ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXIX, № 5 РАДИОФИЗИКА 1986

УДК 538: 574.32

ОБ ИЗЛУЧЕНИИ ИСТОЧНИКОВ СИНХРОТРОННОГО И ОНДУЛЯТОРНОГО ТИПОВ В СРЕДАХ С БЕГУЩИМ ПАРАМЕТРОМ

В. А. Давыдов, В. В. Колесов

Рассмотрено излучение заряженной нити при падении на нее движущейся размытой границы раздела сред для случаев, когда нить имеет форму винтовой линии или форму синусоиды. Получены выражения для спектрального и углового распределения энергии излучения. Подробно проанализирован спектр излучения. Показано наличие максимума спектра на высоких частотах для релятивистских границ.

В работе [1] было рассмотрено излучение прямолинейной тонкой равномерно заряженной нити, возникающее при прохождении движущейся размытой границы раздела двух изотропных диэлектрических сред. Это переходное — по своей природе — излучение вследствие интерференции приобретает некоторые черты излучения Вавилова — Черенкова. Его угловое распределение, как показано в [1], представляет собой черенковский конус с вершиной в точке пересечения границы и нити. Условием формирования излучения является движение этой точки со скоростью, большей фазовой скорости света в среде.

В связи с этим можно ожидать, что излучение, генерируемое при прохождении границы раздела сред в электрическом поле нити, имеющей форму винтовой линии или синусоиды, будет иметь сходство с синхротронным или ондуляторным излучением заряженной частицы.

Интенсивность электромагнитного излучения, генерируемого в электрическом поле $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$ за счет наличия у диэлектрической проницаемости среды

$$\varepsilon(\boldsymbol{r}, t) = \varepsilon_0 + \varepsilon_1(\boldsymbol{r}, t)$$

нестационарной и (или) неоднородной части $\varepsilon_1(\boldsymbol{r}, t)$, вычисляется согласно [2] по формуле

$$W_{k\lambda}\, d^3\boldsymbol{k} = \frac{(2\pi)^4\,\omega^2}{4\varepsilon_0(\omega)} \left| \int d^3\boldsymbol{k}_1\, d\omega_1\, \varepsilon_1(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}_1, \omega - \omega_1) \times \right.$$
$$\left. \times\, (\boldsymbol{e}^\lambda, \boldsymbol{E}(\boldsymbol{k}_1, \omega_1))\right|^2 d^3\boldsymbol{k}, \tag{1}$$

где $\varepsilon_1(\boldsymbol{k}, \omega)$, $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k}, \omega)$ — фурье-образы соответственно, $\varepsilon_1(\boldsymbol{r}, t)$ и $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$, $\boldsymbol{e}^\lambda (\lambda = 1,2)$ — единичные орты поляризации, $k = \omega\sqrt{\varepsilon_0(\omega)}/c$. Формула (1) получена в [2] при условии, что ε_1 мало по сравнению с ε_0, а именно:

$$\int \varepsilon_1(\boldsymbol{r}, t) E^2 dV \ll \int \varepsilon_0 E^2 dV. \tag{2}$$

1. Излучение заряженной нити, имеющей форму винтовой линии. Рассмотрим распределение заряда в виде тонкой равномерно заряженной с плотностью заряда σ бесконечной винтовой линии с шагом h и радиусом R. Выберем ось спирали в качестве оси z декартовой системы координат. В этой системе плотность заряда имеет вид

$$\rho(\boldsymbol{r}, t) = \sqrt{1 + (2\pi R/h)^2}\, \sigma\delta(x - R\cos(2\pi z/h))\, \delta(y - R\sin(2\pi z/h)). \tag{3}$$

Фурье-образ

$$\rho(\boldsymbol{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{i(\omega t - \boldsymbol{kr})} \rho(\boldsymbol{r}, t)\, d\boldsymbol{r}\, dt$$

этой величины может быть выражен через функции Бесселя первого рода с целым индексом $J_m(x)$:

$$\rho(\boldsymbol{k}, \omega) = \frac{\sigma}{4\pi^2} \sqrt{1 + (2\pi R/h)^2}\, \delta(\omega) \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(-k_r R)\, e^{im\varphi_0} \times \times \delta\left(k_z - \frac{2\pi m}{h}\right), \tag{4}$$

где $k_r \equiv \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$, $\operatorname{tg} \varphi_0 \equiv k_y/k_x$.

Фурье-образ электрического поля, порождаемого плотностью заряда $\rho(\boldsymbol{k}, \omega)$, имеет вид

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k}, \omega) = \frac{4\pi i}{\varepsilon_0(0)} \frac{\boldsymbol{k}}{k^2} \rho(\boldsymbol{k}, \omega). \tag{5}$$

Пусть вдоль оси спирали с произвольной скоростью u движется размытая граница раздела двух изотропных диэлектрических сред, расположенная нормально к оси. Диэлектрическую проницаемость такой среды можно описать следующим выражением:

$$\varepsilon(\boldsymbol{r}, t) = \varepsilon_0 + \varepsilon_1(\boldsymbol{r}, t) = \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon \frac{\exp[\alpha(z - ut)]}{1 + \exp[\alpha(z - ut)]} \tag{6}$$

($1/\alpha$ — характерная ширина зоны размытия).

Фурье-образ $\varepsilon_1(\boldsymbol{r}, t)$ имеет вид

$$\varepsilon_1(\boldsymbol{k}, \omega) = \frac{i\Delta\varepsilon}{2\alpha} \frac{\delta(k_x)\delta(k_y)\delta(\omega - k_z u)}{\operatorname{sh}(\pi k_z/\alpha)}. \tag{7}$$

Считая ε_1 малым по сравнению с ε_0 в смысле соотношения (2) и подставляя (4) в (5), а (5) и (7) — в формулу (1), получаем, что излучаются только волны, поляризованные в плоскости, образованной вектором $\boldsymbol{k}$ и осью z (направлением скорости границы). Эта линейная поляризация характерна для переходного излучения (ср. [3], с. 26, 47).

Так как излучение происходит неограниченно долго, его интенсивность оказывается бесконечной (пропорциональной квадрату δ-функции). Физический смысл (так же, как и во всех подобных задачах, ср. [1, 4, 5]) имеет энергия, излучаемая в единицу времени. Ее величина равна

$$\frac{W(\omega, \theta)}{T} d\omega d\theta = \frac{\pi^2 \Delta\varepsilon^2 \sigma^2 [1 + (2\pi R/h)^2] c}{\alpha^2 \varepsilon_0^2(0)\, \varepsilon_0^{3/2}(\omega)\, u^2} \frac{\omega^6 \sin^3\theta}{\operatorname{sh}^2(\pi\omega/\alpha u)} \times \times \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m^2\left(\frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0(\omega)}\, R \sin\theta\right) \frac{\delta[\omega(1 - (u/c)\sqrt{\varepsilon_0(\omega)} \cos\theta) + m\Omega]}{(\omega^2 \sin^2\theta + m^2\Omega_0^2)^2} d\omega d\theta, \tag{8}$$

где введены обозначения: $\Omega \equiv 2\pi u/h$ — частота обращения точки пересечения границы и нити, $\Omega_0 \equiv \overline{2\pi c/h\sqrt{\varepsilon_0(\omega)}}$ — частота, соответствующая распространению света вдоль оси спирали в невозмущенной среде, $\theta \equiv (\widehat{\boldsymbol{k}, \boldsymbol{u}})$. Так как спираль бесконечна, нет зависимости излучения от азимутального угла φ, т. е. от направления в плоскости xy. При

$R \to 0$ это выражение переходит в формулу для интенсивности излучения прямой нити (см. [1]).

Полученное выражение по структуре аналогично интенсивности «ондуляторного» излучения, возникающего при пересечении неподвижной границы раздела движущейся заряженной нитью, имеющей форму синусоиды, которое рассчитано в [5]. Так же и в указанной работе, слагаемое с $m=0$ в (8) соответствует излучению Вавилова — Черенкова. Наличие δ-функции в (8) означает, что в рассматриваемой системе излучение формируется на частотах, кратных Ω. В данном направлении (определяемом углами θ, φ) излучается набор гармоник, частоты которых

$$\omega_u = \frac{n\Omega}{|1-(u/c)\sqrt{\varepsilon_0(\omega)}\cos\theta|} \quad (n=1, 2, \ldots) \tag{9}$$

сдвинуты в соответствии с эффектом Доплера. Слагаемые с $m<0$ в (8) соответствуют области нормального эффекта Доплера $(u<c/\sqrt{\varepsilon_0(\omega)})$, а слагаемые с $m>0$ — аномального эффекта Доплера $(u>c/\sqrt{\varepsilon_0(\omega)})$.

Отметим также, что вперед (вдоль оси z) излучение не генерируется, так как при $\theta=0$ мощность (8) равна нулю.

Из (8) интегрированием по θ можно получить спектр излучения

$$\frac{W(\omega)}{T}\,d\omega = \frac{\pi^2c^2\Delta\varepsilon^2\sigma^2(1+(2\pi R/h)^2)}{\alpha^2\,\varepsilon_0^2(0)\,\varepsilon_0^2(\omega)\,u^2}\,\frac{\omega d\omega}{\mathrm{sh}^2(\pi\omega/\alpha u)}\times$$

$$\times\sum_{m=M_1}^{M_2} J_m^2\left(\frac{2\pi R}{h}\sqrt{\left(\frac{\omega}{\Omega_0}\right)^2-\left(m+\frac{\omega}{\Omega}\right)^2}\right)\frac{\omega^2-(m\Omega_0+B\omega)^2}{[\omega(1-B^2)+2mB\Omega_0]^2}, \tag{10}$$

где $B\equiv c/u\sqrt{\varepsilon_0(\omega)}$. Пределы суммирования M_1, M_2 в (10) определяются как ближайшие целые числа, удовлетворяющие соответственно неравенствам

$$M_1 \geqslant -\frac{\omega}{\Omega}-\frac{\omega_0}{\Omega_0},\quad M_2 \leqslant -\frac{\omega}{\Omega}+\frac{\omega}{\Omega_0} \tag{11}$$

(отметим, что $\Omega_0=\Omega_0(\omega)$ из-за наличия частотной дисперсии $\varepsilon_0(\omega)$).

Условия (11) позволяют качественно проанализировать спектр (10). Мощность излучения в единицу времени на данной частоте отлична от нуля, если существует хотя бы одно целое число M, удовлетворяющее (11). Если же таких чисел нет, то интенсивность излучения на данной частоте равна нулю. Для простоты в дальнейшем при анализе спектра предполагаем отсутствие дисперсии, $\varepsilon_0(\omega)=\mathrm{const}$.

Для досветовых скоростей движения границы $(u<c/\sqrt{\varepsilon_0})$ спектр ограничен снизу частотой

$$\omega_{\text{гр}}=\Omega(1+u\sqrt{\varepsilon_0}/c)^{-1}, \tag{12}$$

т. е. частотой первой гармоники, излучаемой «назад». При этом вплоть до частоты $\omega=\Omega_0/2\equiv\pi c/h\sqrt{\varepsilon_0}$ спектр имеет полосатый характер, обусловленный тем, что при малых частотах $\omega=h\Omega$ доплеровский сдвиг, пропорциональный ω, недостаточен для того, чтобы перекрыть весь интервал между соседними гармониками, равный Ω (точнее, в этом перекрытии участвуют обе гармоники, образующие указанный интервал). Поэтому на частотах, лежащих в некоторой окрестности точек $\omega=(h+1/2)\Omega$ $(h=0, 1, 2, \ldots)$ при малых h ничего не излучается. Начиная с частоты $\omega=\Omega_0/2$, спектр непрерывен.

Если $u>c/\sqrt{\varepsilon_0}$, то благодаря черенковскому эффекту излучаются волны с любой частотой (слагаемое с $m=0$ в (8), (10)).

В случае резкой границы ($\alpha \to \infty$) (10) принимает вид

$$\frac{W(\omega)}{T} d\omega = \frac{\sigma^2 c^2 \Delta\varepsilon^2}{\varepsilon_0^4} (1 + (2\pi R/h)^2) \frac{d\omega}{\omega} \times$$
$$\times \sum_{m=M_1}^{M_2} J_m^2 \left(\frac{2\pi R}{h} \sqrt{\left(\frac{\omega}{\Omega_0}\right)^2 - \left(m + \frac{\omega}{\Omega}\right)^2} \right) \frac{\omega^2 - (m\Omega_0 + B\omega)^2}{[\omega(1 - B^2) + 2mB\Omega_0]^2}. \tag{13}$$

Выражение (13) анализировалось численно как функция частоты. Было обнаружено, что спектр рассматриваемого излучения имеет сходство со спектром ондуляторного излучения движущейся заряженной частицы. В частности, $W(\omega)$ достигает максимума

1) при $u = 0{,}09\, c/\sqrt{\varepsilon_0}$, $2\pi R/h = \sqrt{99}$, $u_0 = u\sqrt{1 + (2\pi R/h)^2} = 0{,}9\, c/\sqrt{\varepsilon_0}$ (скорость движения точки пересечения границы и нити) — для $\omega \cong 0{,}93\Omega$;

2) при $u = 0{,}9\, c/\sqrt{\varepsilon_0}$, $2\pi R/h = \sqrt{0{,}21}$, $u_0 = 0{,}99\, c/\sqrt{\varepsilon_0}$ — для $\omega \cong 3{,}5\Omega$;

3) при $u \cong 0{,}91\, c/\sqrt{\varepsilon_0}$, $2\pi R/h = \sqrt{0{,}21}$, $u_0 = 0{,}999\, c/\sqrt{\varepsilon_0}$ — для $\omega \cong 3{,}7\Omega$;

4) при $u = 0{,}9\, c/\sqrt{\varepsilon_0}$, $2\pi R/h = 0{,}000001$, $u_0 \cong 0{,}99\, c/\sqrt{\varepsilon_0}$ — для $\omega \cong 73\Omega$. Сдвиг максимума спектра в область высоких частот (гармоник с большим номером) определяется эффектом Доплера.

2. Излучение нити синусоидальной формы. В данном разделе источником электрического поля служит тонкая равномерно заряженная с плотностью заряда σ нить, имеющая форму бесконечной синусоиды с амплитудой A и периодом $2\pi/k_0$, расположенной в плоскости xz вдоль оси z. Плотность заряда в этом случае имеет вид

$$\rho(\boldsymbol{r}, t) = \sigma\sqrt{1 + A^2 k_0^2 \sin^2 k_0 z}\; \delta(y)\, \delta(x - A\cos k_0 z). \tag{14}$$

Пусть $Ak_0 \ll 1$ (синусоида «пологая»), тогда

$$\rho(\boldsymbol{k}, \omega) = \frac{\sigma}{(2\pi)^2} \delta(\omega) \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(-k_x A)\, \delta(k_z - mk_0). \tag{15}$$

Выражение (15) полностью совпадает с выражением (4) для фурье-образа плотности заряда спиральной нити, если опустить в последнем множитель $\sqrt{1 + (2\pi R/h)^2}$ и положить $R = A\cos\varphi$, $2\pi/h = k_0$, $\varphi_0 = 0$. Поэтому рассуждения, предшествующие в разд. 1 формуле (8), справедливы и в настоящем случае, а сама формула (8) в обозначениях данного раздела принимает вид

$$\frac{W(\omega, \theta, \varphi)}{T} d\omega d\theta d\varphi = \frac{\pi\Delta\varepsilon^2 \sigma^2 c}{2\alpha^2 u^2 \varepsilon_0^{3/2}(\omega)\, \varepsilon_0^2(0)} \frac{\omega^6 \sin^3\theta}{\operatorname{sh}^2(\pi\omega/\alpha u)} d\omega d\theta d\varphi \times$$
$$\times \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m^2 \left(\frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0(\omega)}\, A \sin\theta\cos\varphi \right) \frac{\delta\{\omega[1 - (u/c)\sqrt{\varepsilon_0(\omega)}\cos\theta] + m\Omega\}}{(\omega^2\sin^2\theta + m^2\Omega_0^2)^2}, \tag{16}$$

где частоты $\Omega \equiv k_0 u$, $\Omega_0 \equiv k_0 c/\sqrt{\varepsilon_0(\omega)}$ имеют смысл, вполне аналогичный тому, который они имели в разд. 1. Качественное отличие излучения, описываемого формулой (16), от излучения, интенсивность которого выражается формулой (8), заключается в зависимости W от φ, которая очевидна ввиду отсутствия в данной задаче цилиндрической симметрии. Зависимости же $W(\omega)$ и $W(u)$ для синусоидальной нити и спиральной идентичны. Этим объясняется отмеченное в разд. 1

сходство между излучением спиральной нити и «ондулятора», рассмотренного в [5].

Таким образом, для распределения интенсивности по частоте и азимутальному углу φ, используя аналогию со случаем 1), получаем выражение

$$\frac{W(\omega, \varphi)}{T}\, d\omega d\varphi = \frac{\pi \Delta\varepsilon^2 \sigma^2 c^2}{2\alpha^2 \varepsilon_0^2(0)\, \varepsilon_0^2(\omega)\, u^2}\, \frac{\omega d\omega\, d\varphi}{\mathrm{sh}^2(\pi\omega/\alpha u)} \times$$

$$\times \sum_{m=M_1}^{M_2} J_m^2 \left(Ak_0 \cos\varphi \sqrt{\left(\frac{\omega}{\Omega_0}\right)^2 - \left(m + \frac{\omega}{\Omega}\right)^2} \right) \frac{\omega^2 - (m\Omega_0 + B\omega)^2}{[\omega(1 - B^2) + 2mB\Omega_0]^2}, \tag{17}$$

которое отличается от (10) только коэффициентом, наличием зависимости от φ и смыслом некоторых обозначений. Поэтому для спектра излучения остаются справедливы все выводы, сделанные в разд. 1. Зависимость от φ в (16), (17) приводит лишь к неравномерности распределения интенсивности излучения по различным азимутальным направлениям. Так, например, если $u < c/\sqrt{\varepsilon_0(\omega)}$, т. е. не выполнено условие черенковского излучения (слагаемое с $m=0$ в (16) обращается в нуль, $M_1, M_2 < 0$), то в направлениях, лежащих в плоскости yz ($\cos\varphi = 0$), излучение не генерируется.

В заключение отметим, что возможность экспериментального получения быстро ($u \simeq c$) движущихся границ раздела показана в [6].

Авторы признательны за интерес к работе и полезное обсуждение полученных результатов Б. М. Болотовскому, В. И. Григорьеву и С. Н. Столярову.

ЛИТЕРАТУРА

1. Давыдов В. А., Колесов В. В. — Изв. вузов — Радиофизика, 1982, **25**, № 7, с. 815.
2. Давыдов В. А. — ЖЭТФ, 1981, **80**, с. 859.
3. Гинзбург В. Л., Цытович В. Н. Переходное излучение и переходное рассеяние. — М.: Наука, 1984.
4. Гинзбург В. Л. Теоретическая физика и астрофизика. — М.: Наука, 1975.
5. Манева Г. М. — Изв. вузов — Радиофизика, 1977, **20**, № 10, с. 1577.
6. Аскарьян Г. А., Манзон Б. М. — Письма в ЖЭТФ, 1980, **31**, вып. 5, с. 283.

Московский государственный университет

Поступила в редакцию 21 ноября 1984 г.

THE RADIATION GENERATED BY SOURCES OF SYNCHROTRON AND UNDULATOR TYPES IN MEDIA WITH TRAVELLING PARAMETER

V. A. Davydov, V. V. Kolesov

The radiation of charged filament when passing by diffuse boundary between two media is considered for cases of filament having a shape of the helical lyne or sinusoid. The expressions for spectral and angular distributions are calculated. The spectrum of radiation is analysed in detail. For the relativistic boundaries it is shown that the maximum of spectrum lies in a high-frequency region.