

УДК 537.533

БЕЗВИХРЕВЫЕ СОСТОЯНИЯ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОННЫХ ПОТОКОВ ТРУБЧАТОЙ И КОЛЬЦЕВОЙ КОНФИГУРАЦИЙ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

М. А. Горшкова, В. Е. Нечаев

Дан анализ решения внутренней задачи о бидромических состояниях кольцевых (и трубчатых) потоков электронов с нулевыми скоростями на внутренней поверхности. Показано, как учет релятивизма и диамагнетизма изменяет характеристики потока по сравнению с известными из нерелятивистской теории.

У статических электронных потоков, сформированных с непере-секаемой магнитным полем поверхности эмиттера, вихрь обобщенного импульса равен нулю [1]. В однородных участках осесимметричных систем, где θ, z — циклические координаты, безвихревые потоки в продольном магнитном поле могут существовать либо в виде ламинарных потоков Бриллюэна (их теория относительно несложна, см. [2]), либо в виде так называемых бидромических состояний с двумя встречными радиальными подпотоками. Обе эти разновидности безвихревых течений являются идеализированными моделями кольцевых потоков в магнетронных диодах (вокруг катода, продольная скорость отсутствует) [3, 4] и трубчатых потоков в однородном канале транспортировки [2, 5]. В последнем случае все электроны безвихревого потока обязательно обладают общей продольной скоростью $v_z = c\beta_z = \text{const}$, если только во внутренней их полости нет сторонних зарядов и токов [5]. В отсутствие поперечных скоростей на внутренней поверхности ($v_r, v_\theta = 0$) трубчатые пучки описываются теми же уравнениями, что и кольцевые вокруг катода, но в сопровождающей, пучковой, системе отсчета [5].

Самосогласованные уравнения движения и поля внутри кольцевого бидромического потока, состоящего из встречных радиальных подпотоков с плотностью тока $J = \text{const}/r$, образуют систему

$$\frac{dx}{dT} = \frac{p}{\gamma}; \quad (1)$$

$$\frac{dp}{dT} = E - \frac{A}{\gamma} \left(H - \frac{A}{x} \right); \quad (2)$$

$$\frac{d}{dT} (xE) = a x_k; \quad (3)$$

$$\frac{dH}{dT} = \frac{aAx_k}{\gamma x}; \quad (4)$$

$$\frac{d\gamma}{dT} = \frac{Ep}{\gamma}; \quad (5)$$

$$\frac{dA}{dT} = \frac{p}{\gamma} \left(H - \frac{A}{x} \right). \quad (6)$$

Здесь и далее $x = eH_0 r / mc^2$ — безразмерная радиальная координата, $T = (eH_0 / mc)t$ — безразмерное время, $p = p_r / mc$ — радиальный им-

пульс, $A = p_0/mc$ — азимутальный импульс, а также азимутальная составляющая вектор-потенциала (в силу сохранения углового момента), γ — релятивистский фактор, или нормированный на 511 кВ и сдвинутый на единицу потенциал, $\gamma = 1 + (e\Phi/mc^2)$ (в силу сохранения энергии), $E = d\gamma/dx$, $H = dA/dx$ — безразмерные величины электрического и магнитного полей, параметры $a = 8\pi mc J_K / eH_0^2$, $x_K = eH_0 r_K / mc^2$ характеризуют плотность тока у катода J_K ($a = 2J_K / cr_0 = \beta_r(\rho/\rho_0)$), ρ_0 — бриллюэновская плотность в поле H_0) и кривизну катодной поверхности, H_0 — поле у катода при $r = r_K$. Условия на внутренней поверхности потока имеют вид

$$T = 0, x = x_K, p = 0, A = 0, \gamma = 1, E = 0, H = 1. \quad (7)$$

Поля в потоке равны $H_z = -H_0(dA/dx)$, $E_r = -H_0(d\gamma/dx)$. В пределе $x_K \rightarrow \infty$ задача сводится к плоской и сильно упрощается, она рассматривалась в [4, 6, 7]. В частности, в [7] найдено, что электроны могут вернуться к исходной (катодной) поверхности только при $a < 0,25$. Условие это представлено там в более сложной форме и без обсуждения. Оно означает, что в режимах магнитной изоляции существование встречных потоков возможно лишь при выполнении неравенства

$$(32\pi mc/e)J < H_0^2. \quad (8)$$

В противном случае магнитное «давление» оказывается недостаточным, плотности заряда становятся порядка бриллюэновских и выше, так что магнитное удержание потока становится невозможным. С приближением a к критическому значению 0,25 максимальный импульс p_{\max} стремится к единице. В этом случае, согласно интегралу системы уравнений $H^2 - E^2 = 1 - 2ap$, структура полей в потоке существенно отличается от бриллюэновской, в нерелятивистских потоках с малыми a и p эти структуры близки к бриллюэновским (при $p = 0$).

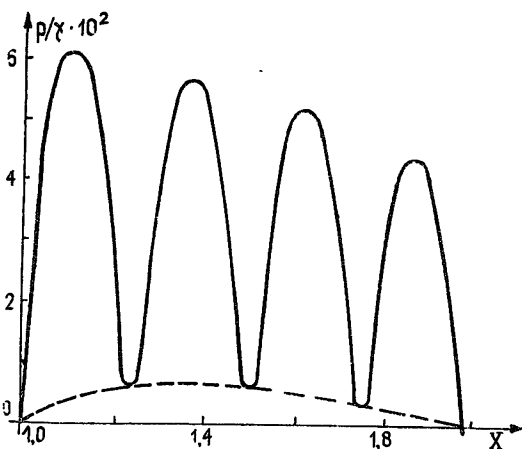


Рис. 1. Зависимость радиальной скорости от смещения в режиме $x_K = 1$, $a = 0,03$. Крайние значения $\Phi_{кр} = 145$ кВ, $H_{кр} = 1,34$, $S_{кр} = 1,947$.

Значительно более сложная цилиндрическая задача детально рассмотрена в [3] в нерелятивистском приближении. В этом приближении достаточно использовать первые три уравнения из системы (1)–(6), пренебрегая диамагнетизмом (4), (6) и изменением массы (5). Тогда нетрудно прийти к однопараметрической системе уравнений и начальных условий работы [3] с введенным там параметром $\hat{a} = 2a/x_K$. Здесь ставится задача выяснить, как диамагнетизм и изменение релятивистского фактора влияют на структуру потока, сравнив решения (1)–(6) с найденными ранее [3] без учета этих особенностей.

Система (1)–(6) решалась численно для широкого спектра параметров a и x_K . В процессе вычислений определялись все поля, им-

пульсы, координата и γ -фактор как функции T . Результаты решений удобней всего исследовать исходя из зависимостей радиальной скорости $\beta_r = p/\gamma$ от смещения по x , типичный пример такой зависимости показан на рис. 1. Количество максимумов скорости определяет порядок бидромического состояния N , в минимумах скорости расположены виртуальные квазикатоды, при $p=0$ и $d\beta_r/dx < 0$ находится критический радиус: там электроны поворачивают обратно и знак скорости изменяется при той же зависимости ее величины от смещения [3]. Виртуальные катоды, на которых и скорость и ускорение обращаются в нуль, могут иметь место только при дискретных связях параметров a , x_k ; в этих особых случаях к верхней границе потока можно подключить непрерывным образом новый поток с так называемым «подвешенным» состоянием [3], кроме того в такие моменты происходит смена порядка N на единицу.

Таблица 1

a	x_k				
	100	10	1	0,3	0,1 -
1	$N = 1$	$N=1$ $\Phi=940$ MB $S=15,3$ $H_{кр}=40$	$N=1$ $\Phi=8,8$ MB $S=13,2$	$N=1$ $\Phi=1,26$ MB $S=15,4$	$N=1$ $\Phi=328$ kB $S=22,9$
0,3	$N = 1$ $\Phi=1927$ MB $S = 2$ $H_{кр}=112,6$	$N=1$ $\Phi=21$ MB $S=2,22$	$N=1$ $\Phi=846$ kB $S=4,0$	$N=1$ $\Phi=253$ kB $S=6,85$	$N=1$ $\Phi=85,9$ kB $S=11,7$
0,1	$N = 6$ $\Phi=13,1$ MB $S=1,04$	$N=3$ $\Phi=1,5$ MB $S=1,23$	$N=1$ $\Phi=122$ kB $S=1,91$	$N=1$ $\Phi=61,9$ kB $S=3,6$	$N=1$ $\Phi=25$ kB $S=6,45$
0,03	$N = 18$ $\Phi=7,4$ MB $S=1,035$	$N=11$ $\Phi=1,66$ MB $S=1,233$	$N=4$ $\Phi=145$ kB $S=1,974$	$N=2$ $\Phi=28,5$ kB $S=2,6$	$N=1$ $\Phi=5,8$ kB $S=3,3$
0,01	$N=52$ $\Phi=6,4$ MB $S=1,033$	$N=31$ $\Phi=1,43$ MB $S=1,22$	$N=12$ $\Phi=144$ kB $S=1,968$	$N=5$ $\Phi=21,6$ kB $S=2,35$	$N=2$ $\Phi=3,2$ kB $S=2,6$
0,003	$N = 151$ $\Phi=4,05$ MB $S = 1,029$	$N=104$ $\Phi=1,45$ MB $S=1,22$	$N=40$ $\Phi=139$ kB $S=1,946$	$N=15$ $\Phi=18,5$ kB $S = 2,23$	$N=6$ $\Phi=2,7$ kB $S=2,45$
0,001		$N=304$ $\Phi=1,36$ MB $S=1,215$	$N=116$ $\Phi=138$ kB $S=1,94$	$N=45$ $\Phi=18,4$ kB $S=2,23$	$N=16$ $\Phi=2,26$ kB $S=2,31$

$$S=S_{кр}, \quad \Phi=\Phi_{кр}$$

Результаты обзора решений при различных a , x_k сведены в табл. 1. В качественном соответствии с нерелятивистской теорией [3] порядок состояния N возрастает с уменьшением токового параметра. При этом потенциал $\Phi_{кр}$ на краю потока (будем индексом «кр» помечать все величины на краю) сначала быстро снижается, а затем как бы стабилизируется. Но уровень этой стабилизации изменяется с радиусом катода x_k : с ростом x_k поток становится более плоским, потенциал $\Phi_{кр}$ возрастает, так что уже при $x_k \gg 1$ слаборелятивистских бидромических режимов вообще нет. Для внешней красной задачи это означает,

что единственным возможным состоянием в таких ситуациях является поток Бриллюэна. Заметим еще, что при плавном изменении a (или x_k) в моменты смены порядка N крайние значения радиуса, потенциала и поля меняются скачком и это приводит к неоднозначности состояний в краевой задаче с заданным потенциалом на радиусе $r_a > r_{кр}$ (у анода).

Таблица 2

x_k	0,1	0,3	1	10
a	0,001	0,003	0,01	0,1
N	16	15	12	3
$S_{кр}$, кВ	2,3	2,23	1,97	1,23
$\Phi_{кр}$, кВ	2,25	18,4	144	1500

Согласно нерелятивистской теории [3], при фиксированном значении параметра $\hat{a} = 2a/x_k$ (в наших обозначениях) отношение радиусов края потока и катода $S_{кр} = r_{кр}/r_k$ и порядок бидромического состояния N неизменны, в то же время потенциал на краю $\Phi_{кр}$ пропорционален x_k^2 . Составим на основании табл. 1 соответствующие зависимости от x_k при фиксированном $\hat{a} = 0,02$ (при больших \hat{a} различия могут только возрасти). Из табл. 2 видно, что отличия от нерелятивистской теории становятся заметными уже при весьма умеренных энергиях порядка 10^4 эВ. Порядок состояния, радиус и потенциал края потока оказываются несколько меньше предсказываемых нерелятивистской теорией уже при $x_k = 0,3$. Кроме того, согласно [3] смена состояния $N=1$ состоянием $N=2$ должна происходить всегда при одном значении $\hat{a} = 0,239$, и при этом должно устанавливаться $S_{кр} = 2,867$. Однако с учетом релятивистских эффектов ситуация изменяется (см. табл. 3). С ростом радиуса катода x_k указанная смена состояний происходит при все меньших значениях \hat{a} и устанавливаются все меньшие $S_{кр}$.

Таблица 3

x_k	0,1	0,3	1	10
\hat{a}	0,239	0,233	0,190	0,044
$S_{кр}$	2,85	2,81	2,47	1,39

Из сказанного следует, что нерелятивистская теория пригодна только при $x_k = eH_0 r_k / mc^2 < 0,3^*$ и умеренных a . Уже при невысоких, казалось бы, энергиях порядка 10^4 эВ отличие характеристик потока от рассчитанных в нерелятивистском приближении становится заметным, поскольку радиальное ускорение в окрестности виртуальных квазикатодов (около баланса сил) чувствительно к изменениям магнитного поля и релятивистского фактора. Можно, к примеру, оценить (методом возмущения), когда действие диамагнитного эффекта на азимутальный импульс A и радиальную силу становится соизмеримым с действием начальных скоростей: известно давно [10] существенное влияние азимутальной начальной скорости у катода (порядка 0,1 эВ) на состояние нерелятивистского потока. Воздействие диамагнетизма оказывается преобладающим начиная с потенциала в потоке $\Phi_{кр} = 8$ кВ ($N=1$) и 5 кВ ($N \rightarrow \infty$, квазибриллюэновские потоки). Поэтому в релятивистских системах нельзя ожидать существенного влияния начальных скоростей на состояния потока.

* Традиционные нерелятивистские магнетроны [8] обычно имеют $x_k = 0,2 \div 0,6$. Релятивистские магнетроны [9] имеют $x_k = 2 \div 5$, магнитоизолированные системы формирования сильноточных РЭП [9] допускают x_k в широкой области (от 2 до 30).

При обычных в релятивистских системах $x_k > 1$ область существования бидромических режимов смещается в сторону меньших значений $S_{кр}$ по сравнению с установленной в [3] нижней границей, при этом с уменьшением токового параметра a решение стабилизируется. Некоторые скачки от среднего уровня стабилизации связаны с уже упоминавшейся дискретностью возникновения новых циклов движения при плавном изменении параметров. Потенциал края потока тогда хорошо оценивается по формулам для бриллиэновского режима [2], которые в наших обозначениях принимают вид:

$$x_k \ln \frac{x_{кр}}{x_k} = F(\operatorname{arctg} \sqrt{\gamma_{кр}^2 - 1}, \sqrt{1 - x_k^{-2}}), \quad (9)$$

$$\gamma_{кр} \approx \operatorname{ch} \left(x_k \ln \frac{x_{кр}}{x_k} \right), \quad \text{если } x_k^2 \gg \gamma_{кр}^2 - 1.$$

Здесь F — эллиптический интеграл. Ошибка такого описания не превышает 5% (из сравнения с табл. 1), и можно поэтому считать, что основная часть потока движется по траекториям, близким к кольцевым, — медленно раскручивающимся и скручивающимся спиральям с небольшими наложенными осцилляциями. Такие квазibriллиэновские потоки в области умеренного релятивизма имеют толщины меньше катодного радиуса, т. е. являются почти плоскими. В области ультрарелятивизма потоки могут иметь и «классическую» однопетлевую структуру. При этом токовый параметр $a > 0,25$, с ростом a растут релятивизм и диамагнитный эффект, радиус края потока существенно удаляется от катода. Однако критических значений a (как в плоских системах) «наблюдать» не удалось, изоляция достаточно сильным осевым магнитным полем наступает всегда.

В целом же при решении задач о релятивистском магнетронном диоде в практически используемых областях параметров [9] уместно пользоваться бриллиэновской моделью потока как самой простой и достаточно адекватной. То же можно сказать и о транспортируемых в магнитном поле трубчатых РЭП, описываемых безвихревыми моделями [5]: в сопровождающей системе отсчета значения релятивистского фактора $\gamma_{\perp} = (1 - \beta_{\perp}^2)^{-1/2} \gamma$ обычно недалеко от единицы, кривизна чаще всего мала ($S_{кр} - 1 \ll 1$) и бидромические режимы низкого порядка невозможны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gabog D. — Proc. IRE, 1945, 33, p. 792.
2. Данилов В. Н. — Радиотехника и электроника, 1966, 11, № 11, с. 1994.
3. Белов В. Е., Родыгин Л. В. — Изв. вузов — Радиофизика, 1967, 10, № 4, с. 562; № 8, с. 1171.
4. Данилов В. Н. — Радиотехника и электроника, 1966, 11, № 12, с. 2160.
5. Нецаев В. Е. — В сб.: IV Всесоюзный симпозиум по сильноточной электронике. Ч. 1. — Томск, 1982, с. 241.
6. Воронин В. С., Лебедев А. Н. — ЖТФ, 1973, 43, № 12, с. 2591.
7. Lovelace R. V., Ott E. — Phys. Fluids, 1974, 17, № 6, p. 1263.
8. Магнетроны сантиметровой диапозона / Под ред. С. А. Зусмановского. — М.: Сов. радио. Т. 2, 1951. — 471 с.
9. Релятивистская высокочастотная электроника. / Под ред. П. В. Гапонова-Грехова. — Горький: ИПФ АН СССР, 1979. — 297 с.
10. Twiss R. Q. — J. Electron., 1955, 1, № 1, p. 1.

Институт прикладной физики
АН СССР

Поступила в редакцию
25 января 1985 г.

VORTEX-FREE STATES OF RELATIVISTIC ELECTRON BEAMS OF ANNULAR AND RING CONFIGURATION IN THE MAGNETIC FIELD

M. A. Gorshkova, V. E. Nechaev

The solution of the interior problem on bidromic states of ring (and annular) electron beams with zero velocities on the internal surface is analysed. Accounting relativity and diamagnetism is shown to vary the beam characteristics compared with the characteristics known from the nonrelativistic theory.