ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXIX, № 8 *РАДИОФИЗИКА* *1986*

УДК 621.372.826

СОБСТВЕННЫЕ МОДЫ СЛОИСТО-ПЕРИОДИЧЕСКОГО ПЛАНАРНОГО ВОЛНОВОДА

А. А. Мартынов, О. К. Погосов, В. И. Чижиков

Рассмотрена слоисто-периодическая структура с нарушением и без нарушения трансляционной симметрии диэлектрической проницаемости. В методе амплитудных функций получены уравнения для определения постоянной распространения и полевой функции с произвольным распределением $\varepsilon(x)$ в периодическом слое. Приведены численные примеры.

В последнее время в связи с нуждами интегральной оптики привлечено внимание к распространению световых волн в слоисто-периодических структурах [1,2]. Эти структуры обладают специфическими свойствами и находят ряд полезных приложений в качестве фильтров, поляризаторов, устройств для разделения пучка, просветляющих покрытий и т. д.

Достаточно полно и подробно рассматривались системы однородных плоскопараллельных пленок [3], которые можно изготовлять методом напыления, а их толщину и периодичность контролировать с большой точностью. Кроме того, теоретический анализ таких структур не представляет особых затруднений.

При произвольном распределении диэлектрической проницаемости в периодическом слое расчет поля волноводных мод и эффективных показателей преломления можно провести по известному в квантовой механике методу фазовых функций [4,5]. Применительно к спектральной задаче для планарного волновода с произвольной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(x)$ этот метод был использован авторами работы [6] и назван методом амплитудных функций, поскольку в этом случае задача сводится к решению системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для амплитудных функций, а не фазовых, что имеет место при вычислении фаз рассеяния [4,5]. Анализ планарного волновода [6] с произвольной $\varepsilon(x)$ показал эффективность этого метода, и поэтому представляется целесообразным распространить его на периодические структуры.

Рассмотрим систему слоисто-периодических пленок с $\varepsilon(x)=\varepsilon(x+a)$, где a — период. Выберем ось x вдоль направления стратификации, а z — вдоль направления распространения электромагнитных колебаний. Примером такой структуры является периодическая система кусочно-однородных слоев с диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2 ($\varepsilon_1 > \varepsilon_2$) и толщинами a_1 и a_2 ($a_1+a_2=a$). Аналитическое решение волнового уравнения для такой среды может быть использовано для сравнения с методом амплитудных функций.

Собственные моды и постоянные распространения γ в этом случае легко получить с помощью характеристической матрицы [3]. Возможные значения γ и ее дисперсия от k ($-\pi/a < k \leqslant \pi/a$) для ТЕ-мод определяются трансцендентным уравнением

$$\cos ka=\cos k_1a_1 \cos k_2a_2-\frac{1}{2}\left(\frac{k_2}{k_1}+\frac{k_1}{k_2}\right)\sin k_1a_1 \sin k_2a_2, \tag{1}$$

$$k_1=(\varepsilon_1-\gamma^2)^{1/2}, \quad k_2=(\varepsilon_2-\gamma^2)^{1/2}.$$

Очевидно, что в дисперсионной зависимости $\gamma(k)$ появляются разрешенные ($\cos ka \leqslant 1$) и запрещенные ($\cos ka > 1$) зоны на оси γ.

Волноводный режим распространения электромагнитных колебаний осуществляется в слоях с диэлектрической проницаемостью ε_1 при $\varepsilon_2 < \gamma^2 < \varepsilon_1$. В этом случае волновое число k_2 становится комплексным и дисперсионное уравнение получается из (1) заменой $k_2 = i\varkappa_2 = i(\gamma^2 - \varepsilon_2)^{1/2}$ и тригонометрических функций, содержащих k_2, на гиперболические.

Полностью трансляционно-симметричная структура является идеализацией. Более реальным будет многослойник, содержащий N периодов и граничащий с двух сторон с однородной средой, диэлектрическая проницаемость которой ε_3. Для многослойника дисперсионное уравнение, определяющее значения γ для ТЕ-мод, можно записать в виде

$$\sin k_1 a_1 \cos k_2 a_2 \left(\frac{k_1}{k_3} - \frac{k_3}{k_1}\right) + \sin k_2 a_2 \cos k_1 a_1 \times \left(\frac{k_2}{k_3} - \frac{k_3}{k_2}\right) = 2 \sin ka \operatorname{ctg} Nka, \tag{2}$$

где $k_3 = (\gamma^2 - \varepsilon_3)^{1/2}$.

Однако в отличие от (1) $\cos ka$, наряду со значениями, меньшими единицы, может принимать значения и бо́льшие единицы, т. е. быть комплексным. Следовательно, уравнение (2) определяет постоянные распространения как при $\cos ka < 1$ (объемные волны), так и при $\cos ka > 1$ (поверхностные волны). Оба типа колебаний, возбуждаемых в периодическом многослойнике, наблюдали экспериментально в [1].

Теперь рассмотрим слоисто-периодическую структуру с произвольным распределением диэлектрической проницаемости в слое.

При стандартном способе нахождения собственных мод необходимо аппроксимировать $\varepsilon(x)$ кусочно-постоянной функцией с достаточно большим числом ступенек и сшивать компоненты векторов электромагнитного поля на границах ступенек. Эта процедура эквивалентна построению соответствующей характеристической матрицы [3]. Ясно, что для диэлектрической проницаемости сложного вида этот процесс является достаточно трудоемким, а кроме того, затруднительна оценка погрешности получаемого результата.

Метод амплитудных функций [6] позволяет построить простой алгоритм вычисления собственных мод, свободный от упомянутых недостатков стандартного подхода.

В дальнейшем для простоты будем рассматривать только ТЕ-моды. Вектор электрического поля волны в этом случае имеет единственную ненулевую компоненту $E_y(x)$, удовлетворяющую уравнению

$$E_y''(x) + [\varepsilon(x) - \gamma^2] E_y(x) = 0. \tag{3}$$

Пусть снова диэлектрическая проницаемость является трансляционно-симметричной, т. е. $\varepsilon(x+a) = \varepsilon(x)$. Обозначим ε_1 максимальное значение функции $\varepsilon(x)$ и, кроме того, для определенности положим $\varepsilon(0) = \varepsilon_1$. Тогда решение (3) вблизи максимума ведет себя как $\exp(\pm ik_1 x)$. При изменении x по периоду зафиксируем решение так, чтобы $E_y(0) = 1$ и $E_y'(0) = ik_1$.

Будем вычислять не саму функцию E_y, а только ее изменение вследствие «действия» диэлектрической проницаемости. Для этого представим полевую функцию E_y в виде

$$E_y(x) = A(x)[e^{ik_1 x} + B(x) e^{-ik_1 x}], \quad 0 \leqslant x \leqslant a. \tag{4}$$

Поскольку вместо одной функции E_y введены две амплитудные функции $A(x)$ и $B(x)$, то на них необходимо наложить дополнительное условие. Потребуем, чтобы выполнялось следующее условие для производной полевой функции:

$$E'_y = ik_1 A\,[e^{ik_1x} - Be^{-ik_1x}], \tag{5}$$

или, что эквивалентно,

$$A'\,[e^{ik_1x} + Be^{-ik_1x}] + AB'\,e^{-ik_1x} = 0. \tag{6}$$

Разрешая систему (3)—(6) относительно производных $B'(x)$ и $A'(x)$, легко получить следующие уравнения:

$$B' = \frac{\varepsilon - \varepsilon_1}{2ik_1}\,[e^{ik_1x} + Be^{-ik_1x}]^2; \tag{7}$$

$$A' = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon}{2ik_1}\,[1 + Be^{-2ik_1x}]\,A. \tag{8}$$

Эти амплитудные функции должны удовлетворять очевидным условиям. Во-первых, в силу линейности уравнения (8) функция $A(x)$ в точке $x=0$ определяется нормировкой полевой функции E_y и, в частности, может быть положена $A(0)=1$. Во-вторых, очевидно, что $B(0)=0$. Далее, учитывая, что вронскиан решений (3) не зависит от x, и вычисляя $W(E_y, E_y^*)$ при $x=0$, получаем

$$|B(x)|^2 + |A(x)|^{-2} = 1. \tag{9}$$

Квадрат модуля амплитудной функции $B(x)$ имеет смысл коэффициента отражения от части периодического слоя, заключенного в интервале $(0, x)$. Коэффициент прозрачности этой части слоя определяется $|A(x)|^{-2}$.

Уравнение (8) для амплитудной функции $A(x)$ может быть проинтегрировано в явном виде, что при условии $A(0)=1$ дает

$$A(x) = \exp\left\{\frac{1}{2ik_1}\int\limits_0^x [\varepsilon_1 - \varepsilon(x')]\,[1 + B(x')\exp(-2ik_1x')]\,dx'\right\}. \tag{10}$$

Что же касается уравнения (7) для функции $B(x)$, то его в общем виде можно решить только численно на ЭВМ.

Учет трансляционной симметрии можно осуществить следующим образом. Введем логарифмическую производную $g(x) = (\ln E_y)'$. Тогда

$$E_y(x) = \exp\left\{\int\limits_0^x g(x')\,dx'\right\}. \tag{11}$$

Принимая во внимание, что $E_y(x)$ — блоховская функция, т. е. $E_y(x) = \exp(ika)E_y(x)$, из (11) получаем

$$ka = \int\limits_0^a \operatorname{Im} g(x')\,dx', \tag{12}$$

где

$$\operatorname{Im} g = \frac{k_1(1 - |B(x)|^2)}{1 + |B(x)|^2 + 2\operatorname{Re}(Be^{-2ik_1x})}. \tag{13}$$

Соотношение (12) определяет возможные значения γ и ее зависимость от k.

Рассмотрим другую форму уравнений (7) и (8). Для этой цели сделаем замену

$$\alpha(x) = A(x), \quad \beta(x) = A(x)B(x). \tag{14}$$

Новые амплитудные функции удовлетворяют уравнениям

$$\alpha'(x) = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon}{2ik_1}\,[\alpha + \beta e^{-2ik_1x}], \quad \alpha(0)=1; \tag{15}$$

$$\beta'(x)=\frac{\varepsilon-\varepsilon_1}{2ik_1}[\alpha e^{2ik_1x}+\beta],\quad \beta(0)=0; \tag{16}$$

$$|\alpha(x)|^2-|\beta(x)|^2=1. \tag{17}$$

Эти функции не обладают непосредственным физическим смыслом, но их использование существенно в ряде случаев при практических расчетах. Это связано с тем, что возможны ситуации, когда $A\to 0$, $B\to 0$, но их произведение конечно.

Приведем также другую форму трансцендентного уравнения (12). Учитывая блоховский характер $E_y(x)$, мы можем написать:

$$\cos ka=\operatorname{Re}\alpha(a)e^{ik_1x}+\operatorname{Re}\beta(a)e^{-ik_1x}. \tag{18}$$

Теперь проанализируем случай многослойника с нарушением трансляционной симметрии. В этом случае асимптотики для убывающего на бесконечности поля равны $\exp(\pm k_3x)$, где $k_3=(\gamma^2-\varepsilon_3)^{1/2}$. Решение во всей области изменения x запишем в виде

$$E_y(x)=C(x)[e^{-k_3x}+D(x)e^{k_3x}]. \tag{19}$$

Амплитудные функции удовлетворяют уравнениям

$$D'(x)=\frac{\varepsilon_3-\varepsilon}{2k_3}[e^{-k_3x}+D(x)e^{k_3x}]^2,\quad D(Na)=0; \tag{20}$$

$$C'(x)=\frac{\varepsilon-\varepsilon_3}{2k_3}C(x)[1+D(x)e^{2k_3x}],\quad C(Na)=1. \tag{21}$$

Условие, определяющее дискретный спектр значений γ, имеет вид

$$D(0,\gamma)=\infty. \tag{22}$$

В качестве примера рассмотрим слоисто-периодическую структуру с такими параметрами: $\varepsilon_1=2{,}37^2$, $\varepsilon_2=1{,}34^2$, а ширины слоев в периоде возьмем равными единице и двойке. Очевидно, что постоянная распространения находится в интервале $1\leqslant\gamma\leqslant 2{,}37$ (в более общем случае $\sqrt{\varepsilon_3}\leqslant\gamma\leqslant(\max\varepsilon(x))^{1/2}$). Для определения значений γ такой структуры с однородными слоями можно использовать либо амплитудное уравнение (20), либо стандартное уравнение (2). С целью иллюстрации нами проведен расчет γ с использованием этих двух уравнений. В таблице приведены результаты расчетов для $N=1{,}2$.

Таблица 1

Постоянные распространения ТЕ-мод

N	$a_1=a_2=1$			$a_1=a_2=2$		
	$\cos ka$	γ из (20)	γ из (2)	$\cos ka$	γ из (20)	γ из (2)
1	−0,15981	1,83411	1,83411	1,34831 0,31374 −0,86522	1,00027 1,38992 2,13033	1,00027 1,38991 2,13033
2	−0,58592 0,42588	1,73786 1,92925	1,73785 1,92924	1,34838 0,70103 −0,38220 −1,08583 0,22065	1,00051 1,32884 1,46967 2,12810 2,14101	1,00051 1,32883 1,46966 2,12803 2,14094

По существу спектр постоянной распространения собственных мод многослойника можно понять, исследуя ситуацию при $N=1$ и вычисляя при этом $\cos ka$ как функцию от γ. Действительно, во-первых, сразу проявляется наличие или отсутствие поверхностных волн, постоянные распространения которых есть корни соответствующих уравнений при $|\cos ka| > 1$; во-вторых, выявляется число разрешенных зон для объемных мод ($|\cos ka| \leqslant 1$), границы которых определяются условием $\cos ka = \pm 1$. С увеличением ширины (или N) многослойника γ растет, появляются новые моды.

В наших примерах при $a_1 = a_2 = 1$ поверхностные волны отсутствуют и имеется одна разрешенная зона с границами $\gamma = 1{,}58$ и $\gamma = 2{,}01$, в которой возбуждается N объемных мод. В случае $a_1 = a_2 = 2$ существуют поверхностные моды и две зоны с границами (1,26; 1,52) и (2,13; 2,15). Характер распределения поля объемных мод зависит как от величины γ, так и от интервала, в котором они находятся: $1 \leqslant \gamma \leqslant \sqrt{\varepsilon_2}$ или $\sqrt{\varepsilon_2} \leqslant \gamma \leqslant \sqrt{\varepsilon_1}$.

Кроме рассмотренного выше многослойника с однородными слоями нами проведен также расчет постоянных распространения для распределения $\varepsilon(x)$, описывающего симметричный слой Эккарта [7]: $\varepsilon(x) = \varepsilon'/\mathrm{ch}^2 x$ (диэлектрическая проницаемость приведена для удобства к нулю на $\pm\infty$), для которого существует аналитическое решение: $\gamma_n = \{-(2n+1) + \sqrt{1+4\varepsilon'}\}/2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ При $\varepsilon' = 35/4$ возможны решения $\gamma_0 = 2{,}5$, $\gamma_1 = 1{,}5$, $\gamma_2 = 0{,}5$. Расчеты, проведенные по методу амплитудных функций, дают следующие значения для γ_n: $\gamma_0 = 2{,}50000$, $\gamma_1 = 1{,}50001$, $\gamma_2 = 0{,}49999$. Заметим, что полученная точность вычислений $\sim 10^{-5}$ достигается на ЭВМ ЕС-1022 за несколько минут.

В заключение подчеркнем преимущества данного подхода. Во-первых, уравнения (7), (8) в явном виде демонстрируют связь между амплитудными функциями $B(x)$ и $A(x)$ (имеющими смысл амплитуд рассеяния назад и вперед) и диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(x)$. Во-вторых, уравнение (7) — уравнение первого порядка (Риккати), свойства которого хорошо изучены. Тот факт, что амплитудное уравнение — первого порядка (хотя и нелинейное), упрощает программирование и вычисления на ЭВМ. При этом уменьшается количество операций и, следовательно, время счета. Кроме того, монотонный характер $B(x)$ и $A(x)$ позволяет проводить расчеты с большой точностью. В третьих, уравнения (7), (8) могут быть использованы для непосредственного исследования аналитических свойств амплитудных функций и для получения ряда новых приближений. Метод амплитудных функций позволяет в рамках единого подхода исследовать как задачи рассеяния электромагнитных волн на слоистой среде, так и задачи на связанные состояния — волноводные свойства слоистых сред. Данный подход может быть распространен на среды с цилиндрической симметрией [8] и, в принципе, на случай произвольной $\varepsilon(x, y)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Булгаков А. А., Ковтун В. Р. — Опт. и спектр., 1984, **56**, вып. 5, с. 769.
2. Glass N. E., Maradudin A. A. — Phys. Rev., 1984, **B 29**, № 4, p. 1840.
3. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. — М.: Наука, 1973. — 720 с.
4. Бабиков В. В. Метод фазовых функций в квантовой механике. — М.: Наука, 1976. — 287 с.
5. Калоджеро Ф. Метод фазовых функций в теории потенциального рассеяния.— М.: Мир, 1972. — 292 с.
6. Мартынов А. А., Чижиков В. И. — Опт. и спектр., 1984, **56**, вып. 5, с. 971.
7. Адамс М. Введение в теорию оптических волноводов. — М.. Мир, 1984. — 512 с.
8. Мартынов А. А., Погосов О. К., Чижиков В. И. Статья депонирована в ВИНИТИ, рег. № 466-85. Деп. от 17 января 1985 г.

Кубанский государственный
университет

Поступила в редакцию
17 декабря 1984 г.,
в окончательном варианте
11 ноября 1985 г.

NATURAL MODES OF LAMINATED-PERIODIC WAVEGUIDE

A. A. Martynov, O. K. Pogosov, V. I. Chizhikov

The laminated-periodic structure with and without translation symmetry breakdown of dielectrical permittivity is treated. Propagation constants and field equations with arbitrary distribution of $\varepsilon(x)$ in periodic layer are derived by amplitude functions method. The numerical examples are given.