

УДК 533.9.082

## ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ЛОКАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ РАДИАЛЬНЫХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ

А. В. Мороз

Предлагается способ восстановления параметров крупномасштабных радиальных неоднородностей, основанный на использовании асимптотических формул для угла рефракции луча в неоднородности и эйконала на луче. Рассмотрен численный пример восстановления профиля неоднородности по результатам рефракционных измерений.

В «лучевой» диагностике неоднородной плазмы широко применяются методы, основанные на измерении величин, связанных с рефракцией лучей в неоднородности, а также с фазовыми сдвигами вдоль лучей [1]. Если в качестве модели неоднородности использовать радиально-неоднородные цилиндр или шар (только этот случай и будет рассматриваться в данной работе, причем для цилиндра ограничимся двумерной задачей), то рефракция будет определяться углом  $\alpha = \alpha(\rho)$  (см. рис. 1), а фазовый сдвиг — эйконалом  $\sigma = \sigma(\rho)$  в точке выхода луча из неоднородности согласно [2]:

$$\alpha = \rho \int_{r_n}^1 r^{-1} (\mu - \rho^2)^{-1/2} dr; \quad (1)$$

$$\sigma = -\sqrt{1 - \rho^2} + 2 \int_{r_n}^1 r^{-1} \mu (\mu - \rho^2)^{-1/2} dr. \quad (2)$$

Здесь  $\rho$  — прицельный параметр луча\*,  $r_n = r_n(\rho)$  — радиус точки поворота луча в неоднородности,  $\mu = \mu(r)$  — «приведенная» диэлектрическая проницаемость, связанная с диэлектрической проницаемостью плазмы  $\varepsilon = \varepsilon(r)$  соотношением

$$\mu(r) = \varepsilon(r)r^2, \quad (3)$$

причем считается, что  $\varepsilon(r) = 1$ ,  $r \geq 1$ , и  $d\mu/dr > 0$ ,  $0 < r < 1$ .

Общая постановка обратной задачи для уравнений (1), (2) состоит в определении профиля  $\varepsilon(r)$  по известным функциям  $\alpha(\rho)$  или  $\sigma(\rho)$ . Для уравнения, аналогичного (1), данная задача рассматривалась в работе [3], согласно которой решение (1) можно представить в виде

$$r(\mu) = \exp\left(-\frac{2}{\pi} \int_{\sqrt{\mu}}^1 \frac{\alpha(\rho) d\rho}{\sqrt{\rho^2 - \mu}}\right), \quad (4)$$

где  $r(\mu)$  — функция, обратная к (3). Если считать известной функцию  $\sigma(\rho)$ , то методом [3] нетрудно получить формулу обращения для уравнения (2):

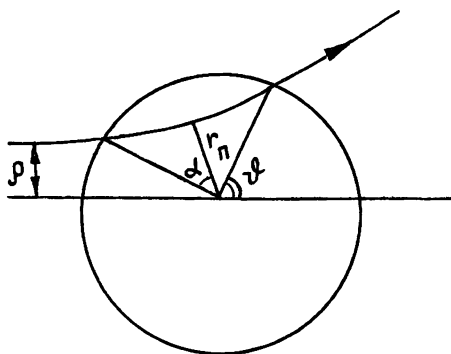


Рис. 1.

\* Все линейные размеры нормированы на радиусе неоднородности.

$$r(\mu) = \mu^{1/4} \exp \left[ -\frac{1}{\pi} \int_{\sqrt{\mu}}^1 \sigma(\rho) \rho^{-1} \left( \frac{1}{\sqrt{\rho^2 - \mu}} + \frac{1}{2\rho} \ln \frac{\rho - \sqrt{\rho^2 - \mu}}{\rho + \sqrt{\rho^2 - \mu}} \right) d\rho \right]. \quad (5)$$

Хотя формулы (4), (5) полностью решают задачу, их применение требует вычисления интегралов от измеряемых функций, что является довольно громоздкой процедурой. Кроме того, хорошо известно [4], что решение интегральных уравнений первого рода может оказаться неустойчивым относительно возмущений их левой части. Для уравнения (1), например, при  $\alpha(\rho) = \alpha_0(\rho) + \delta$ , где  $\delta = \text{const}$  — отклонение  $\alpha$  от точного значения  $\alpha_0$ ,  $r(\mu) = r_0(\mu) (\sqrt{\mu}/1 + \sqrt{1-\mu})^{2\delta/\pi} \rightarrow \infty$  при  $\mu \rightarrow 0$ ,  $\delta < 0$ .

В данной работе постановка задачи несколько отличается от рассмотренной выше общей постановки и состоит в том, что по известным значениям  $\alpha(\rho_i)$  или  $\sigma(\rho_i)$ ,  $1 \leq i \leq N$ , восстанавливаются производные  $d^i \ln r(1-0)/d\mu^i$  до порядка  $N$  включительно. Эти производные могут использоваться для нахождения разрывов производных  $\varepsilon$  на границе и для фактического восстановления профиля  $r(\mu)$ . Излагаемая ниже методика, которую можно рассматривать как вариант метода квазиобращения [4] применительно к уравнениям (1), (2), основана на аппроксимации интегральных операторов  $\alpha$  и  $\sigma$  приближенными выражениями, получающимися из асимптотических разложений интегралов в правой части (1), (2) при  $\rho \rightarrow 1-0$ . Искомые производные при этом явным образом и линейно выражаются через измеренные значения угла рефракции или эйконала, причем линейность по  $\alpha(\rho_i)$  и  $\sigma(\rho_i)$  делает методику сравнительно простой и регулярной.

Обратившись к уравнению (1), преобразуем оператор задачи, вычисляя асимптотику правой части при  $\rho \rightarrow 1-0$ . Для случаев  $\varepsilon(0) < 0$  и  $\varepsilon(0) > 0$ , соответствующих закритической и докритической плазме, вычисления проведем несколько отличающимися друг от друга способами. Если  $\varepsilon(0) < 0$ , то, переходя в (1) к интегрированию по  $\mu$  и вводя функцию

$$v(\mu) = -\ln r(\mu), \quad (6)$$

найдем

$$\alpha(\rho) = -\rho \int_{\rho^2}^1 v'(\mu) (\mu - \rho^2)^{-1/2} d\mu, \quad (7)$$

где штрих означает дифференцирование. Раскладывая  $v'(\mu)$  в ряд Тейлора в левой окрестности точки  $\mu=1$ ,

$$v'(\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{v_{k+1}}{k!} (\mu - 1)^k, \quad (8)$$

где  $v_n = d^n v(1-0)/d\mu^n$ , подставляя (8) в (7) и интегрируя почленно, получим представление  $\alpha(\rho)$  в виде ряда по степеням  $q=1-\rho^2$ :

$$\alpha(\rho) = \rho q^{1/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{k+1}}{(2k+1)!!} A_k q^k, \quad (9)$$

где

$$A_k = (-1)^{k+1} v_{k+1}. \quad (10)$$

Если  $\varepsilon(0) > 0$ , то, переходя в (1) к интегрированию по  $\xi = \mu^{1/2}$ , найдем

$$\alpha(\rho) = \rho \int_{\rho}^1 [\ln r(\xi)]' (\xi^2 - \rho^2)^{-1/2} d\xi.$$

При малых  $\rho$  интегрирование распространяется на область малых  $\xi$ , причем при  $\xi \rightarrow 0$   $[\ln r(\xi)]' = \xi^{-1} + O(1)$ . Выделяя слагаемое, соот-

ветствующее первому члену данной асимптотики, и интегрируя остаток по частям, найдем

$$\alpha(\rho) = \arccos \rho + \rho q^{1/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{k+1}}{(2k+1)!!} (A_k - k!) q^k \quad (11)$$

с теми же коэффициентами  $A_k$ , что и в (9). Заметим, что результат (11) можно формально получить из (9), если к правой части (9) добавить  $\arccos \rho$  и вычесть представление этой функции в виде ряда  $\rho q^{1/2} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k+1} k! q^k / (2k+1)!!$ , который сходится при  $0 \leq q < 1$ .

Обсудим вопрос о сходимости рядов в (9) и (11). Если  $R$  — радиус сходимости ряда (8), то, используя известные теоремы о степенных рядах, нетрудно показать, что ряды в (9), (11) сходятся абсолютно при  $q < R$ . При  $q > R$  эти ряды абсолютно не сходятся, т. е. радиус их сходимости также равен  $R$ . В некоторых простых случаях  $R$  можно вычислить. Например, для профиля  $\varepsilon(r) = r^{2m}$ ,  $m \geq 0$ ,  $\mu = \mu(r) = r^{2(m+1)}$ ,  $\nu(\mu) = -2^{-1}(m+1)^{-1} \ln \mu$  и  $R = 1$ . В общем же случае произвольной зависимости  $\mu(r)$  этого сделать не удастся, поэтому представления (9), (11) следует рассматривать как асимптотические.

Для уравнения (2) формулы, аналогичные (9), (11), проще всего найти, исходя из соотношения, в справедливости которого легко убедиться непосредственной проверкой:

$$\frac{d\sigma}{d\rho} = -\rho \frac{d\vartheta}{d\rho}; \quad (12)$$

где  $\vartheta = \vartheta(\rho) = \pi - \arcsin \rho - 2\alpha(\rho)$  — угол точки выхода из неоднородности луча с параметром  $\rho$  (см. рис. 1). Интегрируя (12) с использованием асимптотик (9), (11), приходим к результатам:

$$\sigma(\rho) = q^{1/2} \left[ -1 + \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k+2} A_k \left( \frac{\rho^2}{(2k+1)!!} + \frac{q}{(2k+3)!!} \right) q^k \right] \quad (13)$$

при  $\varepsilon(0) < 0$  и

$$\sigma(\rho) = q^{1/2} \left[ 1 + \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k+2} (A_k - k!) \left( \frac{\rho^2}{(2k+1)!!} + \frac{q}{(2k+3)!!} \right) q^k \right] \quad (14)$$

при  $\varepsilon(0) > 0$ .

Рассмотрим решение обратной задачи с помощью полученных асимптотических разложений, ограничиваясь для определенности формулой (9). Пусть из рефракционных измерений известны величины  $\alpha(\rho_i)$ , а следовательно и величины  $a_i = \alpha(\rho_i) / 2\rho_i q_i^{1/2}$ , где  $\rho_i \neq 0$ ,  $q_i$ ,  $1 \leq i \leq N$ . Тогда, используя для аппроксимации  $\alpha(\rho)$   $N$ -ю частичную сумму ряда (9)

$$\tilde{\alpha}(\rho) = \rho q^{1/2} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{2^{k+1}}{(2k+1)!!} A_k q^k, \quad (15)$$

для коэффициентов  $A_k$  получим линейную систему уравнений

$$\underline{a} = \hat{B} \hat{Q} \underline{A}, \quad (16)$$

где  $\underline{a}$  и  $\underline{A}$  — вектор-столбцы с компонентами  $a_i$  и  $A_{i-1}$ ,  $\hat{B} = \hat{B}(q_1, \dots, q_N)$  — матрица Вандермонда с компонентами  $B_{ik} = q_i^{k-1}$ ;

$\hat{Q}$  — диагональная матрица с компонентами  $Q_{ik} = \delta_{ik} 2^{k-1} / (2k-1)!!$ .  
Обращение системы (16) дает

$$\underline{A} = \hat{Q}^{-1} \hat{B}^{-1} \underline{a}, \quad (17)$$

где  $Q_{ik}^{-1} = \delta_{ik} (2i-1)!! / 2^{i-1}$ ,  $\hat{B}^{-1}$  — обратная матрица Вандермонда. Компоненты матрицы  $\hat{B}^{-1}$  нетрудно найти в явном виде, если воспользоваться известным выражением для миноров определителя Вандермонда [5]. Окончательный результат можно представить следующим образом:

$$B_{ik}^{-1} = (-1)^{i+1} C_{N-i}^{(N)*} / \prod_{1 < j < N}^* (q_j - q_k), \quad (18)$$

где

$$C_{N-i}^{(N)*} = C_{N-i}^{(N)*}(q_1, \dots, q_N) = \sum_{1 < j_1 < \dots < j_{N-i} < N}^* q_{j_1} \times \dots \times q_{j_{N-i}},$$

$$1 \leq i \leq N-1, \quad C_0^{(N)*} = 1,$$

а звездочка у знаков суммы и произведения означает, что среди индексов отсутствует индекс с номером  $k$ . Величины  $C_m^{(n)*}$  представляют собой коэффициенты разложения произведения  $\prod_{1 < i < n}^* (x+x_i) = (x+x_1) \times \dots \times (x+x_{k-1}) (x+x_{k+1}) \times \dots \times (x+x_n)$  по степеням  $x$ :  $\prod_{1 < i < n}^* (x+x_i) = \sum_{m=0}^{n-1} C_m^{(n)*} x^{n-m-1}$ . Они удовлетворяют рекуррентному соотношению  $C_m^{(n)*} = C_m^{(n-1)*} + x_n C_{m-1}^{(n-1)*}$  и при  $x_i = i$  связаны с числами Стирлинга первого рода  $S_m^{(n+1)}$  [6] формулой  $C_m^{(n)*} + k C_{m-1}^{(n)*} = (-1)^m S_m^{(n+1)}$ .

Если принять, для простоты, что  $q_i = i\Delta$ , где  $\Delta$  — шаг изменения параметра  $q$ , то с учетом соотношений  $C_{N-i}^{(N)*} = \Delta^{N-i} D_{N-i}^{(N)*}$ , где

$$D_{N-i}^{(N)*} = \sum_{1 < j_1 < \dots < j_{N-i} < N}^* j_1 \times \dots \times j_{N-i} \quad (19)$$

и  $\prod_{1 < j < N}^* (q_j - q_k) = \Delta^{N-1} (-1)^{k-1} (k-1)! (N-k)!$ , из (17), (18) получим следующее окончательное выражение для коэффициентов  $A_k$ :

$$A_{i-1} = (-1)^i \frac{(2i-1)!!}{(2\Delta)^{i-1}} \sum_{k=1}^N (-1)^k \frac{D_{N-i}^{(N)*}}{(k-1)! (N-k)!} a_k, \quad 1 \leq i \leq N. \quad (20)$$

Из (20) видно, что при фиксированном  $\Delta$  требования к точности измерения  $a_k$  растут с ростом номера  $i$  коэффициента  $A_{i-1}$ , подлежащего определению. Так, если  $\delta$  — абсолютная погрешность измерения  $a_k$ , то для нахождения  $A_{i-1}$  должно быть, по меньшей мере,  $\delta < \Delta_i$ . При фиксированной же точности измерения  $a_k$  это накладывает ограничение на число  $N$ , при котором еще можно пользоваться данной методикой: поскольку  $\Delta < N^{-1}$  и  $\delta < \Delta^N$ , то должно быть  $N \ln N < |\ln \delta|$ . Разумеется, приведенные оценки являются довольно грубыми.

Заметим теперь, что вывод формулы (20) фактически основывался на предположении, что выражение (15) с некоторым заданным значением  $N$  обеспечивает хорошее приближение к точной формуле (1). Это предположение, а также применимость методики в целом легко проверить исходя из условия ее самосогласованности: значения  $\tilde{\alpha}(\rho_i)$ , вычисленные по формуле (15) с привлечением коэффициентов  $A_k$ ,

вычисленных по формуле (20), должны быть близки к измеренным значениям  $\alpha(\rho_i)$ .

Коэффициенты  $A_k$  связаны с производными  $v_{k+1}$  формулой (10). Установим связь этих коэффициентов с разрывами производных  $\varepsilon$  на границе неоднородности. Для этого заметим, что если  $\varepsilon_n = d^n \varepsilon(1-0)/dr^n$  и  $\mu_n = d^n \mu(1-0)/dr^n$ , то имеет место соотношение

$$\varepsilon_n = (-1)^n n! \left[ n+1 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k!} (n-k+1) \mu_k \right].$$

Связь же коэффициентов  $\mu_k$  с  $A_{k-1}$  оказывается линейной и устанавливается с помощью процедуры дифференцирования неявной функции. Для первых четырех коэффициентов находим

$$\begin{aligned} A_0 &= \mu_1^{-1}, \quad A_1 = \mu_1^{-3} (\mu_2 + \mu_1), \quad A_2 = \mu_1^{-4} (3\mu_2 \mu_1^{-1} (\mu_2 + \mu_1) + 2\mu_1 - \mu_3), \\ A_3 &= \mu_1^{-5} (\mu_4 - 10\mu_2 \mu_3 \mu_1^{-1} + 15\mu_2^2 \mu_1^{-2} (\mu_2 + \mu_1) - 4\mu_3 + 12\mu_2 + 6\mu_1). \end{aligned} \quad (21)$$

Что же касается профиля  $r(\mu)$ , то из (6), (8), (10) следует, что

$$r(\mu) = \exp \left[ - (1 - \mu) \sum_{k=0}^{N-1} \frac{A_k}{(k+1)!} (1 - \mu)^k \right]. \quad (22)$$

Рассмотрим в заключение численный пример восстановления профиля  $r(\mu)$  по формулам (20), (22). Пусть

$$\varepsilon(r) = 3r^2 - 2, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad (23)$$

так что  $\mu(r) = r^2(3r^2 - 2)$  и точное выражение для  $r(\mu)$  имеет вид

$$r(\mu) = 3^{-1/2} (1 + \sqrt{1 + 3\mu})^{1/2}, \quad 0 \leq \mu \leq 1. \quad (24)$$

Для профиля (23) интеграл (1) вычисляется точно и равен

$$\alpha(\rho) = \pi/4 - (1/2) \operatorname{arcsin} [(1 + \rho^2) (1 + 3\rho^2)^{-1/2}]. \quad (25)$$

Зададимся значением  $N=4$ , выберем  $\Delta = 5 \cdot 10^{-2}$ , а в качестве «измеренных» возьмем значения  $\alpha(\rho_i)$ , найденные по точной формуле (25) (заведомо ясно, что при таком выборе  $\alpha(\rho_i)$  коэффициенты  $A_k$  будут определены с некоторой погрешностью). Вычисление коэффициентов  $D_{4-i}^{(4)*}$  дает

$$\begin{aligned} D_3^{(4)*} &= \sum_{1 < j_1 < j_2 < j_3 < 4}^* j_1 j_2 j_3 = \begin{cases} 24, & k=1 \\ 12, & k=2 \\ 8, & k=3 \\ 6, & k=4 \end{cases}, & D_2^{(4)*} &= \sum_{1 < j_1 < j_2 < 4}^* j_1 j_2 = \begin{cases} 26, & k=1 \\ 19, & k=2 \\ 14, & k=3 \\ 11, & k=4 \end{cases}, \\ D_1^{(4)*} &= \sum_{1 < j < 4}^* j = \begin{cases} 9, & k=1 \\ 8, & k=2 \\ 7, & k=3 \\ 6, & k=4 \end{cases}, & D_0^{(4)*} &= 1. \end{aligned}$$

Подстановка этих значений в (20) приводит к соотношениям

$$\begin{aligned} A_0 &= 4a_1 - 6a_2 + 4a_3 - a_4, \quad A_1 = \frac{3}{2\Delta} \left( -\frac{13}{3} a_1 + \frac{19}{2} a_2 - 7a_3 + \frac{11}{6} a_4 \right), \\ A_2 &= \frac{15}{4\Delta^2} \left( \frac{3}{2} a_1 - 4a_2 + \frac{7}{2} a_3 - a_4 \right), \\ A_3 &= \frac{105}{8\Delta^3} \left( -\frac{1}{6} a_1 + \frac{1}{2} a_2 - \frac{1}{2} a_3 + \frac{1}{6} a_4 \right). \end{aligned} \quad (26)$$

В табл. 1 сопоставляются коэффициенты  $A_k$ , вычисленные по формуле (26), с точными коэффициентами, найденными из (21)\*.

Таблица 1

Формула	$A_0$	$A_1$	$A_2$	$A_3$
(26)	$1,25 \cdot 10^{-1}$	$7,82 \cdot 10^{-2}$	$9,98 \cdot 10^{-2}$	$2,89 \cdot 10^{-1}$
(21)	$1,25 \cdot 10^{-1}$	$7,81 \cdot 10^{-2}$	$1,04 \cdot 10^{-1}$	$2,17 \cdot 10^{-1}$

В табл 2 представлены результаты проверки методики на само-согласованность во всем интервале прицельных параметров  $0 \leq \rho \leq 1$ .

Верхняя строка таблицы содержит значения  $\tilde{\alpha}(\rho)$ , вычисленные по формуле (15) с коэффициентами (26), нижняя — результаты вычислений по формуле (25).

Таблица 2

$\rho$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$10\tilde{\alpha}(\rho)$	0	$4,46 \cdot 10^{-1}$	$8,58 \cdot 10^{-1}$	1,21	1,47	1,63	1,68	1,61	1,42	1,07	0
$10\alpha(\rho)$	0	$4,91 \cdot 10^{-1}$	$9,31 \cdot 10^{-1}$	1,28	1,53	1,67	1,70	1,62	1,42	1,07	0

Наконец, в табл. 3 даны результаты вычислений  $r(\mu)$  по формуле (22) с коэффициентами (26) и по точной формуле (24).

Таблица 3

$\mu$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$10r(\mu); (22)$	8,25	8,49	8,71	8,91	9,10	9,28	9,44	9,59	9,74	9,87	10
$10r(\mu); (24)$	8,17	8,45	8,69	8,90	9,10	9,28	9,44	9,59	9,74	9,87	10

Из табл. 3 видно, что в данном случае описанная процедура обеспечивает точность восстановления  $r(\mu)$  не ниже 1%.

Автор признателен З. И. Фейзулину за интерес к работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кругляков Э. П. В кн.: Диагностика плазмы. — М.: Атомиздат, 1973, вып. 3, с. 97.
2. Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И. Геометрическая оптика неоднородных сред. — М.: Наука, 1980.
3. Фирсов О. Б. — ЖЭТФ, 1953, 24, № 3, с. 279.
4. Преображенский Н. Г., Пикалов В. В. Неустойчивые задачи диагностики плазмы. — Новосибирск: Наука, 1982.
5. Мишина А. П., Проскуряков И. В. Высшая алгебра. — М.: Физматгиз, 1962, с. 27.
6. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. — М.: Наука, 1978, с. 744.

Поступила в редакцию  
22 января 1985 г.

#### ON THE METHOD OF RECONSTRUCTION OF THE RADIAL INHOMOGENEITY LOCAL PARAMETERS

A. V. Moroz

A method of reconstruction of the large scale radial inhomogeneity parameters based on the asymptotic formulas for refraction angle and eikonal along the ray is presented. A numerical example of the inhomogeneity profile reconstruction is considered.

\* Результаты расчетов, которые проводились на микрокалькуляторе с точностью  $10^{-6}$ , округлены до трех значащих цифр.