

УДК 537.226.2

ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ГРАНИЦЕ ДВУХ СРЕД

И. В. Боровский, Н. А. Хижняк

Методом интегральных уравнений макроскопической электродинамики решена ключевая задача дифракции плоской H -поляризованной волны на периодической границе двух немагнитных изотропных диэлектриков. Получены строгие аналитические выражения для компонент рассеянного поля. На основе ключевой задачи решены задачи дифракции плоской волны на диэлектрической гребенке и решетке из прямоугольных брусьев. Найдены компоненты прошедших и отраженных полей указанной решетки. Приводится сравнение аналитических и численных результатов с известными.

Одним из наиболее эффективных методов расчета дифракционных полей на периодических диэлектрических структурах является численно-аналитический метод [1,2], который позволяет получить аналитические выражения для рассеянных полей лишь в длинноволновом приближении. Целью данной статьи является получение точных выражений для рассеянных полей на таких структурах при произвольном отношении длины волны и периода структуры.

1. Ключевой задачей изучаемого вопроса является задача о дифракции плоской электромагнитной H -поляризованной волны на периодической границе двух изотропных немагнитных сред. На рис. 1 изображена граница этих сред. В выбранной системе координат она описывается функцией $z = \varphi(x)$. Рассматриваемая граница не исключает

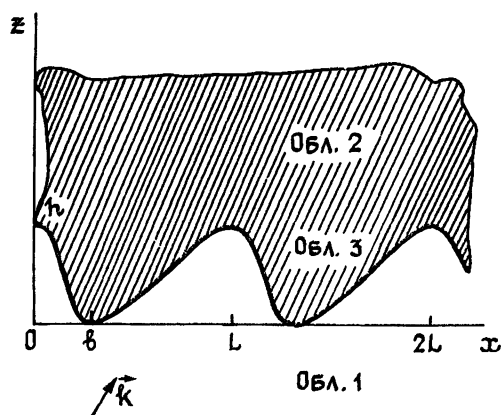


Рис. 1.

наличия ребер (рис. 2). Диэлектрическая проницаемость среды ниже границы равна 1, выше — ϵ . Все пространство разделим на три двумерные области, однородные вдоль оси y : область 1 ($z \leq 0$), область 2 ($z \geq h$), область 3 ($0 \leq z \leq h$) — собственно решетка. Введем обратную функцию $x = \varphi^{-1}(z)$ и зададим ее следующими условиями:

если $x \in [0, b]$, то $x = \varphi_1^{-1}(z)$ при $z \in [0, h]$ и $x = 0$ при $z \in [h, \infty)$;

если $x \in [b, L]$, то $x = \varphi_2^{-1}(z)$ при $z \in [0, h]$ и $x = L$ при $z \in [h, \infty)$.

Тогда функция $f(z)$, определяемая выражением

$$f(z) = \begin{cases} \varphi_2^{-1}(z) - \varphi_1^{-1}(z) & \text{при } 0 \leq z \leq h \\ L & \text{при } z > h \end{cases}, \quad (1)$$

в пределах собственно решетки описывает ширину ее элемента, а выше решетки равна периоду дифракционной структуры.

Поля во всех указанных областях удовлетворяют интегральным выражениям [3]

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) + \frac{\epsilon - 1}{4\pi} (\text{grad div} + k^2) \int_V \mathbf{E}(\mathbf{r}') g(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) d\mathbf{r}'; \quad (2)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}_0(\mathbf{r}) + \frac{\epsilon - 1}{4\pi} \int_V \mathbf{E}(\mathbf{r}') g(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) d\mathbf{r}', \quad (3)$$

где \mathbf{E}_0 и \mathbf{H}_0 — падающие электрические и магнитные поля, g — функция Грина для свободного пространства. Интегрирование ведется по всему объему V диэлектрического полупространства. Вектор падающего поля \mathbf{k} имеет две компоненты $-k_x$ и k_z .

Соотношения (2) и (3) являются интегральными уравнениями для компонентов полей внутри рассеивающей среды, но выражениями для внешних рассеянных полей, описываемых интегральными слагаемыми.

Обратимся к рассеянным полям. С учетом геометрии рассеивающей среды, плоского характера падающего поля и теоремы Флоке условие квазипериодичности полей имеет вид

$$E_{x,z}(x+nL, z) = \exp(i\psi_s nL) E_{x,z}(x, z), \quad x \in [0, L], \quad (4)$$

где $\psi_s = \psi + (2\pi/L)s$, $\psi = k \sin \varphi$, φ — угол падения волны, s задано на множестве целых чисел. Используя (4) и выполняя преобразования в выражении (2) с учетом дискретного спектра рассеянного поля, получим выражения для компонент рассеянного поля:

$$E_x(x, z) = (1/2)(\epsilon - 1)i \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ix\psi_s)}{\sqrt{k^2 - \psi_s^2}} \times \\ \times \left[(k^2 - \psi_s^2) \int_0^{\infty} \exp(i|z - z'| \sqrt{k^2 - \psi_s^2}) C_{1x}(\psi_s, z') dz' + i\psi_s \frac{d}{dz} \times \right. \\ \left. \times \int_0^{\infty} \exp(i|z - z'| \sqrt{k^2 - \psi_s^2}) C_{1z}(\psi_s, z') dz' \right], \quad (5)$$

$$E_z(x, z) = (1/2)(\epsilon - 1)i \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ix\psi_s)}{\sqrt{k^2 - \psi_s^2}} \times \\ \times \left[\left(k^2 + \frac{d^2}{dz^2} \right) \int_0^{\infty} \exp(i|z - z'| \sqrt{k^2 - \psi_s^2}) C_{1z}(\psi_s, z') dz' + i\psi_s \frac{d}{dz} \times \right. \\ \left. \times \int_0^{\infty} \exp(i|z - z'| \sqrt{k^2 - \psi_s^2}) C_{1x}(\psi_s, z') dz' \right];$$

$$H_y(x, z) = \frac{i}{k} \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right), \quad (6)$$

где

$$C_{1x}(\psi_s, z) = \frac{1}{L} \int_{\varphi_1^{-1}(z)}^{\varphi_2^{-1}(z)} E_{x,z}(\tau', z') e^{-i\tau'\psi_s} d\tau'. \quad (7)$$

При интегрировании использовались следующие представления функции Ханкеля $H_0^{(1)}(k|\rho - \rho'|)$:

$$H_0^{(1)}(k|\rho - \rho') = \pi^{-1} \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega (k^2 - \omega^2)^{-1/2} \exp \{i\omega(x-x') + \\ + i|z-z'| (k^2 - \omega^2)^{1/2}\}, z \neq z' \text{ в обл. 2;} \\ \int_{-\infty}^{\infty} d\omega (k^2 - \omega^2)^{-1/2} \exp \{i\omega(z-z') + \\ + i|x-x'| (k^2 - \omega^2)^{1/2}\}, x \neq x' \text{ в обл. 3.} \end{cases}$$

Таким образом, чтобы получить выражения для полей, рассеянных периодической границей двух сред, достаточно найти линейные функционалы $C_{1x,z}(\psi_s, z)$ этих полей, связывающие соответствующие компоненты внутренних полей и свойства границы двух сред на ее одном периоде L . Для этого рассмотрим систему интегральных уравнений относительно E_x и E_z , полученную из (2):

$$\begin{aligned} E_x(x, z) &= E_{0x}(x, z) + \\ &+ \frac{\epsilon - 1}{4} i \left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) T_x(x, z) + \frac{\epsilon - 1}{4} i \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} T_z(x, z), \\ E_z(x, z) &= E_{0z}(x, z) + \\ &+ \frac{\epsilon - 1}{4} i \left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) T_z(x, z) + \frac{\epsilon - 1}{4} i \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} T_x(x, z), \end{aligned} \quad (8)$$

где $T_{x,z}(x, z) = \int_S E_{x,z}(x', z') H_0^{(1)}(k\sqrt{(x-x')^2 + (z-z')^2}) ds'$. Интегрирование ведется в плоскости $X'OZ'$ по нормальному сечению S' всего рассеятеля. Интеграл $T_{x,z}$ сходится во всех точках области S' , что обеспечивается слабой расходимостью функции $H_0^{(1)}(k|\rho - \rho')$ в окрестности точки $\rho' = \rho$. Окружим точку $\rho' = \rho$ контуром l_1 , охватывающим достаточно малую область S_1 , такую что в ней выполняется равенство $H_0^{(1)}(k|\rho - \rho') \simeq 2i\pi^{-1} \ln k|\rho - \rho'|$. Тогда в оставшейся области интегрирования $S' \setminus S_1$ функция $H_0^{(1)}(k|\rho - \rho')$ существует в каждой ее точке. И операторы дифференцирования и интегрирования в системе уравнений (8) можно менять местами. В области S_1 непосредственными вычислениями можно убедиться, что

$$\frac{\partial}{\partial r} T_{x,z}^{(1)}(x, z) = \int_{S_1} E_{x,z}(x', z') \frac{\partial}{\partial r} H_0^{(1)}(k|\rho - \rho') dx' dz'; \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} T_{x,z}^{(1)}(x, z) \neq \int_{S_1} E_{x,z}(x', z') \frac{\partial^2}{\partial r^2} H_0^{(1)}(k|\rho - \rho') dx' dz', \quad (10)$$

где r есть либо x , либо z , а $T_{xz}^{(1)}$ обозначает $\int_{S_1} E_{x,z} H_0^{(1)} ds'$. Правая часть выражения (10) расходится, поэтому перестановка указанных операторов невозможна в области S_1 .

Однако если интегрирование в области S_1 проводить в смысле главного значения [4], то рассматриваемая здесь перестановка возможна. Для этого с помощью интегральной теоремы Грина переходим от интегрирования по области S_1 к интегрированию по замкнутому контуру l_1 , не содержащему сингулярности. Контур l_1 при этом стягиваем к точке $\rho' = \rho$ так, чтобы $S_1 \rightarrow 0$. В результате получим

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} \int_{S_1} E_{x,z}(x', z') H_0^{(1)}(k|\rho - \rho') ds' =$$

$$= \frac{2i}{\pi} \left[E_{x,z} \int_{l_1} \frac{R'(\varphi) \sin\varphi \cos\varphi}{R(\varphi)} d\varphi + \pi E_{x,z}(x, z) \right], \quad (11)$$

где $R(\varphi) = |\rho - \rho'|$ в полярной системе координат с центром в точке $\rho' = \rho$, $R'(\varphi) = (\partial/\partial\varphi)R(\varphi)$. Первое интегральное слагаемое в (11) зависит от формы контура l_1 . Если выбрать для внутренних точек рассеивающей среды представление

$$H_0^{(1)}(k|\rho - \rho'|) = \quad (12)$$

$$= \pi^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} (k^2 - \omega^2)^{-1/2} \exp\{i\omega(x-x') + i|z-z'|\sqrt{k^2 - \omega^2}\} d\omega, \quad z \neq z',$$

то стягивать контур l_1 к точке $\rho' = \rho$ необходимо так, чтобы $z \neq z'$. Тогда выражение (11) равно нулю, если $r=z$, и равно $4iE_x(x, z)$, если $r=x$.

В [5] также показано, что проблема непрерывности линейных дифференциальных и интегральных операторов в области источника имеет свое окончательное решение только при правильном выборе формы контура l_1 . Однако правила выбора этой формы не указаны. В настоящей работе задача определения формы контура имеет свое естественное разрешение.

Заменяя оператор $k^2 + \partial^2/\partial x^2$ оператором $-\partial^2/\partial z^2$, эквивалентность которых очевидна из равенства

$$\left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) H_0^{(1)}(k|\rho - \rho'|) = 0,$$

систему интегральных уравнений (8) представим в виде

$$\varepsilon E_x(x, z) = E_{0x}(x, z) + (\varepsilon - 1) (4\pi)^{-1} L \times \quad (13)$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega x} \left[2C_x(\omega, z) + i\sqrt{k^2 - \omega^2} P_x(\omega, z) - \frac{\omega}{\sqrt{k^2 - \omega^2}} \frac{\partial}{\partial z} P_z(\omega, z) \right]$$

$$E_z(x, z) = E_{0z}(x, z) + (\varepsilon - 1) (4\pi)^{-1} L \times \quad (14)$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega x} \left[-2C_z(\omega, z) + \frac{i\omega^2}{\sqrt{k^2 - \omega^2}} P_z(\omega, z) - \frac{\omega}{\sqrt{k^2 - \omega^2}} \frac{\partial}{\partial z} P_x(\omega, z) \right],$$

где

$$P_{x,z}(\omega, z) = \int_0^{\infty} C_{x,z}(\omega, z') e^{i|z-z'|\sqrt{k^2 - \omega^2}} dz',$$

$$C_{x,z}(\omega, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{L} \int_{mL + \varphi_1^{-1}(z)}^{mL + \varphi_2^{-1}(z)} dx' e^{-i\omega x'} E_{x,z}(x', z'),$$

$$C_{0x,z}(\omega, z) = E_{0x,z} e^{ik_z z} \sum_m \int_{mL + \varphi_1^{-1}(z)}^{mL + \varphi_2^{-1}(z)} dx' e^{-ix'(k_x - \omega)}.$$

Применив оператор $\sum_m \frac{1}{L} \int_{mL+\varphi_1^{-1}(z)}^{L+} dx \exp(-ixv)$ к обоим уравнениям

(13) и (14), получим систему интегральных уравнений

$$C_x(v, z) [\varepsilon - (\varepsilon - 1)f(z)L^{-1}] = C_{0x}(v, z) + \frac{\varepsilon - 1}{2} \frac{f(z)}{L} \left[\sqrt{k^2 - v^2} iP_x(v, z) - \frac{v}{\sqrt{k^2 - v^2}} \frac{\partial}{\partial z} P_z(v, z) \right]; \quad (15)$$

$$C_z(v, z) [1 + (\varepsilon - 1)f(z)L^{-1}] = C_{0z}(v, z) + \frac{\varepsilon - 1}{2} \frac{f(z)}{L} \frac{v}{\sqrt{k^2 - v^2}} \left[ivP_z(v, z) - \frac{\partial}{\partial z} P_x(v, z) \right], \quad (16)$$

которая алгебраическими преобразованиями приводится к системе двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка относительно

\tilde{C}_x и \tilde{C}_z ($\tilde{C}_{x,z}(v, z) = C_{x,z}(v, z)f(z)L^{-1}$):

$$a_{x1} \frac{d}{dz} \tilde{C}_x + a_{x2} \tilde{C}_x + a_{x3} \tilde{C}_z = -\tilde{C}_{0x}(k^2 - v^2) + iv \frac{d}{dz} \tilde{C}_{0x}; \quad (17)$$

$$a_{z1} \frac{d}{dz} \tilde{C}_z + a_{z2} \tilde{C}_z - \varepsilon \tilde{C}_x = -\tilde{C}_{0z} + iv^{-1} \frac{d}{dz} \tilde{C}_{0z}, \quad (18)$$

где

$$a_{x1} = iv[\varepsilon - (\varepsilon - 1)f(z)L^{-1}], \quad a_{x2} = -iv(\varepsilon - 1)f'(z)L^{-1},$$

$$a_{z1} = iv^{-1}[1 + (\varepsilon - 1)f(z)L^{-1}], \quad a_{z2} = iv^{-1}(\varepsilon - 1)f'(z)L^{-1},$$

$$a_{x3} = -(\varepsilon - 1)k^2f(z)L^{-1} - k^2 + v^2.$$

Решая систему уравнений (17) и (18) относительно $\tilde{C}_x(v, z)$, получим

$$\frac{d^2 \tilde{C}_x}{dz^2} + F_{1x} \frac{d \tilde{C}_x}{dz} + F_{2x} \tilde{C}_x = F_{0x}(v, z), \quad (19)$$

где

$$\tilde{F}_{1x} = \frac{a_{z1}a_{x1}a_{x3} + a_{z1}a_{x2}a_{x3} - a_{z1}a_{x1}a'_{x3} + a_{z2}a_{x1}a_{x3}}{a_{x3}a_{z1}a_{x1}},$$

$$F_{2x} = \frac{a_{z1}a'_{x2}a_{x3} - a_{z1}a_{x2}a'_{x3} + a_{z2}a_{x2}a_{x3} - \varepsilon a_{x3}^2}{a_{x3}a_{z1}a_{x1}}, \quad (20)$$

$$F_{0x} = \frac{\Pi_z a_{x3}^2 - a_{z1}a_{x3}\Pi'_x + \Pi_x(a_{z1}a'_{x3} - a_{z2}a_{x3})}{a_{x3}a_{z1}a_{x1}},$$

$$\Pi_x = -C_{0z}(k^2 - v^2) + ivC'_{0x}, \quad \Pi_z = -C_{0x} + iv^{-1}C'_{0z},$$

дифференцирование по z в выражениях (20) обозначено штрихом.

Общее решение уравнения (19) имеет вид

$$\tilde{C}_x(v, z) = A_2\omega_1(v, z) + A_2\omega_2(v, z) - \tilde{\Omega}_x(v, z), \quad (21)$$

где $\omega_{1,2}(v, z)$ — фундаментальные решения соответствующего однород-

ного уравнения, а $\tilde{\Omega}_x(v, z)$ — его частное решение,

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}_x(v, z) = & \omega_1(v, z) \int_0^z F_{0x}(v, z') \omega_2(v, z') \omega_0^{-1}(v, z') dz' - \\ & - \omega_2(v, z) \int_0^z F_{0x}(v, z') \omega_1(v, z') \omega_0^{-1}(v, z') dz'. \end{aligned} \quad (22)$$

Выражение для $\tilde{C}_z(v, z)$ можно получить, подставив (17) в (21):

$$\tilde{C}_z(v, z) = A_1(v) \omega_{z1}(v, z) + A_2(v) \omega_{z2}(v, z) - \tilde{\Omega}_z(v, z), \quad (23)$$

где

$$\omega_{z1,2}(v, z) = -\frac{a_{x1}}{a_{x3}} \omega'_{1,2}(v, z) - \frac{a_{x2}}{a_{x3}} \omega_{1,2}(v, z), \quad (24)$$

$$\tilde{\Omega}_z = -\frac{\Pi}{a_{x3}} - \frac{a_{x1}}{a_{x3}} \tilde{\Omega}'_x - \frac{a_{x2}}{a_{x3}} \tilde{\Omega}_x.$$

В области 3, где происходит формирование полей, фундаментальные решения ω_1 и ω_2 зависят только от формы границы. Частные решения $\tilde{\Omega}_{x,z}$ зависят также и от вида падающего поля. В области 2 (выше границы) $f(z)L^{-1} = 1$ и фундаментальные решения $\omega_{1,2}$ для любой границы двух сред есть $\exp[\pm i\sqrt{\epsilon k^2 - v^2}(z-h)]$. Однако при построении общего решения (21) уравнения (19), а также выражения (23) для $\tilde{C}_z(v, z)$ необходимо учитывать только $\omega_1 = \exp[i\sqrt{\epsilon k^2 - v^2}(z-h)]$, обеспечивающее в этой области волны с физически реализуемой фазовой скоростью вдоль оси z . Поэтому в области 2 имеем

$$C_x(v, z) = B_1 \exp[i\sqrt{\epsilon k^2 - v^2}(z-h)] + B_3(v) \exp(ik_z z); \quad (25)$$

$$\begin{aligned} C_z(v, z) = & -v(\sqrt{\epsilon k^2 - v^2})^{-1} B_1 \exp[i\sqrt{\epsilon k^2 - v^2}(z-h)] + \\ & + B_4(v) \exp(ik_z z), \end{aligned} \quad (26)$$

где

$$B_3(v) = [C_{0x}(v, z)(\epsilon k_x^2 - v^2) + C_{0z}(v, z)k_z v(\epsilon - 1)] / \epsilon(\epsilon k^2 - v^2 - k_z^2); \quad (27)$$

$$\begin{aligned} B_4(v) = & [C_{0z}(v, z)(\epsilon k^2 - \epsilon v^2 - k_z^2) + \\ & + C_{0x}(v, z)(\epsilon - 1)k_z v] / \epsilon(\epsilon k^2 - v^2 - k_z^2). \end{aligned} \quad (28)$$

Здесь $B_{3,4} \exp(ik_z z)$ — частное решение системы уравнений (17) и (18) в области 2.

Система интегральных уравнений (1) содержит в себе все граничные условия [3]. Уравнения (15) и (16) относительно $C_{x,z}(v, z)$ содержат условия на границах между областями 1, 2, 3. Поэтому для нахождения неизвестных коэффициентов A_1, A_2, B_1 достаточно подставить решения (21), (23), (25), (26), учитывающих связь уравнений (15) и (16), например в интегральное уравнение (15). Тогда и на границах области 3 (при $z=0$ и $z=h$) получим соответственно два линейно независимых уравнения относительно A_1, A_2, B_1 . Третье уравнение получим, рассматривая (15) на нижней границе области 2 (при $z=h$). Таким образом, получим замкнутую линейную неоднородную систему уравнений относительно A_1, A_2, B_1 :

$$\begin{aligned} A_1\{\omega_1(v, 0)\epsilon_1(0) - U_1(v, 0)\} + A_2\{\omega_2(v, 0)\epsilon_1(0) - U_2(v, 0)\} + \\ + B_1 \exp(ih\sqrt{k^2 - v^2}) = \tilde{C}_{0x}'(v, 0) + \tilde{P}_1(v, 0); \end{aligned} \quad (29)$$

$$A_1\{\omega_1(v, h)\varepsilon_1(h) - U_1(v, h)\} + A_2\{\omega_2(v, h)\varepsilon_1(h) - U_2(v, h)\} + \quad (30)$$

$$+ B_1\beta_1 = \tilde{C}_{0x}(v, h) + \tilde{P}_1(v, h);$$

$$- A_1U_1(v, h) - A_2U_2(v, h) + B_1\beta_2 = C_{0x}(v, h) + P_2(v, h), \quad (31)$$

где

$$\varepsilon_1(z) = \varepsilon - (\varepsilon - 1)f(z)L^{-1}, \quad \beta_2 = (\sqrt{\varepsilon k^2 - v^2} + \varepsilon\sqrt{k^2 - v^2})/2\sqrt{\varepsilon k^2 - v^2}, \quad (32)$$

$$U_{1,2}(v, z) = \frac{\varepsilon - 1}{2} i \int_0^h \frac{f(z')}{L} \left[\sqrt{k^2 - v^2} \omega_{1,2}(v, z') + \frac{(\varepsilon - 1)^2 v^2}{\sqrt{k^2 - v^2}} \frac{f(z')}{L} \times \right. \\ \left. \times \frac{\omega_{1,2}(v, z')}{(\varepsilon - 1)k^2 f(z')L^{-1} + k^2 - v^2} \frac{\partial}{\partial z} - \right. \\ \left. - \frac{v^2}{\sqrt{k^2 - v^2}} \frac{\omega'_{1,2}(z')\varepsilon_1(z')}{(\varepsilon - 1)k^2 f(z')L^{-1} + k^2 - v^2} \frac{\partial}{\partial z} \right] \exp(i|z - z'| \sqrt{k^2 - v^2}) dz',$$

$$\tilde{P}_1(v, z) = \varepsilon_1(z)\tilde{\Omega}_x(v, z) - \frac{\varepsilon - 1}{2} i \int_0^h \frac{f(z')}{L} \left[\tilde{\Omega}_x(v, z') \sqrt{k^2 - v^2} - \right. \\ \left. - \frac{v}{\sqrt{k^2 - v^2}} \tilde{\Omega}_z(v, z') \frac{\partial}{\partial z} \right] \exp(i|z - z'| \sqrt{k^2 - v^2}) dz' +$$

$$+ \frac{\varepsilon - 1}{2} i \exp(-iz\sqrt{k^2 - v^2}) \times$$

$$\times \int_h^\infty \exp(iz'\sqrt{k^2 - v^2}) [\sqrt{k^2 - v^2} B_3(v, z') + v B_{3z}(v, z')] dz',$$

$$\beta_1 = \frac{(\varepsilon - 1)(\sqrt{\varepsilon k^2 - v^2} \sqrt{k^2 - v^2} - v^2)}{2\sqrt{\varepsilon k^2 - v^2} (\sqrt{\varepsilon k^2 - v^2} + \sqrt{k^2 - v^2})}.$$

Линейная независимость уравнений (29)–(31) становится очевидной, если принять во внимание, что $U_{1,2}(v, h) \neq \exp(ih\sqrt{k^2 - v^2}) \times \times U_{1,2}(v, 0)$, $\tilde{P}_1(v, h) \neq \exp(ih\sqrt{k^2 - v^2}) \tilde{P}_1(v, 0)$. Поэтому главный определитель этой системы $\Delta_0(v) \neq 0$, а ее решение находим по правилу Крамера:

$$A_1(v) = \frac{\Delta_1(v)}{\Delta_0(v)}, \quad A_2(v) = \frac{\Delta_2(v)}{\Delta_0(v)}, \quad B_1(v) = \frac{\Delta_3(v)}{\Delta_0(v)}.$$

Тем самым функционалы $\tilde{C}_{x,z}(v, z)$ определены в любой внутренней точке диэлектрика. Установив связь между $\tilde{C}_{x,z}(v, z)$ и $\tilde{C}_{1x,z}(v, z)$ из их определений (7) и (14) в виде

$$\tilde{C}_{x,z}(v, z) = \sum_m \exp[imL(\psi_s - v)] \tilde{C}_{1x,z}(v, z)$$

и принимая во внимание, что $\tilde{C}_{0x,z}(v, z) = \tilde{C}_{01x,z}(v, z) \sum_m \exp[imL(k_x - v)]$, а следовательно, $\Delta_{1,2,3}(v) = \sum_m \exp[imL(k_x - v)] \Delta_{11,12,13}(v)$,

$\tilde{\Omega}_{x,z}(v, z) = \sum_m \exp [imL(k_x - v)] \tilde{\Omega}_{1x,z}, \quad F_{0x}(v, z) = \sum_m \exp [imL(k_x - v)] F_{10x}(v, z), \quad A_i = A_{1i} \sum_m \exp [imL(k_x - v)] \quad (i = 1, 2, 3),$ получим искомые функционалы:

$$C_{1x}(\psi_s, z) = f(z)L^{-1}[A_{11}\omega_1(\psi_s, z) + A_{12}\omega_2(\psi_s, z) - \tilde{\Omega}_{1x}(\psi_s, z)]; \quad (33)$$

$$C_{1z}(\psi_s, z) = f(z)L^{-1}[A_{11}\omega_{z1}(\psi_s, z) + \quad (34)$$

$+ A_{12}\omega_{z2}(\psi_s, z) - \tilde{\Omega}_{1z}(\psi_s, z)]$ — в области 3;

$$C_{1x}(\psi_s, z) = B_{11}(\psi_s) \exp [i(z-h) \sqrt{\epsilon k^2 - \psi_s^2}] + B_{13}(\psi_s) \exp (ik_z z); \quad (35)$$

$$C_{1z}(\psi_s, z) = -\psi_s (\sqrt{\epsilon k^2 - \psi_s^2})^{-1} B_{11}(\psi_s) \exp [i(z-h) \sqrt{\epsilon k^2 - \psi_s^2}] + \quad (36)$$

$+ B_{13}(\psi_s) \exp (ik_z z)$ — в области 2.

Выражения (5) и (6) совместно с (33)—(36) определяют поле, отраженное периодической границей двух сред. Уходящие от границы однородные дифракционные волны задаются на ограниченном множестве S_0 целых значений, определяемых условием $\epsilon k^2 - \psi_s^2 \geq 0$.

Если $f(z)$ не задана конкретным выражением, то возможна лишь такая оценка поведения амплитуд поля для больших значений s , которые позволяют очертить лишь самые широкие границы их приемлемого поведения. Условие ограниченности энергии рассеянного поля в любом конечном объеме пространства обеспечивает принадлежность амплитуд поля пространству \tilde{l}_2 бесконечных последовательностей $\{x_n\}$, задаваемых условием [1]

$$\sum_{s=-\infty}^{\infty} |x_s|^2 (1 + |s|) < \infty. \quad (37)$$

Это условие в конечном итоге определяет выбор фундаментальных решений ω_1 и ω_2 . Асимптотики $\omega_1(s, z)$ и $\omega_2(s, z)$ устанавливаем из (19) и (20): $\omega_1(s, z) \sim \exp(-\alpha z s)$, $\omega_2(s, z) \sim \exp[-\alpha(z-h)s]$, где α — функция, связывающая ϵ с геометрией границы и длиной волны λ . Конкретный вид ее устанавливается из (19) и (20). Опуская громоздкие вычисления, находим, что сходимость ряда компонент электрического поля не хуже чем $\exp(-\alpha z s)s^{-1}$, для магнитного — $\exp(-\alpha z s)s^{-2}$. При этом условие (37) удовлетворяется. Исследование поля в окрестности ребер эквивалентно исследованию поля при больших значениях s . Поэтому в окрестности ребер поведение амплитуд полей также подчиняется условию (37). Уточненную сходимость полей возможно получить лишь для конкретного выражения $f(z)$. Полагая нецелесообразным последующий анализ рассеянного поля в общем случае, остановимся на двух конкретных задачах.

2. Диэлектрическая гребенка (рис. 2) состоит из собственно решетки (область 3) и полупространства изотропного диэлектрика (область 2). В случае, когда диэлектрическая проницаемость области 2 равна 1, диэлектрическая гребенка выражается в решетку из прямоугольных диэлектрических брусев. Поэтому диэлектрическую гребенку можно рассматривать как совмещение решетки с диэлектрическим полупространством. Для обеих рассматриваемых структур в области 3 $f(z) = L - b = \text{const}$. Поэтому фундаментальные решения $\omega_1(v, z)$ и $\omega_2(v, z)$ уравнения (19) в этой области для решетки и гребенки одни и те же:

$$\omega_1(v, z) = \exp [ik_3(v)z], \quad \omega_2(v, z) = \exp [-ik_3(v)(z-h)], \quad (38)$$

а коэффициенты уравнения (19) имеют вид

$$\tilde{F}_{1x}=0, \quad \tilde{F}_{2x}=k_3^2(v) = (\varepsilon_z/\varepsilon_x)(\varepsilon_x k^2 - v^2), \quad (39)$$

$$\tilde{F}_{0x}(v, z) = (\varepsilon_z/\varepsilon_x) [\tilde{C}_{0x}(v, z)(\varepsilon_x k_x^2 - v^2) + \tilde{C}_{0z}(\varepsilon_x - 1)k_z v].$$

Частное решение уравнения (19) для фундаментальных решений (38) удобно находить непосредственно по виду $\tilde{F}_{0x}(v, z) \equiv \tilde{F}_{0x}(v) \exp(ik_z z)$.

$$\tilde{\Omega}_x(v, z) = - [k_3^2(v) - k_x^2] \tilde{F}_{0x}(v) \exp(ik_z z).$$

Поэтому выражение (21) в данном случае имеет вид

$$\tilde{C}_x(v, z) = A_1(v) \exp(ik_3 z) + \quad (40)$$

$$+ A_2(v) \exp[-ik_3(z-h)] + \tilde{F}_{0x}(v) \exp(ik_z z) / (k_3^2 - k_x^2).$$

На основании выражений (23) и (24) получим

$$\tilde{C}_z(v, z) = - (v\varepsilon/k_3\varepsilon_x) A_1(v) \exp(ik_3 z) + \quad (41)$$

$$+ (v\varepsilon/k_3\varepsilon_x) A_2(v) \exp[-ik_3(z-h)] - \tilde{\Omega}_z(v, z),$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}_z(v, z) = & - \{ \tilde{C}_{0z}(v) [\varepsilon_z(k^2 - v^2) - k_z^2] + \tilde{C}_{0x}(v) \times \\ & \times k_z v (\varepsilon_z - 1) \} \exp(ik_z z) / \varepsilon_x (k_3^2 - k_x^2). \end{aligned}$$

Для решетки достаточно определить коэффициенты A_1 и A_2 из системы двух линейных неоднородных уравнений (29) и (30). Для гребенки необходимо найти также выражения (35) и (36) функционалов $\tilde{C}_{1x}(\psi_s, z)$ и $\tilde{C}_{1z}(\psi_s, z)$ в области 2.

Остановимся подробно на решетке из прямоугольных диэлектрических брусьев. Коэффициенты A_1 и A_2 находим из системы двух линейных уравнений (29) и (30). Выражения (33) и (34) совместно с (39) — (41) определяют искомые

функционалы $\tilde{C}_{1x}(\psi_s, z)$ и $\tilde{C}_{1z}(\psi_s, z)$ внутри элемента собственно решетки. Для нахождения поля, прошедшего решетку, необходимо в выражениях (5) и (6) положить $|z - z'| = z - z'$, а интегрирование по z' ограничить толщиной решетки h . Тогда магнитная компонента прошедшего поля, согласно (6), имеет вид

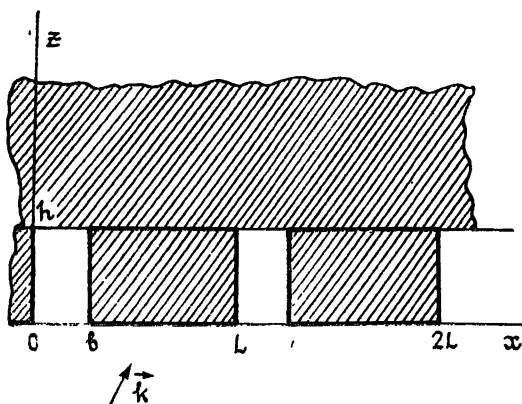


Рис. 2.

$$H_y(x, z) = \frac{\varepsilon_x - 1}{2} \frac{L - b}{L} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ix\psi_s + iz\sqrt{k^2 - \psi_s^2})}{\sqrt{k^2 - \psi_s^2}} \times \quad (42)$$

$$\times \left\{ \frac{1 - \exp[ih(k_3 - \sqrt{k^2 - \psi_s^2})]}{k_3 - \sqrt{k^2 - \psi_s^2}} \left(\sqrt{k^2 - \psi_s^2} + \frac{\psi_s^2 \varepsilon}{\varepsilon_x k_3} \right) \frac{\Delta_{11}(\psi_s)}{\Delta_0(\psi_s)} + \right.$$

$$+ e^{ik_3 h} \frac{1 - \exp[-ih(k_3 + \sqrt{k^2 - \psi_s^2})]}{k_3 + \sqrt{k^2 - \psi_s^2}} \left(-\sqrt{k^2 - \psi_s^2} + \frac{\psi_s^2 \varepsilon}{\varepsilon_x k_3} \right) \frac{\Delta_{12}(\psi_s)}{\Delta_0(\psi_s)} \Big\}.$$

Ввиду громоздкости выражения для Δ_{11}/Δ_0 и Δ_{21}/Δ_0 здесь не приводим. Способ их получения, как и каждого элемента определителей, очевиден из системы уравнений (29), (30).

Остановимся на анализе выражения (42), которое представляет собой совокупность однородных и неоднородных полей в виде разложения в ряд по пространственным гармоникам. Исследуем сходимость этого ряда. При $s \rightarrow \infty$ порядки сходимости соответствующих величин следующие: $k_3(\psi_s) \sim s$, $\Delta_{11}(\psi_s) \sim s^{-1}$, $\Delta_{21}(\psi_s) \sim s^{-1}$, $\Delta_0(\psi_s) \sim s^0$. Тогда порядок сходимости выражения (42) представляется величиной $\exp(-hs)s^{-2}$.

Выражения для электрических компонент прошедшего поля имеют вид

$$E_x = -\frac{\varepsilon_x - 1}{2} \frac{L - b}{L} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \exp(ix\psi_s + iz\sqrt{k^2 - \psi_s^2}) R_s, \quad (43)$$

$$E_z = \frac{\varepsilon_x - 1}{2} \frac{L - b}{L} \sum_s \exp(ix\psi_s + iz\sqrt{k^2 - \psi_s^2}) \psi_s R_s (\sqrt{k^2 - \psi_s^2})^{-1},$$

где через R_s обозначено выражение в фигурных скобках формулы (42). Очевидно, что порядки сходимости выражений для E_x и E_z равны $\exp(-hs)s^{-1}$.

Аналогично предыдущему, определив для отраженного поля $|z - z'| = z' - z$ и ограничив интегрирование по z' толщиной решетки h из (5), (6) и (3), получим для отраженного поля следующие выражения:

$$E_x = -\frac{\varepsilon_x - 1}{2} \frac{L - b}{L} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \exp(ix\psi_s - iz\sqrt{k^2 - \psi_s^2}) N_s,$$

$$E_z = \frac{\varepsilon_x - 1}{2} \frac{L - b}{L} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \exp(ix\psi_s - iz\sqrt{k^2 - \psi_s^2}) \psi_s N_s (\sqrt{k^2 - \psi_s^2})^{-1}, \quad (44)$$

$$H_y = -\frac{k(\varepsilon_x - 1)}{2} \frac{L - b}{L} \sum_s \exp(ix\psi_s - iz\sqrt{k^2 - \psi_s^2}) N_s (\sqrt{k^2 - \psi_s^2})^{-1},$$

где

$$N_s = \frac{\exp[ih(k_3 + \sqrt{k^2 - \psi_s^2})] - 1}{k_3 + \sqrt{k^2 - \psi_s^2}} \frac{\Delta_{11}(\psi_s)}{\Delta_0(\psi_s)} \left(\sqrt{k^2 - \psi_s^2} - \frac{\psi_s \varepsilon}{\varepsilon_x k_3} \right) + \\ + \frac{\exp[ih(k_3 + \sqrt{k^2 - \psi_s^2})] - 1}{k_3 + \sqrt{k^2 - \psi_s^2}} \frac{\Delta_{12}}{\Delta_0} \left(\sqrt{k^2 - \psi_s^2} + \frac{\psi_s \varepsilon}{\varepsilon_x k_3} \right).$$

На основании уже выполненных оценок сходимости устанавливаем порядок сходимости компонент отраженного поля: $E_{x,z} \sim \exp(-zs)s^{-1}$, $H_y \sim \exp(-zs)s^{-2}$. В окрестности ребер при $z=h$ и $z=0$ выражения (44) удовлетворяют условию ограниченности энергии электромагнитного поля:

$$\lim_{V \rightarrow 0} \int_V (\varepsilon |E|^2 + |H|^2) dv < \infty. \quad (45)$$

Подставляя в (45) выражения для компонент прошедшего, а затем и отраженного полей и выполняя оценки интегралов в выражении (45) по максимуму модуля, убеждаемся в том, что сходимость полученных рядов не хуже чем s^{-2} . Поэтому условие (45) выполняется.

При $L/\lambda \ll 1$ (длинноволновое приближение) из (37) следует единственное значение $s=0$. Поэтому в этом случае имеем одну прошедшую и одну отраженную плоские волны. Выражение для модуля коэффициента прохождения $|H_y/H_{0y}|$ имеет вид

$$|H_y/H_{0y}| = \frac{2\varepsilon_z \varepsilon k_{30} k_z}{\cos(k_{30}h) k_{30} \varepsilon_z \varepsilon k_z (1 + \sqrt{\varepsilon}) - i \sin(k_{30}h) (\varepsilon k_{30}^2 + \varepsilon_z^2 k_z^2 \sqrt{\varepsilon})}. \quad (46)$$

Это выражение совпадает с полученным в [2, 6] другими методами. Детальный анализ выражения (46) приведен в работе [6]. Зависимость модуля коэффициента прохождения волной решетки от соотношения L/λ при нормальном падении поля, полученная из выражения (42), представлена на рис. 3.

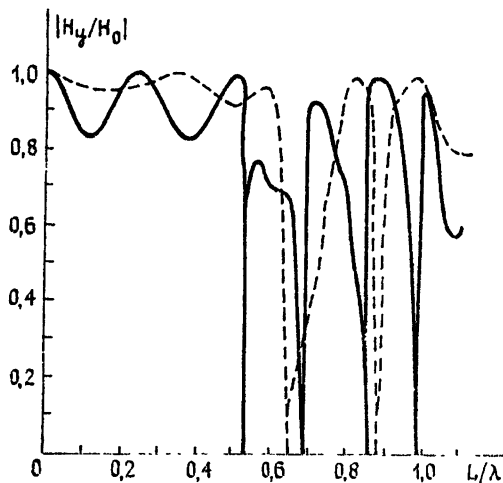


Рис. 3.

Параметры решетки следующие: $\varepsilon=5$, $h/L=0,5$, $b/L=0,1$ — для сплошной линии и $b/L=0,5$ — для прерывистой. Обращают на себя внимание некоторые характерные особенности: с уменьшением расстояния между элементами решетки резонансная область расширяется. Появляются новые резонансы, вызванные, очевидно, возникновением в решетке новых волноводных волн, интерференция которых приводит к вновь возникшим резонансам. Резонансы полного прохождения и полного отражения сближаются. Это значит, что при достаточно малом изменении частоты решетка из полностью отражающей превращается в прозрачную. В длинноволновой части диапазона с уменьшением b/L становится более четкой конусоидальная зависимость $|H_y/H_{0y}|$ от L/λ . При графическом сравнении обсуждаемых здесь результатов с аналогичными, приведенными в [1], наблюдается их совпадение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шестопалов В. П., Литвиненко Л. Н., Масалов С. А., Сологуб В. П. Дифракция волн на решетках. — Харьков: Гос. ун-т, 1973. — 287 с.
2. Масалов С. А., Репа Ю. Т. В кн.: Радиотехника. Респ. межвед. темат. научно-техн. сб. — Харьков: Гос. ун-т, 1972, вып. 20, с. 116.
3. Хижняк Н. А. — ЖТФ, 1958, 28, вып. 7, с. 1592.
4. Тихонов А. Н., Самарский Л. А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1972.
5. Иаджиган А. Д. — ТИИЭР, 1980, 68, № 2, с. 62.
6. Боровский И. В., Хижняк Н. А. — Изв. вузов — Радиофизика, 1983, № 2, с. 231.

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
17 октября 1984 г.

ELECTROMAGNETIC WAVE DIFFRACTION BY PERIODIC BOUNDARY BETWEEN TWO MEDIA

I. V. Borovskij, N. A. Khizhnyak

The key problem of plane H -polarized wave diffraction by the periodic boundary between two nonmagnetic isotropic dielectrics is solved on the basis of macroscopic electrodynamic integral equation method. The analytical solutions for scattering field components are obtained. On the basis of the key problem a problem is solved of plane wave diffraction by a dielectric comb and by a rectangular-bar grating. Comparison is made between the analytical and numerical results and others published elsewhere.