

УДК 550.388

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВИСТЛЕРОВ В МАГНИТНЫХ ТРУБКАХ

P. H. Кауфман

Показана возможность волноводного распространения вистлеров в аксиально-симметричных магнитных трубках, в которых плотность плазмы постоянна, а магнитное поле зависит от расстояния до оси трубы. Для трубок с ослабленным магнитным полем выявлено наличие утечки захваченной волны, связанное с трансформацией мод с различными поперечными волновыми числами. Исследованы уравнения для спектра значений продольного волнового числа в случае, когда относительное изменение магнитного поля мало. Получены выражения для максимального числа мод и предельной частоты вистлеров, захваченных в трубку.

В работах [1-3] на основе уравнений Максвелла исследовались особенности волноводного распространения вистлеров в аксиально-симметричных плазменных дактах (каналах), ориентированных вдоль постоянного внешнего магнитного поля, что представляет интерес в связи с вопросом о распространении вистлеров в магнитосферных дактах, а также в связи с проблемой самофокусировки вистлеров.

При этом было изучено явление утечки захваченной волны из дакта, обусловленной тунNELьной трансформацией одной ветви поперечного волнового числа в другую [4].

Было показано, что в дактах с повышенной плотностью волноводное распространение вистлеров, возможное только при частотах $\omega < \omega_c/2$ (ω_c — гирочастота электронов), всегда сопровождается утечкой, а следовательно, и затуханием захваченной волны (что, в частности, является причиной «высвечивания» или прекращения самофокусировки вистлеров).

В дактах с пониженной плотностью волноводное распространение вистлеров без утечки оказывается возможным во всем свистовом диапазоне: $\omega_{LN} \ll \omega < \omega_c \ll \omega_p$ (ω_p — плазменная частота электронов, ω_{LN} — нижняя гибридная частота).

В некоторых вопросах, связанных, например, с распространением вистлеров в магнитных трубках в солнечной короне, представляет интерес учесть зависимость магнитного поля от поперечной координаты r , где r — расстояние до оси дакта.

В работе [5], с использованием аппарата работ [1-3], было рассмотрено влияние малого поперечного изменения магнитного поля в слабых дактах, где вариация плотности также мала*. При этом были обнаружены следующие новые эффекты: 1) возможность волноводного распространения вистлеров в дактах с повышенной плотностью во всем свистовом диапазоне без утечки; 2) возможность волноводного распространения вистлеров в дактах с пониженной плотностью при наличии утечки для частот $\omega < \omega'$, где ω' — некоторая частота, близкая к $\omega_c(\infty)/2$; 3) возможность волноводного распространения вистлеров, когда электронная плотность постоянна и волновод создается только за счет поперечного изменения магнитного поля.

В настоящей работе изучается именно последний эффект, при этом, в отличие от [5], при получении условий волноводного распрост-

* Влияние поперечного градиента магнитного поля для плоской геометрии и специальной модели дакта численно исследовалось также в [6]. Утечка, обсуждавшаяся в [6], имеет другую природу, нежели в работах [1-5], а также в данной, а ее величина гораздо меньше.

ранения малость поперечного изменения магнитного поля не предполагается. Рассматривая этот случай, мы будем использовать термин «магнитная трубка».

В п. 1 показывается возможность волноводного распространения вистлеров в магнитных трубках как с усиленным, так и с ослабленным магнитным полем B при постоянной плотности плазмы N , и находятся условия такого распространения. В пп. 2 и 3 исследуются уравнения для спектра значений безразмерного продольного волнового числа при волноводном распространении в магнитных трубках с ослабленным и с усиленным полем, когда относительное изменение магнитного поля мало.

1. Условия волноводного распространения. Введем цилиндрические координаты r , φ и z с осью z , параллельной магнитному полю B_0 при $r=\infty$. Предположим, что $N=\text{const}$ и $B=B(r)$. Из уравнений Максвелла следует, что в этом случае $B_r=B_\varphi=0$, $B_z=B(r)$.

Предполагая, что выполняются условия применимости ВКБ приближения, введем в рассмотрение локальный волновой вектор \vec{k} с компонентами:

$$k_z = \frac{\omega}{c} p, \quad k_r = \frac{\omega}{c} q(r), \quad k_\varphi = 0. \quad (1)$$

Тогда из уравнений Максвелла следует, что

$$q^2(r) = q_{1,2}^2(r) = (2u^2)^{-1} [(1 - 2u^2)p^2 - 2\alpha \mp p\sqrt{p^2 - 4\alpha}], \quad (2)$$

где

$$u = u(r) = \frac{\omega}{\omega_c(r)} < 1, \quad \alpha = \alpha(r) = \frac{\omega_p^2}{\omega_c^2(r)} \gg 1 \quad (\omega_p = \text{const}). \quad (3)$$

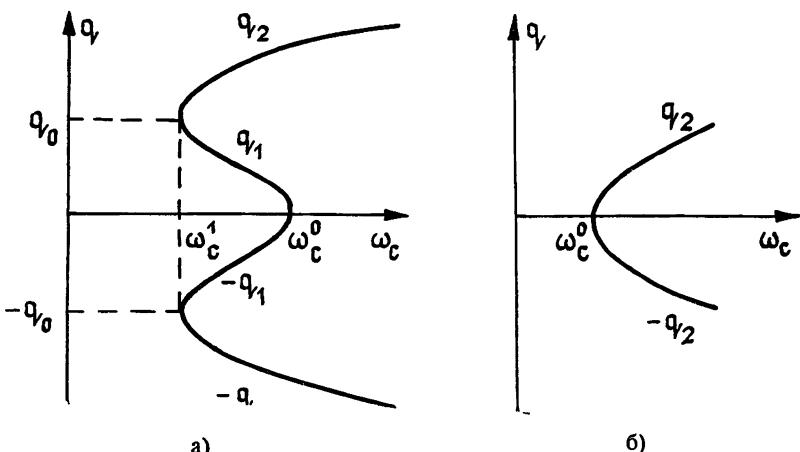


Рис. 1.

Анализ формулы (2) показывает, что q как функция ω_c , а следовательно и B ($\omega_c=eB/cm_e$), имеет вид, указанный на рис. 1, т. е. при $\omega < \omega_c^1/2$ существуют две действительные ветви q_1 и q_2 (рис. 1а), а при $\omega > \omega_c^1/2$ — одна действительная ветвь q_2 (рис. 1б). При этом ω_c^1 — значение ω_c в точке слияния ветвей, когда $q_1=q_2=q_0$, а ω_c^0 — значение ω_c в точке их обращения в нуль. Из (2) следует, что

$$\omega_c^1 = 2 \frac{\omega_p}{p}, \quad \omega_c^0 = \frac{\omega_p^2/p^2 + \omega^2}{\omega}, \quad q_0^2 = \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - p^2. \quad (4)$$

Заметим, что $\omega_c^1 = \omega_c^0$ и $q_0 = 0$ при пограничном значении $\omega = \omega_c^1/2$.

Из рис. 1 следуют рассматриваемые ниже графики q как функции от r при волноводном распространении (рис. 2).

Пусть $B(r)$ есть монотонно возрастающая функция, так что

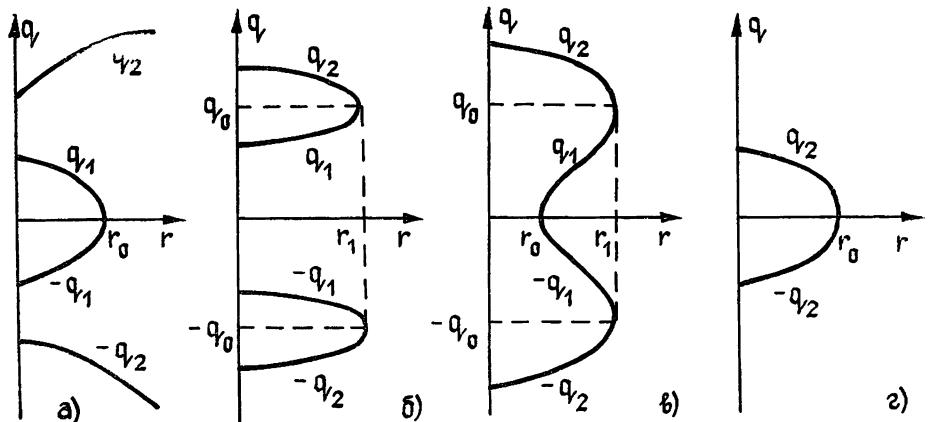


Рис. 2.

$B(0) = B_{\min}$, $B(\infty) = B_0$, т. е. имеется магнитная трубка с ослабленным полем. Потребуем, чтобы значение ω_c^0 достигалось в некоторой точке r_0 , а также потребуем действительности ветвей q_1 и q_2 . Для этого должны выполняться неравенства $\omega_c(0) < \omega_c^0 < \omega_c(\infty)$ и $p^2 > 4\alpha(0)$ (см. (2)). Тогда при $\omega < \omega_c^0/2$ график $q_{1,2}(r)$ имеет вид, указанный на рис. 2а, т. е. имеет место волноводное распространение ветви q_1 с точкой «поворота» r_0 .

Используя (4), получим условия волноводного распространения в виде

$$\max [4\alpha(0), \quad (5)$$

$$p_{||}^2(\infty)] < p^2 < p_{||}^2(0),$$

где $p_{||}^2$ — значение p^2 при чисто продольном распространении, когда $q=0$. Из формулы (2) для q^2 находим

$$p_{||}^2(r) = \frac{\omega_p^2}{\omega [\omega_c(r) - \omega]}. \quad (6)$$

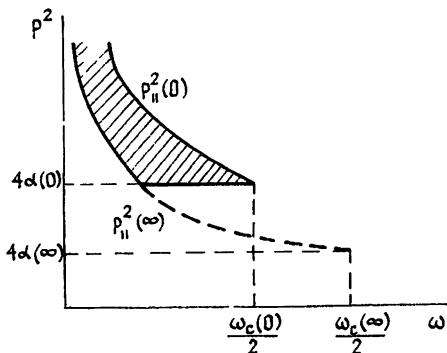


Рис. 3.

Из неравенств $\omega < \omega_c^0/2$ и $p^2 > 4\alpha(0)$ следует, что

$$\omega < \omega_{\max} = \omega_c(0)/2. \quad (7)$$

Область существования волноводного распространения для магнитных трубок с ослабленным полем, соответствующая неравенствам (5) и (7), изображена на рис. 3 (на плоскости p^2 , ω заштрихована).

Из рис. 2а видно также, что при наличии точки слияния ветвей q_1 и q_2 в комплексной плоскости r возможна туннельная трансформация $q_1 \rightarrow q_2$, которая вызовет утечку энергии из волновода, а следовательно, и затухание захваченной волны (ср. с [4]).

Пусть $B(r)$ есть монотонно убывающая функция, так что $B(0) = B_{\max}$, $B(\infty) = B_0$, т. е. имеется магнитная трубка с усиленным полем. Из рис. 1 следует, что в этом случае возможно волноводное распространение как при $\omega < \omega_c^0/2$ (рис. 2б, 2в), так и при $\omega \geq \omega_c^0/2$ (рис. 2г).

В случаях 2б и 2в, требуя, чтобы точка слияния ветвей ω_c^0 достиглась в некоторой точке r_1 , получим, используя (4), условие волноводного распространения в виде

$$4\alpha(0) < p^2 < 4\alpha(\infty). \quad (8)$$

В зависимости от того, достигается ли значение ω_c^0 или нет, мы получим графики 2в или 2б. Этим случаям соответствуют неравенства $\omega_c^0 < \omega_c(0)$ и $\omega_c^0 > \omega_c(0)$ или, как вытекает из (4) и (6), — соответственно неравенства

$$p^2 > p_{||}^2(0), \quad p^2 < p_{||}^2(0). \quad (9)$$

Случай 2г осуществляется при $\omega \geq \omega_c^1/2$, если потребовать выполнения условия $\omega_c(\infty) < \omega_c^0 < \omega_c(0)$, т. е. достижения точки «поворота» для ветви q_2 . Из этих неравенств с использованием (6) получим следующее условие волноводного распространения:

$$p_{||}^2(0) < p^2 < p_{||}^2(\infty) \quad (\omega < \omega_c(\infty)), \quad p^2 > p_{||}^2(0) \quad (\omega > \omega_c(\infty)). \quad (10)$$

Область существования волноводного распространения для магнитных трубок с усиленным полем, соответствующая неравенствам (8) — (10), изображена на рис. 4 (на плоскости p^2, ω заштрихована), кривая AB описывается уравнением $\omega = \omega_c^1/2 = \omega_p/p$.

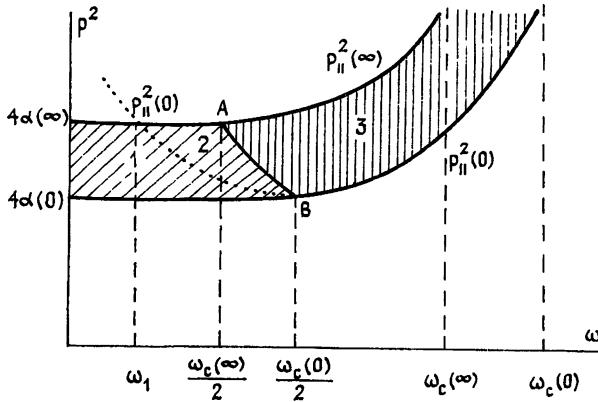


Рис. 4.

Для любой точки справа от этой кривой имеет место график 2г, слева от нее — график 2б или 2в, в зависимости от того, под или над пунктирной кривой лежит взятая точка (см. (9)). При $\omega < \omega_1$ всегда осуществляется график вида 2б.

Заметим, что в области частот $\omega_c(\infty)/2 < \omega < \omega_c(0)/2$, в зависимости от взятого p , может иметь место любой из трех графиков 2б, 2в, 2г.

Итак, при постоянной плотности плазмы в магнитных трубках с ослабленным полем при $\omega < \omega_c(0)/2$ может осуществляться волноводное распространение вистлеров, сопровождаемое затуханием, обусловленным туннельной трансформацией захваченной ветви q_1 в незахваченную q_2 . В магнитных же трубках с усиленным полем волноводное распространение вистлеров может осуществляться без затухания для $\omega < \omega_c(0)$.

Сравнивая вышеизложенное с результатами работ [1—3], видим, что «разрежение» силовых линий магнитного поля оказывается эквивалентным уплотнению плазмы, а «уплотнение» силовых линий — разрежению плазмы.

Отметим также обстоятельство, следующее из рис. 4. Если $B_0 = B(\infty)$ мало, так что $\omega_c(\infty) \approx 0$, то интервал $(\omega_c(\infty), \omega_c(0))$, в котором значение p^2 не ограничено сверху, занимает почти весь допустимый промежуток частот из области волноводного распространения. Это значит, что в магнитных трубках с усиленным полем в этом случае осуществляется захват вистлеров любой не слишком малой

частоты ($\omega > \omega_c(\infty)$) с произвольным углом между \mathbf{k} и \mathbf{B} . Физически это понятно, так как при $\omega > \omega_c$ квадрат показателя преломления для вистлеров отрицателен, т. е. распространение «вне» трубы невозможно.

Нетрудно проверить, что система ВКБ решений уравнений Максвелла, а также условия их применимости имеют в рассматриваемой нами задаче тот же вид, что и полученные ранее в работе [1]. Условия применимости ВКБ приближения нарушаются в окрестности $r=0$, а также в окрестности особых точек r_0 и r_1 , где $\omega_c(r_0) = \omega_c^0$ и $\omega_c(r_1) = \omega_c^1$, т. е. в окрестности точек обращения в нуль ветвей $q_{1,2}$ и точек их слияния (рис. 1, 2).

Построение решения, описывающего поле, для всех случаев, изображенных на рис. 2, производится аналогично тому, как это сделано в [1], и уравнения для спектра значений $p=p_n$ соответственно те же.

2. Магнитные трубы с ослабленным полем. Рассмотрим теперь магнитные трубы, в которых относительная вариация магнитного поля мала, т. е. $|b(r)| \ll 1$, где $b(r) = (B(r) - B_0)/B_0$.

Пусть магнитное поле в трубке ослаблено: $b(r) < 0$, и осуществляется волноводное распространение, т. е. имеет место случай 2а. Уравнение для спектра значений p_n имеет вид [1]

$$\int_0^{r_0} q_1(p, \omega, \omega_p, r) dr = \pi n, \quad (11)$$

где n — целое число, а q_1 задается формулой (2).

Для конкретности зададим $b(r)$ формулой

$$b(r) = -b_0 \operatorname{sech}^2(r/a), \quad b_0 > 0. \quad (12)$$

Дальнейшие выкладки аналогичны проведенным в работе [5] и поэтому подробно не приводятся *.

Положим $p=P+\Delta p$, где $P=p_{\parallel}(0)$, согласно (6).

Ограничивааясь в выражении для q_1 из (2) членами первого порядка относительно b и $\Delta p/P$, из уравнения (11) получим для профиля (12) следующую формулу для спектра значений $\Delta p_n > 0$:

$$\left| \frac{\Delta p}{P} \right|_n^{1/2} = \left| \frac{\omega_c b_0}{\omega_c - \omega} \right|^{1/2} - n \sqrt{2} \left(\frac{c}{\omega_p a} \right) \left| \frac{\omega_c - 2\omega}{\omega} \right|^{1/2}, \quad \omega_c = \omega_c(\infty), \quad (13)$$

где $(\omega_c - 2\omega)^2 \gg 2b_0\omega_c^2$.

Для тех же значений ω из условия положительности правой части в (13) получим полное число мод в магнитной трубке:

$$n_{\max} \sim \left(\frac{b_0}{2} \right)^{1/2} \left(\frac{\omega_p a}{c} \right) \left| \frac{\omega \omega_c}{(\omega_c - \omega)(\omega_c - 2\omega)} \right|^{1/2}. \quad (14)$$

В окрестности $\omega_{\max} = \omega_c(1 - b_0)/2$, когда $(\omega_c - 2\omega)^2 \ll 2b_0\omega_c^2$, полагаем $p=P+\Delta p$, где $P^2=4\alpha(0)$, и, находя приближенное выражение для q_1 из (2), также подставляем его в уравнение для спектра (11). Исследование уравнения для спектра в указанной окрестности дает следующие выражения для полного числа мод n_{\max} и для предельной частоты захвата n -й моды ω_n^* :

$$n_{\max} \sim \frac{4 \sqrt{2}}{3\pi} b_0 (\omega_p a/c) ((\omega_{\max} - \omega)/(\omega_c - 2\omega))^{3/2}; \quad (15)$$

* В работе [5] предполагается, что $b=v$, где v — относительная вариация плотности N .

$$\omega_n^* = \omega_{\max} - \frac{\omega_c b_0^{1/3}}{2} \left[\frac{3}{2} \pi \left(\frac{c}{\omega_p a} \right) n \right]^{2/3}. \quad (16)$$

При $n=1$ выражение (16) дает предельную частоту захвата волны в магнитную трубку: $\omega^* = \omega_1^* < \omega_{\max}$.

Из (15) видно, что при $\omega \rightarrow \omega_{\max}$ число мод стремится к нулю. Однако волноводное распространение прекращается несколько раньше, чем при $\omega = \omega_{\max}$, ибо при $\omega > \omega^*$ уже не существует ни одной моды.

Затухание, обусловленное туннельной трансформацией $q_1 \rightarrow q_2$, происходит как $\exp(-\mu z)$, где

$$\mu = \left[4 \int_0^{r_0} \frac{\partial q_1}{\partial p} dr \right]^{-1} T, \quad T = \exp \left[-2 \frac{\omega}{c} \operatorname{Im} \int_0^{r_1} (q_2 - q_1) dr \right]. \quad (17)$$

Здесь T — коэффициент туннельной трансформации, r_1 — точка слияния ветвей q_1 и q_2 в верхней полуплоскости, ближайшая к действительной оси [4].

Мерой затухания является величина [5]

$$M = \frac{2\pi\mu}{\Delta k_z} = \frac{2\pi c \mu}{\omega \Delta p}, \quad (18)$$

так что затухание велико при $M \gg 1$.

Произведя для профиля (12) оценки, аналогичные приведенным в [5], получим, что затухание увеличивается с уменьшением относительной ширины магнитной трубки $\omega_p a / c$, с уменьшением Δp и при стремлении ω к ω^* .

3. Магнитные трубки с усиленным полем. Пусть $b(r) > 0$, $b(r) \ll 1$ (см. начало п. 2) и осуществляется волноводное распространение типа 2б, 2в или 2г (рис. 2) соответственно указанным выше условиям (8) — (10) и областям существования 1, 2, и 3 на рис. 4. Перечисленным случаям отвечают следующие уравнения для собственных мод, определяющие спектр значений p_n [3]:

$$\frac{\omega}{c} \int_0^{r_1} (q_2 - q_1) dr = \pi(n + (1/2)); \quad (19)$$

$$\frac{\omega}{c} \left(\int_0^{r_1} q_2 dr - \int_{r_0}^{r_1} q_1 dr \right) = \pi n; \quad (20)$$

$$\frac{\omega}{c} \int_0^{r_0} q_2 dr = \pi n, \quad (21)$$

где n — номер моды.

Как и в п. 2, уравнения (19) — (21) исследуются аналогично тому, как это сделано в [3, 5], и поэтому ниже приводятся лишь результаты.

Полагая $p = P + \Delta p$, где $P^2 = 4\alpha(\infty)$, и ограничиваясь в выражении для $q_2 - q_1$, согласно (2), членами первого порядка относительно b и $\Delta p/P$, находим из (19) для профиля (12) (без знака «минус») следующую формулу для спектра значений $\Delta p_n < 0$:

$$\left| \frac{2\Delta p}{P} \right|_n^{1/2} = (2b_0)^{1/2} - \left(n + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{c}{\omega_p a} \right) \frac{(\omega_c^2 - 4\omega^2)^{1/2}}{\omega_c}, \quad \omega_c = \omega_c(\infty), \quad (22)$$

где $(\omega_c - 2\omega)^2 \gg 2b_0\omega_c^2$. Отсюда для тех же достаточно малых частот ω получим оценку для полного числа мод:

$$n_{\max} \sim (2b_0)^{1/2} (\omega_p a/c). \quad (23)$$

Исследование уравнения (21) в окрестности $\omega = \omega_c(0)/2$, когда $(\omega_c - 2\omega)^2 \ll 2b_0\omega_c^2$, приводит к следующему выражению для n_{\max} в этой окрестности*:

$$n_{\max} \sim (2/3)\pi(\omega_p a/c)(2b_0)^{1/2}K(\sqrt{2}/2), \quad (24)$$

где $K(s)$ — полный эллиптический интеграл первого рода.

Уравнение (21) в окрестности $\omega = \omega_c(0)$ исследуется аналогично уравнению (11) для малых частот, что приводит к выражению (13) для спектра значений $\Delta p_n < 0$ и к выражению (14) для полного числа мод в этой окрестности, когда $(\omega_c - 2\omega)^2 \ll 2b_0\omega_c^2$.

Из выражений (14), (15), (23) и (24) для n_{\max} видно, что в магнитных трубках как с ослабленным, так и с усиленным магнитным полем число мод уменьшается с уменьшением относительной вариации магнитного поля b_0 и с уменьшением относительной ширины трубы $\omega_p a/c$. При этом из (14) и (15) видно, что в магнитных трубках с ослабленным полем число мод стремится к нулю при приближении частоты к концам области существования волноводного распространения, т. е. концам интервала частот $(0, \omega_c(0)/2)$ (рис. 3) или, точнее, интервала $(0, \omega^*)$ (см. п. 2). В отличие от этого в магнитных трубках с усиленным полем из (23), (24) и (14) следует, что захват осуществляется во всем допустимом интервале частот $(0, \omega_c(0))$ (рис. 4) и при этом полное число мод на концах и в середине этого интервала имеет одинаковый порядок.

Отметим в заключение следующее. Если считать, что плотность N не является постоянной, а меняется пропорционально $\sqrt{B(r)}$, так что $\alpha(r) = \text{const}$ (см. (3)), то для $p^2 > 4\alpha$ ветви $q_1(r)$ и $q_2(r)$ нигде не сливаются, т. е. отсутствует трансформация $q_1 \rightarrow q_2$. Можно показать, что в этом случае волноводное распространение (без затухания) возможно для $\omega < \omega_c(0)$ только в дактах с повышенной плотностью.

Автор благодарит В. И. Карпмана за дискуссию.

ЛИТЕРАТУРА

1. Карапман В. И., Кауфман Р. Н. — J. Plasma Phys., 1982, 27, p. 225.
2. Карапман В. И., Кауфман Р. Н. — Геомагнетизм и аэрономия, 1983, 23, № 3, с. 451.
3. Карапман В. И., Кауфман Р. Н. — Геомагнетизм и аэрономия, 1983, 23, № 5, с. 791.
4. Карапман В. И., Кауфман Р. Н. — Письма в ЖЭТФ, 1981, 33, с. 266.
5. Кауфман Р. Н. — Изв. вузов — Радиофизика, 1984, 27, № 9, с. 1102.
6. Walker A. D. M. — Proc. R. Soc. Lond., 1972, A 321, p. 219.

Институт земного магнетизма, ионосферы
и распространения радиоволн
АН СССР

Поступила в редакцию
17 декабря 1984 г.

WHISTLER PROPAGATION IN MAGNETIC TUBES

R. N. Kaufman

The possibility is shown of whistler waves trapping in magnetic tubes with constant plasma density and the magnetic field changing with radial coordinate. Conditions of trapping for tubes with both enhanced and reduced magnetic field are obtained. The wave leakage and, consequently, the wave damping is shown to take place. The leakage is due to the transformation of the trapped mode into the untrapped one. For the tubes of both types, in the case of small variations of the magnetic field, the spectrum of the parallel wave number is investigated. Expressions for the mode number and thresholds of the trapped frequencies of whistlers in the tubes are obtained.

* Исследование уравнений (19) и (20) в указанной окрестности позволяет найти предельные частоты существования волноводных режимов 2б и 2в, близкие к $\omega_c(0)/2$, но не совпадающие с этим значением (см. [3]).