

УДК 537.86 029.42

О ВЛИЯНИИ НЕОДНОРОДНОСТИ ДЕНЬ — НОЧЬ НА СНЧ ПОЛЯ

Л. М. Рабинович

Проведен расчет сверхнизкочастотных полей в резонаторе Земля — ионосфера при наличии неоднородности ионосферы день — ночь. Показано, что наличие неоднородности приводит к существенным изменениям поля в окрестности узловой линии первого мода СНЧ колебаний, к искривлению линий постоянного уровня поля и превращению линий узлов первого мода в одну узловую точку.

Сферический резонатор, образованный поверхностью Земли и ионосферой, имеет неоднородную верхнюю границу. В работе [1] были рассмотрены собственные частоты неоднородного сферического резонатора, а в работах [2, 3] определялись поля в плоском волноводе Земля — ионосфера при наличии локальных неоднородностей. Данная работа посвящена расчету сверхнизкочастотных полей в сферическом резонаторе при наличии неоднородности ионосферы день — ночь.

Рассмотрим возбуждение резонатора Земля — ионосфера вертикальным точечным электрическим диполем с токовым моментом $JdS(\omega)$, где $\omega = 2\pi f$ — круговая частота. Зависимость от времени $e^{i\omega t}$. Источник расположен на поверхности Земли в точке с координатами a, θ_0, ϕ_0 , где a — радиус Земли. Ось $\theta=0$ сферической системы координат направлена в центр дневного полушария (рис. 1), терминатор находится на экваторе данной системы координат. Рассмотрим следующую модель резонатора Земля — ионосфера. Поверхность Земли предполагается идеально проводящей, а свойства ионосферной стенки характеризуются импедансом z на сфере радиуса b . Для учета влияния неоднородности день — ночь выберем следующую зависимость импеданса от координат:

$$z = z_0 + z_1 \cos \theta,$$

где z_0 — среднее значение импеданса, соответствующее отсутствию неоднородности, а z_1 — амплитуда его изменений на дневной и ночной полусфере ($|z_1| < |z_0|$). В силу произвольности выбора начала отсчета угла ϕ можно полагать $\phi_0 = 0$.

На сверхнизких частотах величина z мала ($|z| \sim 10^{-2}$), поэтому можно использовать поверхностный импеданс z ионосферы в качестве малого параметра и искать решение с помощью теории возмущений в виде разложения полей по полной ортонормированной системе собственных функций E_{nm} и H_{nm} идеального ($z=0$) резонатора в виде

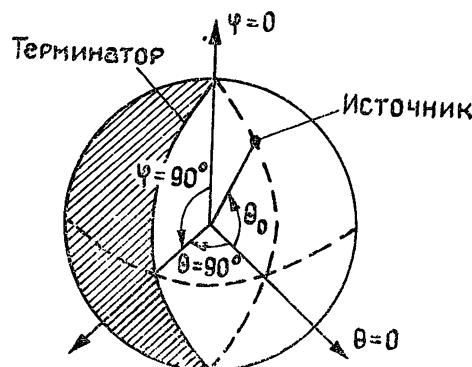


Рис. 1.

$$\mathbf{H} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \alpha_{nm} \mathbf{H}_{nm}; \quad (1a)$$

$$\mathbf{E} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \beta_{nm} \mathbf{E}_{nm}, \quad (1b)$$

где \mathbf{E} и \mathbf{H} — электрическая и магнитная составляющие поля. В связи с тем, что \mathbf{E}_{nm} и \mathbf{H}_{nm} на собственных частотах идеального резонатора удовлетворяют нулевым граничным условиям, а граничные условия рассматриваемой задачи импедансные, ряды (1) сходятся медленно. Поэтому для расчета полей методом редукции необходимо решать систему уравнений большого порядка. Используемый в данной работе метод последовательных уточнений [4] позволяет существенно уменьшить порядок системы уравнений и оценить величину отбрасываемых членов. Возможности используемого метода будут продемонстрированы на примере расчета электрической составляющей поля.

Система уравнений для коэффициентов α_{nm} и β_{nm} разложения (1) в линейном по импедансу приближении имеет вид [5]

$$\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=-p}^p [(\omega_n^2 - \omega^2) \delta_{np} \delta_{mq} + i\omega c \Lambda_{nmpq}] \alpha_{pq} = -\omega_n J_{nm}; \quad (2a)$$

$$\omega \beta_{nm} - \omega_n \alpha_{nm} = J_{nm}, \quad (2b)$$

где $\omega_n = (c/a) \sqrt{n(n+1)}$ — n -я шумановская частота, $\delta_{np} = \begin{cases} 0, & n \neq p \\ 1, & n = p \end{cases}$ — символ Кронекера, c — скорость света в вакууме,

$$J_{nm} = \frac{2 \sqrt{2\pi}}{a \sqrt{b-a}} \sqrt{\frac{(2n+1)(n-|m|)!}{2(n+|m|)!}} P_n^m(\cos \theta_0) e^{im\varphi_0} JdS(\omega)$$

— функция источников поля, $P_n^m(\cos \theta)$ — присоединенные полиномы Лежандра.

В рассматриваемом случае неоднородности день—ночь имеем

$$\Lambda_{nmpq} = \left[\frac{z_0}{b-a} \delta_{np} + \frac{z_1}{(b-a)(n+1)} \sqrt{\frac{[(n+1)^2 - m^2] n(n+2)}{(2n+1)(2n+3)}} \times \right. \\ \left. \times \delta_{n+1,p} + \frac{z_1}{(b-a)n} \sqrt{\frac{(n^2 - m^2)(n^2 - 1)}{4n^2 - 1}} \delta_{n-1,p} \right] \delta_{mq}. \quad (3)$$

Вклад ТЕ-волны в решение квадратичен относительно малого параметра, и им можно пренебречь.

Как видно из (3), матрица бесконечной системы уравнений (2a) трехдиагональна. После замены переменных

$$x_{nm} = \alpha_{nm} \sqrt{\omega_n^2 - \omega^2 - i\omega c z_0 / (b-a)} \quad (4)$$

система (2a) переходит в систему уравнений вида

$$X = AX + B \quad (5)$$

с матричными элементами

$$a_{np}^m = 0 \text{ при } n=p \text{ и } |n-p| > 2; \quad (6a)$$

$$a_{n-1,n}^m = -\frac{i\omega a^2}{c} \frac{z_1}{b-a} \{n [[n(n+1) - v(v+1)] [n(n-1) -$$

$$-\nu(\nu+1)]^{1/2}\}^{-1} \sqrt{\frac{(n^2-m^2)(n^2-1)}{4n^2-1}};$$

$$\begin{aligned} a_{n+1,n}^m = & -\frac{i\omega a^2}{c} \frac{z_1}{b-a} \{ [n(n+1)-\nu(\nu+1)][(n+1)(n+2) - \\ & -\nu(\nu+1)]\}^{-1/2} \frac{1}{n+1} \sqrt{\frac{[(n+1)^2-m^2]n(n+2)}{(2n+1)(2n+3)}}. \end{aligned} \quad (6b)$$

Вектор-столбец \mathbf{B} имеет элементы

$$b_n^m = -\sqrt{\frac{n(n+1)}{n(n+1)-\nu(\nu+1)}} J_{nm}. \quad (6c)$$

В (6) введено обозначение

$$\nu(\nu+1) = \frac{a^2}{c^2} \left(\omega^2 - \frac{i\omega c}{b-a} z_0 \right). \quad (7)$$

Введенная таким образом величина ν имеет явный физический смысл: это комплексная постоянная распространения электромагнитных волн вдоль дуги большого круга при отсутствии неоднородности ($z_1=0$).

Отметим, что в матрице \mathbf{A} ненулевыми являются только две диагонали, параллельные главной. Кроме того, как легко показать, и матрица \mathbf{A} и вектор-столбец \mathbf{B} ограничены по норме.

В качестве нулевого приближения при решении системы (5) возьмем

$$\mathbf{X}_0 = \mathbf{B}. \quad (8)$$

Подставляя (8) в (5), имеем (с учетом обозначения (7))

$$\alpha_{nm}^{(0)} = -\omega_n J_{nm} \left(\omega_n^2 - \omega^2 - \frac{i\omega c}{b-a} z_0 \right), \quad (9)$$

где $\alpha_{nm}^{(0)}$ — решения системы (2а) в нулевом приближении. Величины $\alpha_{nm}^{(0)}$ (и, соответственно, $\beta_{nm}^{(0)}$) совпадают с коэффициентами разложения полей однородного резонатора по собственным функциям идеального резонатора. Таким образом, в качестве нулевого приближения для поля в неоднородном резонаторе выбрано поле однородного резонатора с импедансом z_0 :

$$E_{\text{одн}} = -\frac{\pi i J d S(\omega)}{a^2(b-a)} \frac{\nu(\nu+1)}{\omega} \frac{P_\nu [\cos(\pi-\gamma)]}{\sin \nu \pi}, \quad (10)$$

где γ — расстояние между наблюдателем и источником, $P_\nu[\cos(\pi-\gamma)]$ — функция Лежандра.

Здесь и в дальнейшем будет рассматриваться вертикальная электрическая составляющая СНЧ поля E_r .

Сделав в (5) замену

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}' + \mathbf{B}, \quad (11)$$

получим систему уравнений

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A} \mathbf{X}' + \mathbf{A} \mathbf{B}. \quad (12)$$

Пусть

$$E_r = E_{\text{одн}} + E_p, \quad (13)$$

где E_p — рассеянное поле.

Тогда (12), с учетом замены (4), — это система уравнений для коэффициентов разложения рассеянного поля по собственным функциям идеального резонатора.

Систему (12) будем решать с помощью метода последовательных уточнений [4]. Этот метод состоит в следующем: вместо бесконечной матрицы A берется редуцированная матрица A' — «главная» часть оператора A , такая, чтобы

$$\| (I - A')^{-1} (A - A') \| < 1. \quad (14)$$

Решение системы уравнений (12) ищется в виде разложения по степеням оператора $G = (I - A')^{-1} (A - A')$:

$$X' = (I - A')^{-1} D + G(I - A')^{-1} D + G^2(I - A')^{-1} D + \dots, \quad (15)$$

где I — единичная матрица, $D = AB$.

Используя структуру матрицы A , можно показать (см. Приложение), что в линейном по z_1 приближении можно ограничиться первыми двумя шагами метода последовательных уточнений и представить решение системы (12) в виде

$$X' = (I - A')^{-1} AB + [(I - A')^{-1} (A - A')] (I - A')^{-1} AB + O(z_1^2). \quad (16)$$

В разложении (16) предполагается, что уровень редукции N таков, что выполняется соотношение (14).

Таким образом, в линейном по импедансу приближении рассеянное поле можно представить в виде

$$E_p = E_1 + E_2, \quad (17a)$$

где

$$E_1 = \frac{1}{\omega} \sum_{n=1}^{N+1} \frac{\sqrt{n(n+1)}}{\sqrt{n(n+1)} - v(v+1)} \sum_{m=-(n+1)}^{n+1} (x_{nm}^{(1)} + x_{nm}^{(2)}) E_{nm}^{(r)}; \quad (17b)$$

$$E_2 = \frac{z_1}{c(b-a)^2} JdS(\omega) \left(\cos \theta E_3 - \sin \theta \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} E_4 \right); \quad (17c)$$

$$E_3 = \sum_{n=N+1}^{N+2} \frac{n(n+1)(n+2)}{[n(n+1)-v(v+1)][(n+1)(n+2)-v(v+1)]} P_n(\cos \gamma) + \quad (17d)$$

$$+ \sum_{n=N+3}^{\infty} \{(2n+1)n(n+1)[(n-1)(n+2)-v(v+1)]P_n(\cos \gamma)\} \times$$

$$\times \{[n(n-1)-v(v+1)][n(n+1)-v(v+1)][(n+1)(n+2)-v(v+1)]\}^{-1};$$

$$E_4 = \sum_{n=N+1}^{N+2} \frac{n(n+2)}{[n(n+1)-v(v+1)][(n+1)(n+2)-v(v+1)]} P_n^1(\cos \gamma) + \quad (17e)$$

$$+ \sum_{n=N+3}^{\infty} \frac{(2n+1)(n+1)[(n-1)(n+2)-v(v+1)]P_n^1(\cos \gamma)}{[n(n-1)-v(v+1)][n(n+1)-v(v+1)][(n+1)(n+2)-v(v+1)]}$$

$x_{nm}^{(1)}$ и $x_{nm}^{(2)}$ — приращения решений системы (12) на первом и втором шагах метода последовательных уточнений. Отметим, что $x_{nm}^{(2)}$ выражаются через $x_{nm}^{(1)}$, элементы матрицы A и миноры N -го столбца матрицы $(I - A')$ (см. Приложение),

$$E_{nm}^{(r)} = \frac{i}{a \sqrt{2\pi(b-a)}} \sqrt{\frac{(2n+1)(n-|m|)!}{2(n+|m|)!}} P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi}.$$

По формулам (17), (13) и (10) проводился численный счет при различных расположениях источника и наблюдателя для частот в окрестности первого мода шумановских резонансов, т. е. частоты $f \approx 8$ Гц. Уровень редукции N выбирался таким, чтобы выполнялось условие (14). При этом оператор G становится сжимающим и разложение (15) правомерно. Для рассматриваемого диапазона частот условие (14) выполняется при $N \geq 3$. Отметим, что для получения погрешностей в единицы процентов в рассеянном поле с помощью обычного метода, заключающегося в решении системы (12) методом редукции, необходимо брать $N \sim 20$. Для проверки эффективности предложенного метода результаты расчетов, проведенных по формулам (17) при выбранном из (14) уровне редукции ($N=3$), сравнивались с «точными» полями, полученными с помощью прямого редуцирования системы (12) при $N=25$. При этом оказалось, что результаты, полученные обоими методами, отличаются друг от друга на единицы процентов в рассеянном поле. Отметим также, что метод редукции не позволяет оценить порядок малости отбрасываемых слагаемых.

При расчетах постоянная распространения однородного резонатора задавалась в виде следующей эмпирической формулы:

$$\nu = (f-2)/6 - 0,01fi.$$

Величина z_1 вычислялась из соотношения

$$z_1 = [(b-a)c]/i\omega a^2 [\nu(\nu+1) - \nu_d(\nu_d+1)],$$

где ν_d — значение постоянной распространения неоднородного резонатора в центре дневной полусфера. Расчет проводился для значений ν_d таких, что $|\nu_d - \nu|/|\nu| = 2,5\%$, $i\nu\nu_d = 1,1 i\nu$. Выбранная модель близка к модели, полученной из данных работы [3].

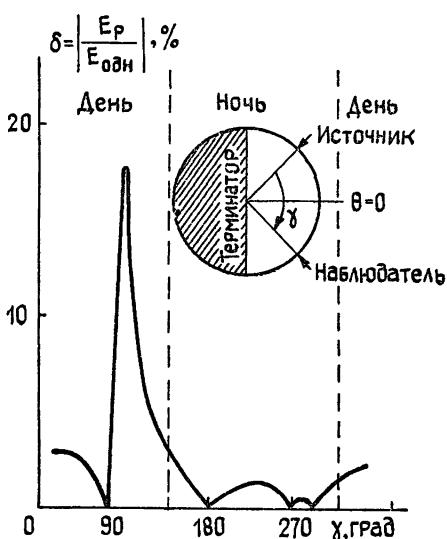


Рис. 2.

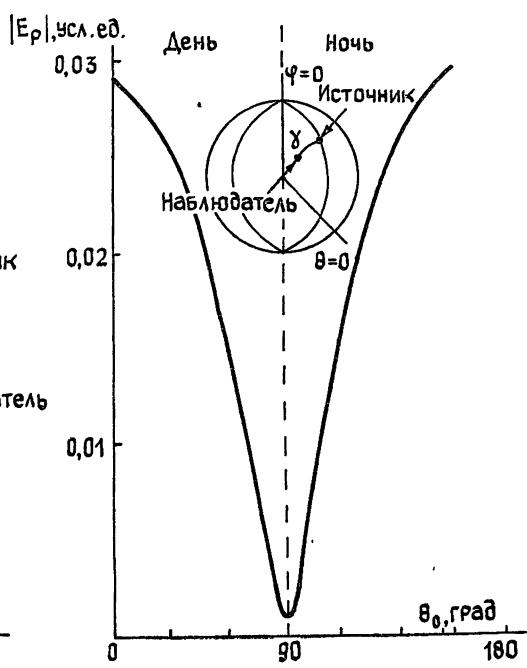


Рис. 3.

На рис. 2 представлено относительное возмущение поля $\delta = |E_p/E_{\text{одн}}| \%$ при перемещении наблюдателя по меридиану источника.

Таблица 1

| $\gamma = 90^\circ$ | | | | | | |
|--|--|--|--|---|--|--|
| $\gamma = 45^\circ$ | | | | | | |
| f | | | | $\theta_n = 60^\circ$ «симметрич- ная» трасса | $\theta_n = 60^\circ$ «парал- лельная» трасса | $\theta_n = 60^\circ$ «симметрич- ная» трасса |
| $\theta_n = 45^\circ$ «парал- лельная» трасса | $\theta_n = 135^\circ$ «симметрич- ная» трасса | $\theta_n = 60^\circ$ «парал- лельная» трасса | $\theta_n = 120^\circ$ «симметрич- ная» трасса | $\theta_n = 120^\circ$ «парал- лельная» трасса | $\theta_n = 60^\circ$ «симметрич- ная» трасса | $\theta_n = 120^\circ$ «симметрич- ная» трасса |
| $\delta, \%$ | | | | | | |
| 7,5 | 11,5 | 0,2 | 8,3 | 0,4 | 8,2 | 0,4 |
| 8,0 | 17,2 | 0 | 12,1 | 0,1 | 11,7 | 0,2 |
| 8,5 | 11,7 | 0,2 | 8,2 | 0,2 | 7,9 | 0,1 |

| $\gamma = 45^\circ$ | | | | | | |
|--|--|---|--|--|---|--|
| $\gamma = 22,5^\circ$ | | | | | | |
| f | | | | $\theta_n = 75^\circ$ | $\theta_n = 75^\circ$ | $\theta_n = 75^\circ$ |
| $\theta_n = 22,5^\circ$ «парал- лельная» трасса | $\theta_n = 67,5^\circ$ «парал- лельная» трасса | $\theta_n = 67,5^\circ$ «симметрич- ная» трасса | $\theta_n = 75^\circ$ «парал- лельная» трасса | $\theta_n = 105^\circ$ «симметрич- ная» трасса | $\theta_n = 105^\circ$ «парал- лельная» трасса | $\theta_n = 105^\circ$ «симметрич- ная» трасса |
| $\delta, \%$ | | | | | | |
| 7,5 | 2,6 | 1,1 | 0,2 | 0,8 | 0,1 | 0,7 |
| 8,0 | 2,7 | 1,1 | 0,2 | 0,7 | 0,1 | 0,8 |
| 8,5 | 2,9 | 1,2 | 0,1 | 0,8 | 0,1 | 0,9 |

| $\gamma = 135^\circ$ | | | | | | |
|--|--|--|--|--|---|--|
| $\gamma = 45^\circ$ | | | | | | |
| f | | | | $\theta_n = 135^\circ$ «симметрич- ная» трасса | $\theta_n = 135^\circ$ «парал- лельная» трасса | $\theta_n = 135^\circ$ «симметрич- ная» трасса |
| $\theta_n = 45^\circ$ «парал- лельная» трасса | $\theta_n = 135^\circ$ «симметрич- ная» трасса | $\theta_n = 60^\circ$ «парал- лельная» трасса | $\theta_n = 120^\circ$ «симметрич- ная» трасса | $\theta_n = 60^\circ$ «симметрич- ная» трасса | $\theta_n = 120^\circ$ «парал- лельная» трасса | $\theta_n = 120^\circ$ «симметрич- ная» трасса |
| $\delta, \%$ | | | | | | |
| 7,5 | 2,6 | 1,1 | 0,2 | 0,8 | 0,1 | 0,7 |
| 8,0 | 2,7 | 1,1 | 0,2 | 0,7 | 0,1 | 0,8 |
| 8,5 | 2,9 | 1,2 | 0,1 | 0,8 | 0,1 | 0,9 |

| $\gamma = 135^\circ$ | | | | | | |
|--|--|--|--|--|---|--|
| $\gamma = 45^\circ$ | | | | | | |
| f | | | | $\theta_n = 135^\circ$ «симметрич- ная» трасса | $\theta_n = 135^\circ$ «парал- лельная» трасса | $\theta_n = 135^\circ$ «симметрич- ная» трасса |
| $\theta_n = 45^\circ$ «парал- лельная» трасса | $\theta_n = 135^\circ$ «симметрич- ная» трасса | $\theta_n = 60^\circ$ «парал- лельная» трасса | $\theta_n = 120^\circ$ «симметрич- ная» трасса | $\theta_n = 60^\circ$ «симметрич- ная» трасса | $\theta_n = 120^\circ$ «парал- лельная» трасса | $\theta_n = 120^\circ$ «симметрич- ная» трасса |
| $\delta, \%$ | | | | | | |
| 7,5 | 2,6 | 1,1 | 0,2 | 0,8 | 0,1 | 0,7 |
| 8,0 | 2,7 | 1,1 | 0,2 | 0,7 | 0,1 | 0,8 |
| 8,5 | 2,9 | 1,2 | 0,1 | 0,8 | 0,1 | 0,9 |

ника в направлении к центру дневной полусфера. Источник расположен на широте $\theta_0=45^\circ$, частота $f=8$ Гц. Взаимное расположение наблюдателя и источника и направление движения наблюдателя показано в верхней части рисунка. Расстояние $\gamma > 180^\circ$ соответствует движению от антипода к источнику. Видно, что относительное возмущение поля достигает наибольшего значения (до 17,7%) в случае, когда источник и наблюдатель разнесены на 90° и находятся по одну сторону от терминатора (в рассматриваемом случае — в дневном полушарии). Большая величина δ в этом случае объясняется тем, что расстояние $\gamma=90^\circ$ соответствует узловой линии первого мода поля однородного резонатора, на которой $E_{\text{одн}}$ принимает наименьшее значение ($|E_{\text{одн}}| \neq 0$ из-за влияния высших модов), а рассеянное поле при таком расположении источника и наблюдателя минимума не имеет. В случае когда источник и наблюдатель расположены по разные стороны от терминатора на одинаковом от него расстоянии («симметричная» трасса*), рассеянное поле мало при любом расстоянии между ними. Это объясняется тем, что возмущения, вызванные дневной иочной ионосферой, взаимно компенсируются. При этом относительное возмущение поля также мало (менее 0,5%): Если же источник и наблюдатель расположены по одну сторону от терминатора на одинаковом расстоянии от него, то влияние неоднородности достаточно велико. Сказанное можно проиллюстрировать табл. 1, где приведены относительные возмущения поля для различных взаимных расположений источника и наблюдателя на частотах 7,5, 8,0 и 8,5 Гц.

В дальнейшем будем называть трассой дугу большого круга, соединяющую источник и точку наблюдения.

Необходимо, однако, отметить, что понятие «трасса распространения» в резонаторе Земля — ионосфера для частот, близких к первому резонансному максимуму, неправомерно. Дело в том, что даже для малых расстояний на частоте $f=8$ Гц первая зона Френеля охватывает целое полушарие. Влияние зоны Френеля проиллюстрировано рис. 3, где представлено рассеянное поле для трассы длиной $\gamma = 45^\circ$, перпендикулярных меридиану источника при перемещении источника вдоль дуги $\phi=0$. Видно, что, по мере захвата зоной Френеля ночного полушария (если источник расположен на дневной полусфере), рассеянное поле убывает, достигая минимума для источника и наблюдателя, расположенных на терминаторе. Затем модуль рассеянного поля увеличивается по мере выхода дневного полушария из зоны Френеля. Отметим, что для данной трассы модуль рассеянного поля близок к косинусу широты источника (при соответствующей нормировке).

В табл. 2 представлен модуль полного поля E_r при расстоянии $\gamma=45^\circ$ для трасс, «параллельных» терминатору, т. е. таких, у которых источник и наблюдатель находятся на одной широте ($\theta=\theta_0$).

Таблица 2

| f , Гц | $ E_r(\theta_0, \gamma=45^\circ) $, усл. ед | | | | | | | $E_{\text{одн}}$ |
|----------|--|--------|--------|--------|--------|--------|--------|------------------|
| | θ_0 , град | | | | | | | |
| 22,5 | 67,5 | 75 | 90 | 105 | 112,5 | 157,5 | | |
| 7,5 | 0,7260 | 0,7365 | 0,739 | 0,7443 | 0,7496 | 0,7518 | 0,7623 | 0,744 |
| 8,0 | 1,139 | 1,157 | 1,161 | 1,170 | 1,178 | 1,182 | 1,200 | 1,169 |
| 8,5 | 0,8381 | 0,8523 | 0,8556 | 0,8618 | 0,8689 | 0,8718 | 0,8866 | 0,862 |

Видно, что при перемещении источника от центра дневной полусфера к центру очной поле растет, причем в дневном полушарии оно меньше

* Определение трассы будет дано ниже. «Параллельной» трассой будем называть трассу, концы которой расположены по одну сторону от терминатора на одинаковом расстоянии от него.

ше $|E_{\text{одн}}|$, а в ночном — больше. Это объясняется тем, что затухание днем выше, чем ночью, и, соответственно, в ночном полушарии условия распространения более благоприятны, чем в дневном.

Наиболее наглядно влияние неоднородности день—ночь проявляется в том, что линия узлов первого мода шумановских резонансов превращается в одну узловую точку. Необходимо, однако, отметить, что большой круг, отстоящий от источника на расстоянии $\gamma=90^\circ$, продолжает играть особую роль: наименьшее вдоль каждой трассы значение поля достигается вблизи этой окружности. В узловой точке достигается наименьшее из этих значений.

Проведенные расчеты показывают, что узел поля находится в ночном полушарии для любого расположения источника.

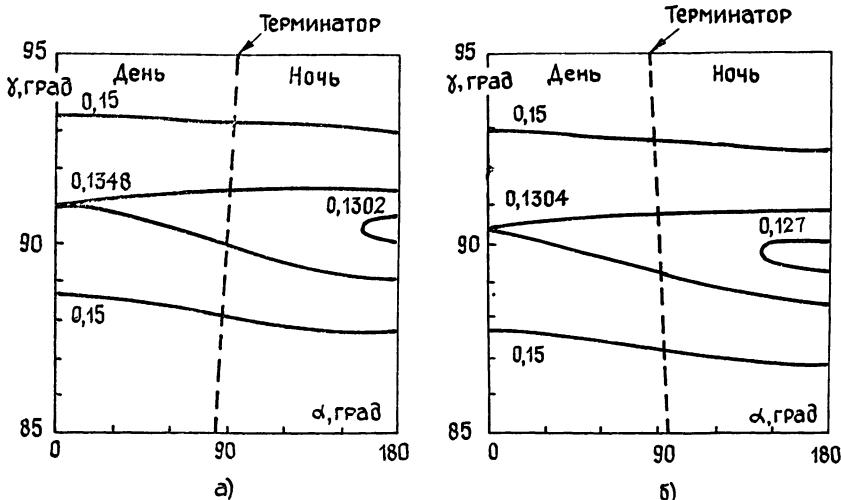


Рис. 4.

На рис. 4а и 4б показаны линии постоянного уровня поля в окрестности узловой линии первого мода ($f=8,0$ Гц) для источников, расположенных в дневном ($\theta=45^\circ$, рис. 4а) и ночном ($\theta_0=135^\circ$, рис. 4б) полушариях. Штриховой линией показан терминатор. По оси абсцисс отложен угол α — угол наклона трассы к меридиану источника. Необходимо отметить, что линии постоянной фазы также искривлены, но незначительно. Результаты расчетов позволяют сделать следующие выводы.

1. Примененный в работе алгоритм позволяет существенно уменьшить порядок системы уравнений, используемой для расчета СНЧ поляй при наличии неоднородности день—ночь, и провести оценки точности полученных результатов.

2. Наличие неоднородности день—ночь может привести, несмотря на относительно малое изменение параметров резонатора, к существенным изменениям поля в окрестности узловой линии первого мода СНЧ колебаний, к искривлению линий постоянного уровня поля и превращению линий узлов первого мода в одну узловую точку.

Автор благодарит А. П. Николаенко за постановку задачи и обсуждение полученных результатов.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Докажем, что в линейном по z_1 приближении, в разложении (15) можно ограничиться первыми двумя шагами метода последовательных уточнений.

В дальнейшем запись $A=((a_{ij}))$ будет означать, что матрица (или вектор) A состоит из элементов a_{ij} .

Имеем

$$A = ((a_{np}^m (\delta_{n,p+1} + \delta_{n,p-1}) \theta(n-m+1) \theta(n) \theta(p-m+1) \theta(p))),$$

где

$$\theta(k) = \begin{cases} 0, & k \leq 0 \\ 1, & k \geq 1 \end{cases}, \quad k=0, \pm 1, \dots,$$

$$AB \equiv ((d_p^m)) = ((a_{p-1,p}^m b_{p-1}^m \theta(p-1) \theta(p-m) + a_{p+1,p}^m b_{p+1}^m \theta(p-m+2) \theta(p))),$$

a_{np}^m и b_p^m заданы формулами (6);

$$A' = ((a_{np}^m (\delta_{n,p+1} + \delta_{n,p-1}) \theta(n-m+1) \theta(n) \theta(p-m+1) \times \theta(p) [1 - \theta(p-N)])),$$

$$(I - A')^{-1} = (((C_{np}^m [1 - \theta(p-N)] [1 - \theta(n-N-1)] + \delta_{np} \theta(p-N)) \theta(n-m+1) \theta(n) \theta(p-m+1) \theta(p))),$$

$$(I - A')^{-1} (A - A') = ((a_{np}^m (\delta_{n,p+1} + \delta_{n,p-1}) \theta(n-m+1) \times \theta(n) \theta(p-m+1) \theta(p) \theta(p-N) \theta(n-N) + C_{n,p-1}^m a_{p-1,p}^m \times \delta_{p,N+1} \theta(p-1) \theta(p-m) \theta(n) \theta(n-m+1) [1 - \theta(n-N-1)])).$$

После применения первого шага метода последовательных уточнений имеем

$$X_1' = (I - A')^{-1} AB \equiv ((x_{nm}^{(1)})) = \left(\left(\sum_{p=m}^N C_{np}^m d_p^m \theta(p) [1 - \theta(n-N-1)] \times \theta(n-m+1) \theta(n) + d_n^m \theta(n-N) \theta(n) \theta(n-m+1) \right) \right).$$

Как легко убедиться, величины d_p^m , являющиеся элементами вектора-столбца $D = AB$, линейны по возмущению импеданса z_1 , поскольку $a_{p-1,p}^m = O(z_1)$, $a_{p+1,p}^m = O(z_1)$, а B от z_1 не зависит. Поэтому при $n \geq N+2$ величины $x_{nm}^{(1)} = d_n^m$, являющиеся решением системы (12) после первого шага последовательных уточнений, линейны по z_1 .

Можно показать, что после i -го шага метода последовательных уточнений приращение $X_{(i)}$ решений системы (12) имеет вид

$$\begin{aligned} X_{(i)}' &= [(I - A')^{-1} (A - A')]^{i-1} (I - A')^{-1} AB \equiv ((x_{nm}^{(i)})) = \\ &= ((a_{np}^m (\delta_{n,p+1} + \delta_{n,p-1}) x_{pm}^{(i-1)} \theta(n-m+1) \theta(n) \times \theta(p-m+1) \theta(p) \theta(p-N) \theta(n-N) + \\ &\quad + C_{n,N}^m a_{N,N+1}^m x_{N+1,m}^{(i-1)} \theta(N) \theta(N-m+1) \times \theta(n) \theta(n-m+1) [1 - \theta(n-N-1)])). \end{aligned} \tag{П.1}$$

В частности, после второго шага ($i=2$) имеем

$$x_{N+1,m}^{(2)} = C_{N+1,N}^m a_{N,N+1}^m x_{N+1,m}^{(1)} + a_{N+1,N+2}^m x_{N+2,m}^{(1)} = O(z_1^2),$$

так как $C_{N+1,N}^m = -a_{N,N+1}^m = O(z_1)$.

Таким образом, из (П.1) следует, что

$$x_{nm}^{(2)} = O(z_1^2) \quad \text{при } n > N. \quad (\text{П.2})$$

Рассмотрим теперь приращения решений после 3-го шага метода последовательных уточнений. Имеем при $n \leq N$

$$x_{nm}^{(3)} = C_{nN}^m a_{N,N+1}^m x_{N+1,m}^{(2)} = O(z_1^3),$$

так как $|C_{nN}^m a_{N,N+1}^m| < 1$, что следует из условия (14). При $n > N$, используя (П.1) и (П.2), легко показать, что $x_{nm}^{(3)} = O(z_1^2)$. Таким образом, доказано, что соотношение (16) выполняется.

ЛИТЕРАТУРА

1. Базарова М. П., Рыбачек С. Т.— В сб.: Проблемы дифракции и распространения волн.— Л.: Гос. ун-т, 1979, вып. 17, с. 45.
2. Field E. C., Joiner R. G.— Radio Sci., 1979, 14, № 6, р. 1057.
3. Field E. C., Joiner R. G.— Radio Sci., 1982, 17, № 3, р. 693.
4. Литвиненко Л. Н., Просвирин С. Л., Шестопалов В. П. Препринт ИРЭ АН УССР № 21.— Харьков, 1972.
5. Блиох П. В., Николаенко А. П., Филиппов Ю. Ф. Глобальные электромагнитные резонансы в полости Земля—ионосфера.— Киев: Наукова думка, 1977.

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
27 декабря 1984 г.

ON THE INFLUENCE OF DAY—NIGHT INHOMOGENEITY ON THE ELF FIELDS

L. M. Rabinovich

The ELF field calculations in the Earth—ionosphere cavity with the day—night non-uniformity is carried out. The day—night inhomogeneity produces essential disturbances of the field near the zero-zone of first ELF resonance mode and curving the constant amplitude lines while the zero-line transforms into the single zero point.

Аннотации депонированных статей

УДК 537.874.6

ПОВЕДЕНИЕ ПОЛЯ В БЛИЗИ РЕБРА ПРОВОДЯЩЕГО КЛИНА ПРИ НАЛИЧИИ НЕСКОЛЬКИХ ГРАНИЦ РАЗДЕЛА СРЕД

B. B. Фисанов

Получены и исследуются явные выражения для величины, определяющей поведение поля вблизи ребра идеально проводящего клина при наличии от одной до пяти границ раздела диэлектрических секторов равного размера. Анализ проведен для набора структур, образованных различными сочетаниями диэлектрика или плазмы и вакуума. Отмечено возникновение аномально сильной особенности поля в плазменных структурах без потерь. Частотный интервал, в котором имеется аномальная особенность, зависит от степени заполнения плазмой клиновидной области, а также от числа границ раздела сред и наличия симметрий структур.

Статья депонирована в ВИНИТИ,
рег. № 2771—В 86. Деп. от 17 апреля 1986 г.
