ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXIX, № 8 *РАДИОФИЗИКА* *1986*

УДК 537.86

ДВИЖЕНИЕ СОЛИТОНА В СРЕДЕ С ФЛУКТУИРУЮЩИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Ф. Г. Басс, В. В. Конотоп, Ю. А. Синицын

На примере уравнений SG и φ^4 рассматривается динамика уединенной нелинейной волны в среде с флуктуирующими параметрами. Получена функция распределения параметров нелинейной волны в случаях, когда статистические свойства среды описываются гауссовым с произвольными радиусами корреляции и пуассоновским процессами. Исследовано влияние четности возмущения на динамику солитона.

Актуальным вопросам распространения нелинейных волн в средах с флуктуирующими параметрами посвящено большое количество работ [1–11]. К числу наиболее часто используемых методов следует отнести борновское приближение [2–4], метод среднего поля [5–7], стохастическую теорию возмущений, основанную на теории возмущений для регулярных неоднородностей [8, 9]. Борновское приближение имеет узкую область применимости [3, 10], а метод среднего поля неприменим для описания ряда нелинейных стохастических уравнений [11]. Наиболее предпочтителен, на наш взгляд, третий метод, поскольку в принципе он позволяет изучать многосолитонные решения точно решаемых нелинейных уравнений в произвольном порядке по малому параметру, которым является амплитуда флуктуаций среды. Если неоднородность в соответствующем нелинейном уравнении является случайной функцией координат и времени, то существенным предположением для применимости метода является дельта-коррелированность во времени случайной силы, т. е. мелкомасштабность флуктуаций [9]. Обобщение метода на случай процессов другого вида возможно, когда среда, в которой распространяется волна, пространственно однородна, а случайные функции зависят только от времени. Решению этой задачи посвящена настоящая работа.

В первом разделе получено уравнение для функции распределения параметров уединенной волны. Во втором разделе обсуждается случай гауссовых флуктуаций параметров среды произвольного масштаба. В третьем разделе исследуется случайная сила, являющаяся пуассоновским процессом. Находятся статистические характеристики волны.

1. Изучение проводится на примере возмущенного одномерного уравнения Клейна — Гордона:

$$\varphi_{tt} - \varphi_{xx} + \frac{dU(\varphi)}{d\varphi} = \varepsilon f(t) R[\varphi], \tag{1}$$

где $f(t)$ — случайная функция, $R[\varphi]$ — произвольный функционал φ, явный вид которого определяется в каждом конкретном случае, $\varepsilon \ll 1$. Нас будут интересовать два вида потенциала $U(\varphi)$:

$$U(\varphi) = \cos\varphi \text{ — уравнение sin — Gordon;} \tag{2}$$

$$U(\varphi) = -\frac{\omega_0^2}{2}\varphi^2 + \frac{\lambda}{4}\varphi^4 \text{ — уравнение } \varphi^4. \tag{3}$$

Уравнение (1) с потенциалом вида (2) или (3) описывает распространение нелинейных электромагнитных волн в полупроводниках с неквадратичным законом дисперсии, динамику дислокаций в кристаллах, доменные границы в слабых ферромагнетиках, джозефсоновский контакт, фазовые переходы и т. п.

Невозмущенные уравнения SG и φ^4 допускают решения в виде нелинейных уединенных волн:

$$(\mathrm{SG}) \qquad \varphi_0 = 4 \operatorname{arctg} e^{\vartheta}; \tag{4}$$

$$(\varphi^4) \quad \varphi_0 = \omega_0 \lambda^{-1/2} \operatorname{th}(\omega_0 2^{-1/2} \vartheta), \tag{5}$$

где $\vartheta = (x - ut - x_0)(1 - u^2)^{-1/2}$, u — скорость волны, x_0 — фазовый параметр. Следуя общепринятой терминологии, решения (4) и (5) будем называть кинками. Именно они являются объектом дальнейшего исследования. Флуктуации среды приводят к флуктуациям параметров кинка, которые определяются уравнениями [13]

$$\dot{u} = \varepsilon f(t) K_u \int_{-\infty}^{\infty} dx \varphi_{0t} R[\varphi_0]; \tag{6}$$

$$\dot{x}_0 = \varepsilon f(t) K_x \int_{-\infty}^{\infty} dx \varphi_{0u} R[\varphi_0], \tag{7}$$

где $K_u^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} dx (\varphi_{0ut}\varphi_{0t} - \varphi_{0u}\varphi_{0tt})$, $\qquad K_x^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} dx (\varphi_{0x}\varphi_{0ut} - \varphi_{0xt}\varphi_{0u})$.

Таким образом, задача сводится к системе двух стохастических уравнений. Введем плотность вероятности

$$P(\psi_1, \psi_2, t) = \langle \delta(\psi_1 - u(t)) \delta(\psi_2 - x_0(t)) \rangle. \tag{8}$$

Угловые скобки означают усреднение по всем реализациям случайной функции $f(t)$. Следуя известному методу [12], нетрудно получить уравнение для $P(\psi_1, \psi_2, t)$:

$$\partial P / \partial t = \dot{\theta}_t [i (\partial / \partial \psi_i) D_i (\psi_1, \psi_2)], \tag{9}$$

где

$$\dot{\theta}_t [v(t)] = (d/dt) \ln \langle \exp\{ i \int dt v(t) f(t) \} \rangle,$$

$$D_1 = \varepsilon K_u \int_{-\infty}^{\infty} dx \varphi_{0t} R[\varphi_0], \quad D_2 = \varepsilon K_x \int_{-\infty}^{\infty} dx \varphi_{0u} R[\varphi_0], \quad i = 1,2.$$

Рассмотрим волну с детерминированными в начальный момент времени параметрами, т. е. начальное условие для (9) имеет вид

$$P(\psi_1, \psi_2, 0) = \delta(\psi_1 - u_0) \delta(\psi_2), \tag{10}$$

где u_0 — начальная скорость волны.

В случаях (2) и (3), как это следует из (4) и (5), φ_{0t} и φ_{0u} являются соответственно четной и нечетной функциями ϑ. Следовательно, в случаях, когда $R[\varphi_0]$ имеет определенную четность по ϑ, функция распределения становится однопараметрической.

Подчеркнем, что при выводе (9) существенно использовалось то, что случайное поле не зависит от пространственной переменной x. Только в этом случае для произвольного поля можно вычислить вариационные производные $\delta u(\tau)/\delta f(t)$ и $\delta x_0(\tau)/\delta f(t)$ без требования дельта-коррелированности $f(t)$ во времени, что необходимо для получения (9) [12].

2. Рассмотрим случай, когда $f(t)$ — гауссов случайный процесс:

$$\langle f(t) \rangle = 0, \quad \langle f(t) f(t+\tau) \rangle = B(|\tau|).$$

Уравнение (9) принимает вид (уравнение Эйнштейна—Фоккера)

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \int\limits_0^t d\tau B(|t-\tau|) \frac{\partial}{\partial \psi_l} D_l \frac{\partial}{\partial \psi_k} D_k P. \tag{11}$$

Вводя перенормированное «время» $\xi = \int\limits_0^t dt_1 \int\limits_0^{t_1} d\tau B(|t-\tau|)$, получаем

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \psi_l} D_l \frac{\partial}{\partial \psi_k} D_k. \tag{12}$$

Рассмотрим сначала нечетные возмущения: $-R[\varphi_0(-\vartheta)] = R[\varphi_0(\vartheta)]$. Учитывая, что D_i не зависит от ψ_2, имеем

$$\partial P/\partial \xi = D_2^2 \, (\partial^2 P/\partial \psi_2^2).$$

Решением этого уравнения является функция

$$P(\psi_1, \psi_2, t) = \frac{\delta(\psi_1 - u_0)}{2\sqrt{\pi\xi}\, D_2} \exp\left[-\frac{\psi_2^2}{4\xi D_2^2}\right]. \tag{13}$$

Таким образом, в системе отсчета, движущейся со скоростью u_0, кинк совершает броуновское движение. При этом

$$\langle x_0 \rangle = 0, \quad \langle x_0^2 \rangle = 2\xi D_2^2 .$$

Форма и средняя скорость нелинейной волны в адиабатическом приближении не меняются, а для квадрата скорости имеем

$$\langle (u_0 + \dot{x}_0(t))^2 \rangle = u_0^2 + B(0) D_2^2 (u_0). \tag{14}$$

Моменты скорости кинка более высокого порядка непосредственно находятся из (7). Характер поведения солитонов уравнений SG и φ^4 одинаков, отличие заключается лишь в численном значении коэффициентов диффузии.

Если $R[\varphi_0(\vartheta)] = R[\varphi_0(-\vartheta)]$, то (9) сводится к уравнению

$$\partial P/\partial \xi = [(\partial/\partial \psi_1) D_1]^2 P$$

и функция распределения имеет вид

$$P(\psi_1, \psi_2, t) = \delta(\psi_2) P_1(\psi_1, t) = \frac{\delta(\psi_2)}{2\sqrt{\pi\xi}\, D_1(\psi_1)} \exp\left[-\frac{(\zeta(\psi_1) - \zeta(u_0))^2}{4\xi}\right]. \tag{15}$$

Здесь введена новая переменная $\zeta = \int d\psi_1 D_1^{-1}(\psi_1)$. В этом случае характер поведения солитона отличается от рассмотренного выше. Из (15) следует, что $P_1(\psi_1, t)$ — функция распределения по скоростям. При движении волны меняется не только скорость, но и форма. Из (15) также следует, что при $\tau_0 \ll \varepsilon^{-2}$, где τ_0 — радиус корреляции $f(t)$,

$$\langle F(u) \rangle = F(u_0) + (D_1(u_0)(\partial/\partial u_0))^2 F(u_0)\xi + O(\varepsilon^{-4}). \tag{16}$$

Здесь $F(u)$ — произвольная функция u. Если же $\tau_0 \gg \varepsilon^{-2}$, то возможна ситуация (например при $t \sim \varepsilon^{-3/2}$), когда $\varepsilon^2\xi \gg 1$ и статистические характеристики волны вычисляются с помощью асимптотической формулы

$$\langle F(u) \rangle = \frac{1}{2\sqrt{\pi\xi}} \int\limits_{\zeta_0 - 2\sqrt{\xi}}^{\zeta_0 + 2\sqrt{\xi}} d\zeta F(u(\zeta)). \tag{17}$$

При этом средняя скорость волны (если ее начальная скорость удовлетворяет условию $1-u_0^2 \gg \varepsilon$) убывает пропорционально t^{-1}.

Отметим, что кинк в случае четных по ϑ возмущений не выходит на стационарный режим вплоть до границ применимости адиабатического приближения.

Существенным отличием рассмотренного случая от дельта-коррелированных во времени случайных полей является то, что $u(t)$ и $x_0(t)$ — немарковские процессы. Уравнение для двухвременной плотности вероятности $P_2(\psi_1, \psi_2, t \mid \tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2, \tau)$ получается аналогично (9) и его общий вид приведен в [12]. В общем случае оно не допускает введения переходной плотности вероятности. Факторизовать $P_2(\psi_1, \psi_2, t \mid \tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2, \tau)$ можно только в случае нечетных по ϑ функционалов $R[\varphi_0]$, тогда она принимает вид

$$P_2 = (4\pi)^{-1}\left[\int_0^\tau\int_0^t d\tau_1 d\tau_2 B(|\tau_1-\tau_2|)\right]^{-1/2}\left[\int_0^\tau\int_t^\tau d\tau_1 d\tau_2 B(|\tau_1-\tau_2|)\right]^{-1/2}\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{\psi_2^2}{4\int_0^\tau\int_0^t d\tau_1 d\tau_2 B(|\tau_1-\tau_2|)}\right)\exp\left(-\frac{(\psi_2-\tilde{\psi}_2)^2}{4\int_0^\tau\int_t^\tau d\tau_1 d\tau_2 B(|\tau_1-\tau_2|)}\right),$$

т. е. P_2 представляет собой произведение двух гауссовых распределений с различными коэффициентами диффузии.

3. В данном разделе исследуется импульсный пуассоновский процесс

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n}\theta(t-t_i),$$

точки t_i равномерно распределены на интервале $[0; T]$, их среднее число $\bar{n}$ равно νT, а параметр ν характеризует среднюю плотность точек t_i.

Для импульсного пуассоновского процесса оператор $\dot{\theta}_t$ имеет вид [12]

$$\dot{\theta}_t[v(t)] = \nu\int_0^t d\tilde{t}\{\exp[i\int_{\tilde{t}}^t d\tau v(\tau)] - 1\}$$

и соответственно плотность вероятности для параметров кинка удовлетворяет уравнению

$$\partial P/\partial t = \nu\{\exp[-t(\partial/\partial\psi_i)D_i(\psi_1)] - 1\}P. \qquad (18)$$

Как и во втором разделе, рассмотрим отдельно возмущения, имеющие различную четность.

Пусть $R[\varphi_0(-\vartheta)] = -R[\varphi_0(\vartheta)]$, т. е. $D_1 \equiv 0$. В этом случае

$$P(\psi_1, \psi_2, t) = \delta(\psi_1 - u_0)P_1(\psi_2, t),$$

а $P_1(\psi_2, t)$ удовлетворяют уравнению

$$\partial P_1/\partial t = \nu\{\exp[-tD_2(\psi_1)(\partial/\partial\psi_2)] - 1\}P_1. \qquad (19)$$

Решение (19) имеет вид

$$P_1(\psi_2, t) = \frac{1}{2\pi}e^{-\nu t}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{i\xi\psi_2}\exp\left[\frac{i\nu}{\xi D_2}(e^{-i\xi t D_2} - 1)\right]. \qquad (20)$$

Если время t меньше среднего интервала между двумя импульсами ($t \ll \nu^{-1}$), то из (17) легко находится асимптотика моментов $x_0(t)$ n-го порядка:

$$\langle x_0^n \rangle = 2\nu \frac{t^{n+1}}{n+1} D_2^n(u_0). \tag{21}$$

Средняя скорость кинка в указанном временном интервале меняется по закону

$$\langle u \rangle = u_0 + \langle \dot{x}_0 \rangle = u_0 + 2\nu t D_2.$$

В зависимости от знака R происходит торможение ($R[\varphi_0] > 0$) или ускорение ($R[\varphi_0] < 0$) волны.

На временах $t \gg T$ для нахождения асимптотического значения скорости удобно воспользоваться непосредственно уравнением (7), из которого получаем

$$\langle u \rangle = u_0 + \langle \dot{x}_0 \rangle = u_0 + \nu T D_2(u_0).$$

Поведение кинка аналогично случаю, когда возмущение представляет включенную в момент времени $t=0$ регулярную силу. В нашем случае параметр $\nu T\varepsilon$ характеризует величину силы и соответственно должен быть мал: $\nu T\varepsilon \ll 1$.

Из (7) находим

$$\langle \dot{x}_0^2 \rangle = (\nu t + \nu^2 t^2) D_2^2(u_0).$$

Рассмотрим случай $R[\varphi_0(\vartheta)] = R[\varphi_0(-\vartheta)]$. Плотность вероятности удовлетворяет уравнению

$$\partial P/\partial t = \nu[\exp(-t(\partial/\partial\psi_1) D_1(\psi_1)) - 1] P, \tag{22}$$

решением которого является функция

$$P(\psi_1, \psi_2, t) = \frac{\delta(\psi_2) e^{-\nu t}}{2\pi D_1(\psi_1)} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(\zeta(\psi_1) - \zeta(u_0))} \exp\left[-\frac{i\nu}{k}(e^{-ikt} - 1)\right]. \tag{23}$$

Из выражения (23) для функции распределения по скоростям следует, что произвольная функция параметра u на временах $t \ll \nu^{-1}$ ведет себя следующим образом:

$$\langle F(u) \rangle = F(u_0)(1 - \nu t) - \nu \int_{\zeta_0}^{\zeta_0 + t} d\zeta \tilde{F}(\zeta). \tag{24}$$

Здесь $\tilde{F}(\zeta)$ получается из $F(u)$ после замены $\zeta = \int d\psi_1 D_1^{-1}(\psi_1)$. Например, для кинков уравнений SG и φ^4 средняя скорость меняется по закону

$$(\mathrm{SG})\quad \langle u \rangle = u_0 - \nu (3/4) \sqrt{1 - u_0^2}\, t^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\vartheta R[\varphi_0] \operatorname{sech} \vartheta,$$

$$(\varphi^4)\quad \langle u \rangle = u_0 - \nu\varepsilon \frac{3}{4\sqrt{2}} \frac{\lambda^{1/2}}{\omega_0^2} \sqrt{1 - u_0^2}\, t^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\vartheta R[\varphi_0] \operatorname{sech}^2 \vartheta.$$

Видно, что наличие флуктуаций при $R[\varphi] > 0$ препятствует проникновению нелинейной волны в среду. Если начальная скорость кинка мала $u_0 \lesssim \nu\varepsilon$, то за время $t \sim u_0^{1/2} [\nu\varepsilon \sqrt{1 - u_0^2}]^{-1/2}$ после включения поля $f(t)$, пройдя расстояние $l \sim u_0^{3/2} [\nu\varepsilon \sqrt{1 - u_0^2}]^{-1/2}$, он останавливается и начинает двигаться в противоположном направлении. При этом моменты скорости высшего порядка в нуль, вообще говоря, не обращаются.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малахов А. И., Пелиновский Е. Н., Саичев А. И., Фридман В. Е. Препринт НИРФИ № 85. — Горький, 1976.
2. Минеев М. Б., Фейгельман М. В., Шмидт В. В. — ЖЭТФ, 1981, **81**, с. 290.
3. Басс Ф. Г., Синицын Ю. А. — Изв. вузов — Радиофизика, 1982, **25**, № 11, с. 1302.
4. Басс Ф. Г., Конотоп В. В., Синицын Ю. А. — Изв. вузов — Радиофизика, 1984, **27**, № 6, с. 718.
5. Пелиновский Е. Н. В кн.: Нелинейные волны. — М.: Наука, 1979, с. 331.
6. Абдуллаев Ф. Х. — ФТТ, 1981, **23**, № 11, с. 3418.
7. Абдуллаев Ф. Х. — ФММ, 1983, **56**, вып. 6, с. 1216.
8. Абдуллаев Ф. Х. — Краткие сообщения по физике, 1982, № 10, с. 3.
9. Басс Ф. Г., Конотоп В. В., Синицын Ю. А. — ЖЭТФ, 1985, **88**, вып. 2, с. 541.
10. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. Ч. 2. — М.: Наука, 1978.
11. Гурбатов А. Н., Пелиновский Е. Н., Саичев А. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1978, **21**, № 10, с. 1485.
12. Кляцкин В. И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. — М.: Наука, 1980.
13. Мак-Лафлин Д., Скотт Э. В кн.: Солитоны в действии. — М.: Наука, 1981.

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
4 февраля 1985 г.

MOTION OF A SOLITON IN A FLUCTUATING MEDIUM

F. G. Bass, V. V. Konotop, Yu. A. Sinitsyn

Using the sine-Gordon and φ^4 equations as examples of dynamics of a nonlinear solitary wave in a fluctuating medium is considered. Distribution functions for the parameters of the nonlinear waves are obtained in cases of gaussian statistics of the fluctuations with arbitrary correlation lengths as well as for Poisson's process. The role of parity of the perturbation on the soliton dynamics in adiabatic approximation is studied.

ВНИМАНИЮ АВТОРОВ!

Всесоюзное Агентство по авторским правам (ВААП) сообщает, что журнал «Радиофизика», изданный в СССР в 1980—82 гг., перепечатан за рубежом. Гонорар, поступивший за право его перепечатки, выплачивается по желанию авторов в рублях или чеках Внешпосылторга.

Для получения гонорара авторам необходимо оформить справку-заявление и направить ее на расчет по адресу:

103670, Москва, ул. Б. Бронная, 6-а, Валютное управление ВААП.

Агентство также извещает авторов о следующем:

— 1 сентября 1986 г. прекращается прием справок-заявлений на выплату гонорара за статьи, опубликованные в журнале в 1980 г.;

— 1 декабря 1986 г. прекращается прием справок-заявлений на выплату гонорара за статьи, опубликованные в 1981 г.;

— 1 января 1987 г. прекращается прием справок-заявлений на выплату гонорара за перепечатку за рубежом статей, опубликованных в журнале в 1982 г.