$\begin{aligned} \hat{A}(r, \varphi', z, t) &= \int_0^\infty d\omega \int_{-\omega}^\omega dk \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \exp[i(\Omega m - \omega)t + im\varphi' + ikz] \times \\ &\times A_{\omega, k, m}(r) \hat{a}_{\omega, k, m}^+ + \text{э.с.} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_{-\Omega m}^{\infty} d\omega' \int_{-\omega' - \Omega m}^{\omega' + \Omega m} dk \exp(-i\omega' t + \\ &+ im\varphi' + ikz) B_{\omega', k, m} \hat{b}_{\omega', k, m}^+ + \text{э.с.}; \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$B_{\omega', k, m} = A_{\omega' + \Omega m, k, m}, \quad \hat{b}_{\omega', k, m}^+ = \hat{a}_{\omega' + \Omega m, k, m}^+. \quad (3.4)$$

Из формул (3.3) и (3.4) видно, что при  $m > 0$  существуют операторы рождения  $\hat{b}_{\omega', k, m}^+$  с отрицательными частотами  $\omega'$ .

Запишем во вращающейся системе координат  $r, \varphi', z, t$  гамильтониан взаимодействия цилиндра с электромагнитным полем в следующем условном виде:

$$\hat{H}_{\text{int}} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_{-\omega_m}^{\infty} d\omega' \int_{-\omega'-\Omega m}^{\omega'+\Omega m} dk \int_{-\infty}^{+\infty} dE \hat{b}_{\omega', k, m}^+ \hat{V}_{\omega', k, m, E} + \text{э.с.},$$

где  $\hat{V}_{\omega', k, m, E}$  — оператор, увеличивающий энергию цилиндра на величину  $E$ . Амплитуда перехода цилиндра из основного состояния в состояние с энергией  $E$  при одновременном испускании фотона частоты  $\omega'$  определяется в первом порядке теории возмущений величиной

$$\langle \omega', k, m; E | \hat{b}_{\omega', k, m}^+ \hat{V}_{\omega', k, m, E} | 0, 0, 0; 0 \rangle \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\omega'+E)t} dt = \\ = \langle \omega', k, m; E | \hat{b}_{\omega', k, m}^+ \hat{V}_{\omega', k, m, E} | 0, 0, 0; 0 \rangle 2\pi\delta(\omega' + E),$$

$\delta$ -функция выражает закон сохранения энергии. Ясно, что цилиндр будет спонтанно излучать отрицательно-частотные фотоны, т. е. те фотоны, у которых  $\omega' = \omega - m\Omega < 0$ .

Наличие отрицательно-частотных фотонов связывается в работе [7] с локальной пространственноподобностью векторного поля Киллинга, соответствующего временным сдвигам во вращающейся системе отсчета. Если же поместить вращающийся цилиндр внутрь идеально отражающей коаксиальной цилиндрической поверхности радиуса  $R_0 < c/\omega$ , то, так как внутри такой поверхности это поле всюду времениподобно, отрицательно-частотных мод не будет и излучение цилиндра прекратится, что соответствует уже описанным в разд. 2 результатам работы [3].

Для определения вероятности излучения фотона вращающимся цилиндром поместим цилиндр в поле цилиндрической волны, содержащей один фотон частоты  $\omega'$ , и найдем поглощаемую в единицу времени энергию. В системе покоя цилиндра эта энергия равна  $W = \sigma \int |E|^2 dV$ , где  $\sigma$  — проводимость цилиндра (мы предполагаем, что  $\sigma \ll \omega'$ ,  $\sigma \ll r_0^2/\omega'$ ). При этом число спонтанно излучаемых в единицу времени фотонов равно  $dN/dt = W/\omega'$ . Пусть электрическое поле волны поляризовано в плоскости, проходящей через ось цилиндра, тогда вектор-потенциал имеет компоненты

$$A_r = -i \frac{\exp(-i\omega t + im\varphi + ikz)}{2\sqrt{\pi}} \frac{k}{\omega} (J_{m+1}(\tilde{k}r) - J_{m-1}(\tilde{k}r)),$$

$$A_\varphi = -i \frac{\exp(-i\omega t + im\varphi + ikz)}{2\sqrt{\pi}} \frac{k}{\omega} (J_{m+1}(\tilde{k}r) + J_{m-1}(\tilde{k}r)),$$

$$A_z = \frac{\exp(-i\omega t + im\varphi + ikz)}{\sqrt{\pi}} \frac{\tilde{k}}{\omega} J_m(\tilde{k}r),$$

где  $\tilde{k} = \sqrt{\omega^2 - k^2}$ , а  $J_m(x)$  — функция Бесселя. Во вращающейся системе отсчета старшие члены разложения электрического поля в окрестности  $r=0$  равны

$$E_r = \frac{\exp(-i\omega't + im\varphi' + ikz)}{\sqrt{\pi}} \frac{\tilde{k}k^{m-1}r^{m-1}}{2^m(m-1)!},$$

$$E_\varphi = iE_r, \quad E_z = i \left( \Omega m \frac{\omega^2}{\tilde{k}^2} - \omega \right) \frac{\tilde{k}^2 r}{k\omega} E_r.$$

Так как компонента  $E_z$  содержит лишнюю степень  $r$ , то основной вклад в поглощаемую энергию  $W_1$  вносят  $E_r$  и  $E_\phi$ , при этом число излучаемых в единицу времени фотонов на единицу частоты и импульса равно

$$\frac{dN_1(\omega, k, m)}{dt d\omega dk} = \frac{W_1}{\Omega m - \omega} = \frac{\sigma l k^2 \tilde{k}^{2m-2} r_0^{2m}}{2^{2m-1} m! (m-1)! (\Omega m - \omega)}, \quad (3.5)$$

где  $l$  — длина цилиндра. Если электрическое поле фотона поляризовано в плоскости, перпендикулярной оси цилиндра, то число излучаемых фотонов равно

$$\frac{dN_2(\omega, k, m)}{dt d\omega dk} = \frac{\sigma l \omega^2 \tilde{k}^{2m-2} r_0^{2m}}{2^{2m-1} m! (m-1)! (\Omega m - \omega)}. \quad (3.6)$$

Из формул (3.5) и (3.6) видно, что величины  $dN_1/dt$  и  $dN_2/dt$  быстро убывают с ростом  $m$ , поэтому для определения излучаемой цилиндром мощности достаточно учесть лишь вклад фотонов с  $m=1$ :

$$P = \int_0^{\Omega-\sigma} d\omega \omega \int_{-\omega}^{\omega} dk \sum_{i=1,2} \frac{dN_i(\omega, k, 1)}{dt d\omega dk} \approx \frac{8}{3} \sigma l r_0^2 \Omega^4 \ln \frac{\Omega}{\sigma}. \quad (3.7)$$

В качестве верхнего предела интегрирования по  $\omega$  в формуле (3.7) выбрана величина  $\Omega - \sigma$ , поскольку использованное при вычислении  $dN_i/dt d\omega dk$  приближение справедливо лишь в случае  $\Omega - \omega = \omega' \gg \sigma$ .

Отметим аналогию, существующую между аномальным эффектом Доплера (см., например, [8]) и спонтанным излучением цилиндра. И в том и в другом случае можно выбрать такие координаты, в которых, во-первых, излучающее тело покоятся, во-вторых, уравнения Максвелла не зависят явно от времени и, в-третьих, волновые функции, стоящие при операторах рождения электромагнитного поля, проквантованные в неподвижной системе отсчета, сохраняют гармоническую зависимость от времени, однако частоты некоторых мод меняют знак. Трех этих свойств достаточно для того, чтобы тело, которое, будучи неподвижным, поглощает фотоны, стало бы их спонтанно излучать. Продолжая аналогию, отметим связь между излучением Вавилова — Черенкова и излучением электрона, равномерно вращающегося по окружности. В обоих случаях электрон излучает волны, имеющие нулевую частоту в сопутствующей ему системе отсчета.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Фок В. А. — УФН, 1936, 16, с 1070.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. — М.: Наука, 1973.
3. Зельдович Я. Б., Старобинский А. А. — В сб. Вопросы математической физики. — Л.: Наука, 1976.
4. Зельдович Я. Б. — Письма в ЖЭТФ, 1971, 14, с. 270.
5. Зельдович Я. Б. — ЖЭТФ, 1972, 62, с. 2076.
6. Letaw J. R., Pfautsch J. D. — Phys. Rev. D., 1980, 22, p. 1345
7. Де Витт Б. С. — В сб.: Черные дыры. — М.: Мир, 1978.
8. Гинзбург В. Л., Фролов В. П. — Письма в ЖЭТФ, 1986, 43, с 265.

Институт физических проблем  
АН СССР

## ROTATING BODIES AND ELECTRODYNAMICS IN A ROTATING REFERENCE FRAME

*Ya. B. Zel'dovich, L. V. Rozhanskij, A. A. Starobinskij*

Maxwell equations for a uniformly rotating non-inertial reference frame are derived. It is shown that electrodynamic field in a rotating reference frame may have negative energy to amplify electromagnetic waves reflected by a rotating absorber. Electromagnetic generator using this effect is considered. By analogy, a rotating conductor may spontaneously emit photons. Intensity of this spontaneous radiation is calculated.