

УДК 533.9.01

НЕЛИНЕЙНЫЕ АЛЬФВЕНОВСКИЕ ВОЛНЫ В МАГНИТОСФЕРЕ

В. М. Чмырев, В. Г. Мордовская

Получены точные солитонные решения нелинейного волнового уравнения, описывающего распространение модифицированных альфвеновских волн в плазме с учетом ионного давления и инерции электронов. Показана возможность образования косой альфвеновской ударной волны в авроральной магнитосфере.

В последнее время появились экспериментальные данные, указывающие на существование в авроральной плазме интенсивных ($B \gtrsim 100$ нТл, $E \gtrsim 100$ мВ/м) ультранизкочастотных электромагнитных полей и связанных с ними сильных возмущений плотности плазмы ($\delta n/n \gtrsim 0,1$) и потоков низкоэнергичных (~ 1 кэВ) частиц [1-4]. В связи с этим представляет интерес исследовать характеристики нелинейных альфвеновских волн в авроральной магнитосфере и их возможные проявления в зоне полярных сияний.

Линейное дисперсионное уравнение для альфвеновских волн с учетом конечного ларморовского радиуса ионов при $\beta = v_s^2/v_a^2 \ll 1$ имеет вид [5, 6]

$$\omega^2 = k_{\parallel}^2 v_a^2 \left[1 + \frac{k_{\perp}^2 v_a^2}{\omega_i^2} \left(\frac{v_s^2}{v_a^2} - \cos^2 \theta \right) \right], \quad (1)$$

если $k_{\perp}^2 v_{Ti}^2 / \omega_i^2 < 1$, и

$$\omega = \frac{k_{\parallel} v_a k_{\perp} v_s}{\omega_i} \left(1 + \frac{T_i}{T_e} \right)^{1/2} \quad (2)$$

при $k_{\perp}^2 v_{Ti}^2 / \omega_i^2 > 1$, где k_{\parallel} , k_{\perp} — продольная и поперечная компоненты волнового вектора \mathbf{k} относительно внешнего магнитного поля \mathbf{B}_0 , θ — угол между \mathbf{k} и \mathbf{B}_0 , v_a , v_s — альфвеновская и ионно-звуковая скорости, v_{Ti} , v_{Te} — тепловая скорость ионов, электронов, T_i , T_e — ионная и электронная температуры, ω_i — гирочастота ионов, $k_{\parallel} \ll k_{\perp}$, $\omega \ll \omega_i$. При учете продольной инерции электронов и конечного $\tau = 2T_{\perp i} / T_{\parallel e}$ дисперсионное уравнение, как будет показано ниже, имеет вид

$$\omega^2 = k_{\parallel}^2 v_a^2 \left[1 - (1 + \tau) \frac{k_{\perp}^2 v_s^2}{\omega_i^2} \right] \left[1 - \frac{k_{\perp}^2 v_a^2}{\omega_i^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \theta m/M) \right]^{-1} \quad (2a)$$

Нелинейные альфвеновские волны с дисперсией (1) исследовались в [6-8], коротковолновые возмущения, отвечающие закону дисперсии гибридных волн (2), — в работах [9, 10]. В настоящей работе рассмотрены нелинейные альфвеновские волны с дисперсией (2a). Мы не пренебрегаем ионным давлением и инерцией электронов, поскольку учет этих членов, как будет показано ниже, дает ряд принципиально важных эффектов в магнитосферной плазме [10].

Рассмотрим стационарные одномерные волны, распространяющиеся со скоростью \mathbf{u} в плоскости xz под углом к внешнему магнитному полю \mathbf{B}_0 , направленному по оси z , так что все величины зависят от

одной переменной $\xi = x + \alpha z - ut$. Имея в виду особенности поляризации, следующие из линейного анализа [11, 4], в исходных уравнениях учтем возмущения компонент поля E_x, E_z, B_y , плотности плазмы n (при условии квазинейтральности) и компонент скорости электронов v_{ez}, v_{ex} и ионов v_{ix} :

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_y}{\partial \xi} &= -\frac{4\pi e}{c} n v_{ez}, & \frac{\partial}{\partial \xi} (\alpha E_x - E_z) &= \frac{u}{c} \frac{\partial B_y}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\alpha}{2} v_{ez}^2 - u v_{ez} \right) &= -\frac{e}{m} E_z - \frac{e}{mc} v_{ex} B_y - \frac{\alpha}{mn} \frac{\partial P_{\perp e}}{\partial \xi}, \\ \frac{\omega_e^2}{u} v_{ex} &= \frac{e}{m} \frac{\partial E_x}{\partial \xi} - \frac{e}{mc} \frac{\partial}{\partial \xi} v_{ez} B_y - \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{n} \frac{\partial P_{\perp e}}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(\frac{1}{2} v_{ix}^2 - u v_{ix} \right) &= \frac{e}{M} \frac{\partial E_x}{\partial \xi} + \frac{\omega_i^2}{u} v_{ix} - \frac{1}{M} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{n} \frac{\partial P_{\perp i}}{\partial \xi}, \\ n(v_{ix} - u) &= -n_0 u, & n(v_{ex} + \alpha v_{ez} - u) &= -n_0 u, \\ P_{\parallel} / n^{\gamma_1} &= \text{const}, & P_{\perp} / n^{\gamma} &= \text{const}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь α характеризует угол распространения относительно внешнего магнитного поля B_0 , $P_{\parallel e}, P_{\perp e, i}$ — электронное и ионное давление вдоль и поперек B_0 , ω_e — гирочастота электронов, m, M — масса электрона, иона, e — элементарный заряд, c — скорость света, γ_1, γ — показатели адиабаты для продольных и поперечных движений плазмы.

Путем последовательного исключения компонент электромагнитного поля и скорости система уравнений (3) приводится к следующему нелинейному волновому уравнению для плотности плазмы N :

$$N \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left[\ln N + \tau N^{\tau-1} + \frac{\sigma^2}{2N^2} \right] = v^2 (W^2 - N) (N-1), \quad (4)$$

где $N = n/n_0$, $\eta = \xi \omega_{0i} / \alpha c$, $\omega_{0i}^2 = 4\pi n_0 e^2 / M$, $\tau = [\gamma / (\gamma - 1)] T_{\perp i} / T_{\parallel e}$, $v^2 = Mu^2 / T_{\parallel e}$, $\mu^2 = tu^2 / \alpha^2 T_{\parallel e}$, $\sigma^2 = v^2 + \mu^2$, $W^2 = \alpha^2 v_a^2 / u^2$, n_0 — плотность невозмущенной плазмы, $\gamma_1 = 1$. Это выражение сводится к уравнению Хасегавы и Мимы [7], если в левой части (4) положить $\tau = 0$, $\sigma = 0$, т. е. пренебречь ионным давлением и инерцией частиц.

Для удобства дальнейшего изложения запишем (4) в следующей форме:

$$\begin{aligned} \left(1 + \tau N - \frac{\sigma^2}{N^2} \right) \frac{\partial^2 N}{\partial \eta^2} - \frac{1}{N} \left(1 - \frac{3\sigma^2}{N^2} \right) \left(\frac{\partial N}{\partial \eta} \right)^2 - \\ - v^2 (W^2 - N) (N - 1) = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Путем несложных преобразований уравнение (5) может быть приведено к виду

$$\left(\frac{dN}{d\eta} \right)^2 = v^2 F(N, \sigma^2, W^2, \tau),$$

$$F = \frac{N^3}{3Q^2} \{ 6 [1 + W^2 (1 - \tau)] \times$$

$$\begin{aligned} &\times N^3 \ln N - 2\sigma^2 W^2 + 3\sigma^2 (W^2 + 1) N - 6(\sigma^2 - W^2) N^2 - \\ &- [\sigma^2 (W^2 - 3) + 6W^2 (1 + \tau) + 3\tau - 6] N^3 + 6[\tau (W^2 + 1) - 1] N^4 - 3\tau N^5 \}, \\ &Q = \tau N^3 + N^2 - \sigma^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Мы считали $\gamma_1=1$ и положили, в соответствии с [12], $\gamma=2$. Для определения постоянной интегрирования использовали условие $dN/d\eta=0$ при $N=1$. Эффективный потенциал $F(N)$ как функция плотности при различных σ^2 и W^2 показан на рис. 1 для $\tau=0$ и на рис. 2 при $\tau=1$. Вещественные решения в виде уединенных волн существуют в области $F(N) \geq 0$ при $N_{\min} \leq N \leq 1$ и $1 \leq N \leq N_{\max}$. Как видно из рис. 1, при $\sigma^2=1$ и «сверхальфвеновских» скоростях ($W^2 < 1$) имеем солитон разрежения ($N < 1$), а для «субальфвеновских» движений ($W^2 > 1$) — солитон сжатия ($N > 1$). При определенных наборах параметров существуют солитоны обоих знаков (сжатия и разрежения) при одной и той же скорости W (см. рис. 2).

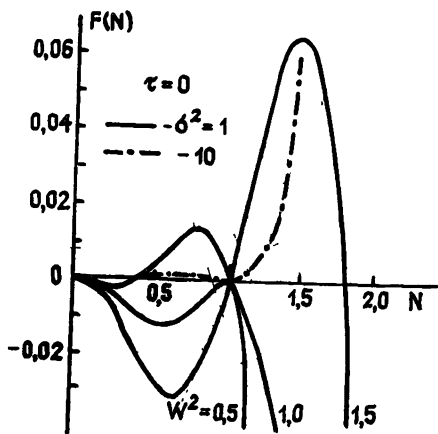


Рис. 1.

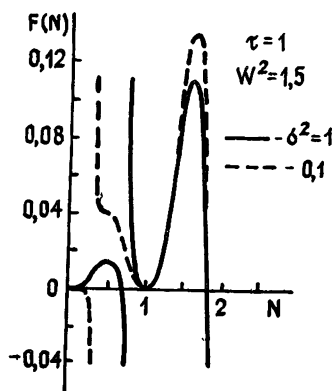


Рис. 2.

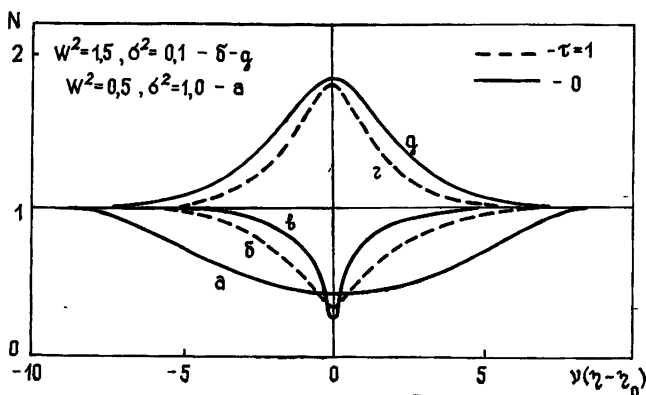


Рис. 3.

Профили уединенных волн, полученные численным интегрированием выражения (6), показаны на рис. 3. Профиль, соответствующий $\tau=0$, $\sigma=0$ [7], при $W^2=1,5$ практически повторяет кривую (g). Параметры солитонов u , α связаны с W и σ следующими соотношениями: $\alpha^2 = \beta W^2 \sigma^2 - m/M$, $u = \alpha v_a / W$. Отсюда видно, например, что в плазменном слое магнитосферы, где $\beta \gg m/M$, для солитонов с $W^2=1,5$, $\sigma^2=0,1$, показанных на рис. 3, $\alpha=0,39 v_s/v_a$, продольная скорость $u/\alpha=0,82 v_a$, поперечная скорость $u=0,32 v_s$. На сравнительно малых высотах, где $\beta < m/M$, могут существовать солитоны только с большими значениями $W^2 \sigma^2$.

Отметим, что соответствующим выбором константы интегрирования могут быть найдены периодические решения уравнения (5).

Рассмотрим некоторые интересные эффекты, которые могут возникать при распространении нелинейной альфвеновской волны в магнитосферной плазме. Обозначим $\delta n = N - 1$, $R = W^2 - 1$ и рассмотрим

слабые возмущения $|\delta n| \ll 1$, $|R| \ll 1$. Раскладывая уравнение (4) по малым δn , сведем его к уравнению типа Кортевега — де Вриза для стационарных волн .

$$v^{-2}(1+\tau-\sigma^2)\delta n'' - \delta n(R-\delta n) = 0, \quad (7)$$

решение которого описывает солитоны сгущения или разрежения в зависимости от знака дисперсионного коэффициента $\varepsilon = v^{-2}(1+\tau-\sigma^2)$ [13]:

$$\delta n = (3/2) R \operatorname{Sech}^2 \sqrt{R/\varepsilon} (\eta - \eta_0). \quad (8)$$

Линейное дисперсионное уравнение (2а) легко получить из уравнения (7), полагая $|R| \gg |\delta n|$ и подставляя $\delta n \sim \exp [i\alpha_0 k \eta / \omega_{oi}]$.

В [4] показано, что электромагнитные скачки, в которых имеет место резкое возрастание поперечного и продольного электрического поля, наблюдаются в области обращения знака поляризации косой альфвеновской волны, связанного с изменением знака ее дисперсии. В области перехода дисперсии через нуль должно наблюдаться резкое укручение фронта возмущения N из-за нелинейности и, следовательно, резкое возрастание E_z , которое пропорционально градиенту N [4]. Это хорошо видно из выражений (7), (8): при $\varepsilon \rightarrow 0$ характерный размер возмущения $\sqrt{\varepsilon/R}$ стремится к нулю, т. е. происходит «схлопывание» солитона. В случае сильной нелинейности, когда дисперсионный коэффициент перед второй производной в уравнении (5) нельзя считать не зависящим от N , в области изменения знака дисперсии формируется солитон с вертикальными (бесконечно крутыми) стенками (см. рис. 3, профиль ϑ). Действительно, как видно из (5), (6); $dN/d\eta \rightarrow \infty$ в точке N_* , в которой $Q = \tau N_*^3 + N_*^2 - \sigma^2 = 0$. Это равенство в случае малых возмущений ($N \sim 1$) переходит в условие «схлопывания» $\varepsilon = 0$, из которого следует выражение для соответствующего критического угла $\alpha_*^2 = (1 + \tau)v_s^2/v_a^2 - m/M$. При $\beta \gg m/M$ и $\tau \ll 1$ это выражение согласуется с [6, 4].

Проанализируем эффекты, связанные с затуханием возмущений. Учет диссипации в уравнениях типа (7) приводит к возможности формирования ударных волн [13]. В случае бесстолкновительного затухания Ландау на электронах коэффициент диссипации альфвеновских волн имеет вид $\delta/\omega \approx \omega/k_{\parallel} v_{Te}$ [5, 11], что в наших переменных эквивалентно $\mu = u/\alpha v_{Te}$. С учетом диссипации уравнение (7) будет иметь вид

$$\varepsilon \delta n'' - \mu \delta n' - \delta n(R - \delta n) = 0. \quad (9)$$

Решения этого уравнения хорошо известны [13]. Если μ превышает некоторое критическое значение μ_* , они описывают ударную волну с монотонным профилем. В случае $\mu < \mu_*$ будем иметь ударную волну с осцилляциями перед фронтом или за фронтом в зависимости от знака ε , причем при $\mu \ll \mu_*$ первые несколько осцилляций описываются профилем, соответствующим солитонам уравнения (7). В соответствии с [13] найдем $\mu_* = 2\sqrt{\varepsilon R}$, откуда легко определить соответствующую скорость u_* . Если угол распространения не слишком велик ($\alpha \gg (m/M)^{1/2}$), то $u_* \approx 2\alpha v_{Te}$. При углах, близких $\pi/2$ ($\alpha \ll (m/M)^{1/2}$), получим $u_* \approx 2v_s$. Для слабых возмущений ($|\delta n| \ll 1$, $|R| \ll 1$) эти выражения эквивалентны $v_{a*} \approx 2v_{Te}$ и $\alpha v_{a*} \approx 2v_s$.

Таким образом, альфвеновские возмущения конечной амплитуды, зарождающиеся в горячей магнитосферной плазме [11], скажем, в плазменном слое, где $v_a \ll v_{Te}$, при распространении к Земле должны формировать ударные волны с осцилляторной структурой в области магнитосферы, в которых v_a становится близкой к $2v_{Te}$ при относительно малых углах распространения и $v_a \sim 2v_s/\alpha$ при больших углах. Можно предположить, что именно с образованием косых альфвеновских ударных волн на расстоянии в несколько земных радиусов в магнитосферной плазме связаны процессы ускорения авроральных частиц. Энергию частиц легко оценить, записав выражение для продольного электриче-

ского потенциала φ_1 , которое следует из (3), если положить $E_z = -\alpha \partial \varphi_1 / \partial \xi$:

$$e \varphi_1 = m v_{Te}^2 \ln N - (m u^2 / 2 \alpha^2) (1 - 1/N^2).$$

Оценим характеристики альфвеновских солитонов в плазменном слое на расстоянии $r \approx 7r_e$ (r_e — радиус Земли). В этой области $v_{Te} \approx 3 \cdot 10^9$ см/с, $v_a \approx 2 \cdot 10^8$ см/с, $B_0 \approx 120$ нТл, $T_i \sim T_e$. Для возмущений магнитного поля $B_y \sim 10$ нТл с характерным поперечным размером $\lambda_{\perp} \sim 3\rho_i \approx 170$ км (ρ_i — гирорадиус ионов) получим $u \approx 1,2 \alpha v_a$, $N_{\min} \approx 0,8$, $e\varphi_1 \approx 1$ кэВ, $E_x \approx 5$ мВ/м, $j_{\parallel} \approx 0,2$ мкА/м². Строгое решение задачи о распространении уединенной альфвеновской волны в неоднородной магнитосфере отсутствует. Однако, пользуясь полученными выше величинами, мы можем дать грубую оценку параметров возмущения на ионосферных высотах. При дипольной аппроксимации внешнего магнитного поля ($B_0 \sim r^{-3}$) и в отсутствие диссипации простой масштабный перенос на высоту 1000 км дает $\lambda_{\perp} \approx 11$ км, $B_y \approx 150$ нТл, $E_x \approx 75$ мВ/м, $j_{\parallel} \approx 45$ мкА/м², что примерно соответствует экспериментальным данным [1, 2, 4].

Таким образом, мы видим, что в магнитосферной плазме могут формироваться косые альфвеновские солитоны (и периодические волны) с поперечным размером $\lambda_{\perp} \gtrsim \rho_i (T_e/T_i)^{1/2}$. Для относительно слабых возмущений продольная скорость солитонов близка к альфвеновской, а поперечная — к ионно-звуковой. Продольный размер структур составляет по порядку величины $\lambda_{\parallel} \sim \lambda_{\perp} v_a/v_s$. Учет диссипации в волновом уравнении приводит к возможности образования на нескольких радиусах Земли в авроральной магнитосфере косых альфвеновских ударных волн, которые могут играть важную роль в зоне полярных сияний. Это касается как эффектов ускорения частиц и возбуждения низкочастотной волновой турбулентности, так и локального разогрева плазмы.

Развитие количественной модели явлений, связанных с нелинейными альфвеновскими волнами в авроральной зоне, требует решения двумерной задачи и учета неоднородности среды, в частности влияния отражения на структуру волнового поля над ионосферой.

Авторы признательны В. М. Костину за многочисленные полезные дискуссии и С. В. Биличенко за помощь в вычислениях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Chmyrev V. M., Oraevsky V. N. et al. — Planet. Sci., 1985, 33, p. 1383.
2. Чмырев В. М., Биличенко С. В. и др. — Геомагнетизм и аэронавтика, 1986, 26, с. 275.
3. Burke W. J. — Rev. Geophys. Space Res., 1982, 20, p. 685.
4. Биличенко С. В., Костин В. М., Чмырев В. М. Препринт ИЗМИРАН № 57 (531). — М., 1984.
5. Hasegawa A., Chen L. — Phys. Rev. Lett., 1975, 35, p. 371.
6. Чурилов С. М. — Физика плазмы, 1980, 6, с. 684.
7. Hasegawa A., Mima K. — Phys. Rev. Lett., 1976, 37, p. 690.
8. Чурилов С. М. — Физика плазмы, 1979, 5, с. 42.
9. Чмырев В. М. — Изв. вузов — Радиофизика, 1985, 28, № 6, с. 792.
10. Чмырев В. М., Мордовская В. Г. Препринт ИЗМИРАН № 1 (534). — М., 1985.
11. Hasegawa A., Mima K. — J. Geophys. Res., 1978, 83, p. 1117.
12. Кролл Н., Трайвеллис А. Основы физики плазмы. — М.: Мир, 1975, с. 103.
13. Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. — М.: Наука, 1973, гл. 4.

Институт земного магнетизма,
ионосферы и распространения радиоволн
АН СССР

Поступила в редакцию
24 января 1985 г.

NON-LINEAR ALFVEN WAVES IN THE MAGNETOSPHERE

V. M. Chmyrev, V. G. Mordovskaya

The exact solutions of non-linear wave equation are found which describe the propagation of modified Alfvén waves in plasma taking into account the ion pressure and electron inertia. The possibility of oblique Alfvén shock formation in the auroral magnetosphere is shown.