

УДК 621.372.628.09

ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ВЫТЕКАЮЩИХ ВОЛН В МИКРОПОЛОСКОВОЙ ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ

Г. И. Веселов, В. М. Темнов

На основе метода полуобращения интегрального оператора излагается электродинамическая теория вытекающих волн в частично экранированной микрополосковой линии. Выводится дисперсионное уравнение, позволяющее находить комплексные корни для волн дискретного спектра. Для случая узкого полоскового проводника приводятся результаты численных расчетов, которые позволили обнаружить в линии ранее неизвестную вытекающую волну с нулевой частотой отсечки.

Аналізу электродинамічних характеристик відкритої мікрополоскової лінії (ОМПЛ) присвячено значительне число робіт, в подавляючому більшості яких розглядаються тільки поверхнісні хвилі з речовинними фазовими постійними. Весьма нечисленні роботи по дослідженню витекаючих хвиль. Из них следует отметить работу [1], в которой решена ключевая задача дифракции наклонно падающих волн на открытом конце полубесконечного плоского волновода с магнитоэлектрическим слоем и в приближении поперечного резонанса построена теория ОМПЛ, а также работу [2], где изложены элементы теории частично экранированной микрополосковой линии (ЧЭМПЛ), отличающейся от ОМПЛ тем, что в плоскости $y=b$ (рис. 1) помещена электрическая стенка. Некоторые сведения по вытекающим волнам содержатся также в работе [3]. Однако излагаемая в ней теория, справедливая как и в [1] для достаточно широких полосковых проводников, не позволяет исследовать полный спектр волн в ОМПЛ.

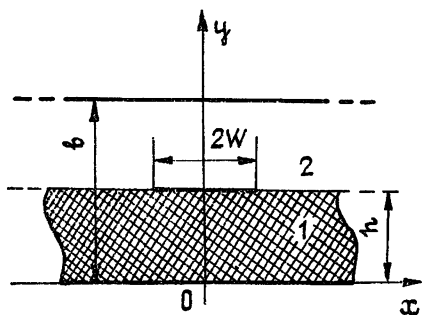


Рис. 1.

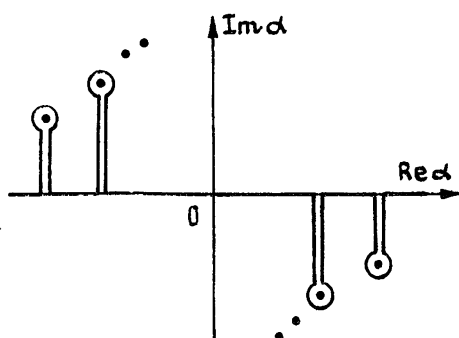


Рис. 2.

В настоящей работе делается попытка построить теорию вытекающих волн в ЧЭМПЛ без ограничений на параметры задачи.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для определенности будем рассматривать только четные волны (в плоскости $x=0$ (рис. 1) выполняется условие магнитной стенки)*.

* Теория нечетных волн строится аналогичным образом.

При анализе будем предполагать, что омические потери в металлических проводниках и диэлектрике отсутствуют, толщина полосковой линии равна нулю, зависимость от времени t и координаты z имеет вид $e^{i(\beta z - \omega t)}$.

Электромагнитное поле в полосковой линии, заполненной двухслойной магнитодиэлектрической средой, может быть выражено через электрическую $\varphi_j(x, y)$ и магнитную $\psi_j(x, y)$ (j — номер слоя) потенциальные функции, удовлетворяющие волновым уравнениям

$$\Delta \varphi_j + (k^2 \varepsilon_j \mu_j - \beta^2) \varphi_j = 0, \quad \Delta \psi_j + (k^2 \varepsilon_j \mu_j - \beta^2) \psi_j = 0,$$

где $\varepsilon_2 = \mu_1 = \mu_2 = 1$, $\varepsilon_1 = \varepsilon$. Δ — двумерный оператор Лапласа, k — волновое число свободного пространства, а также нулевым условиям и условиям непрерывности для компонент поля

$$\begin{aligned} E_{x,z}(x, 0) = E_{x,z}(x, b) = 0, & \quad 0 \leq |x| < \infty, \\ E_{x,z}(x, h-0) = E_{x,z}(x, h+0), & \quad 0 \leq |x| < \infty, \\ E_{x,z}(x, h) = 0, & \quad 0 \leq |x| < W, \\ H_{x,z}(x, h-0) = H_{x,z}(x, h+0), & \quad W < |x| < \infty. \end{aligned}$$

Компоненты электромагнитного поля на ребрах полоскового проводника должны удовлетворять условиям Мейкснера [4].

Поскольку рассматриваемая структура является в направлении оси x открытой, то к приведенным выше условиям следует добавить условия, определяемые асимптотическим поведением полей при $|x| \rightarrow \infty$. Условие излучения Зоммерфельда в его традиционной форме* в данном случае применять нельзя, так как линия является бесконечной в направлении оси z и, следовательно, как источник излучения обладает бесконечной мощностью. Для рассматриваемых вытекающих волн, экспоненциально растущих в поперечном направлении, не существует аналогов условия излучения Зоммерфельда, поскольку показатель роста этих волн при $|x| \rightarrow \infty$ зависит только от волнового числа и структуры поперечного сечения ЧЭМПЛ**. Построению структуры поля вытекающих волн в ЧЭМПЛ, определению их постоянного пространства (и, следовательно, показателя роста) и посвящена настоящая работа. При проведении численных расчетов рассматривался случай узкого полоскового проводника, приводящий, с одной стороны, к упрощению численного алгоритма анализа и, с другой стороны, позволяющий исследовать неизвестные ранее волновые явления в ЧЭМПЛ.

ВЫВОД ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ

Электрическую $\varphi_{1,2}(x, y)$ и магнитную $\psi_{1,2}(x, y)$ потенциальные функции можно представить в виде (см. Приложение)

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(x, y) \\ \psi_1(x, y) \end{vmatrix} = \int_1^2 \begin{vmatrix} A(\alpha) \operatorname{sh} \delta y \\ B(\alpha) \frac{\bar{\beta} \alpha \operatorname{ch} \delta y}{\delta} \end{vmatrix} \frac{e^{i\alpha x} d\alpha}{\operatorname{sh} \delta h},$$

$$\begin{vmatrix} \varphi_2(x, y) \\ \psi_2(x, y) \end{vmatrix} = \int_1^2 \begin{vmatrix} C(\alpha) \operatorname{sh} \delta'(b-y) \\ D(\alpha) \frac{\bar{\beta} \alpha \operatorname{ch} \delta'(b-y)}{\delta'} \end{vmatrix} \frac{e^{i\alpha x} d\alpha}{\operatorname{sh} \delta'(b-h)},$$

* В общепринятом виде условие излучения Зоммерфельда сформулировано, например, в [4].

** Аналогичное явление имеет место также в плоском волноводе с диэлектрическим слоем [5], круглом диэлектрическом волноводе [6] и ряде других открытых структур.

где Γ — контур интегрирования в комплексной плоскости волнового числа α (рис. 2.); $A(\alpha)$, $B(\alpha)$, $C(\alpha)$, $D(\alpha)$ — неизвестные трансформанты Фурье; $\delta = \sqrt{\alpha^2 - \varepsilon k^2 + \beta^2}$, $\delta' = \sqrt{\alpha^2 - k^2 + \beta^2}$, $\bar{\beta} = \beta/k$.

Удовлетворяя граничным условиям при $y=h$, получаем для $A(\alpha)$ и $B(\alpha)$ ($C(\alpha)$ и $D(\alpha)$ исключаются) систему интегральных уравнений вида*

$$\left. \begin{aligned} \int A(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha = 0 \\ \int B(\alpha) \alpha e^{i\alpha x} d\alpha = 0 \end{aligned} \right\}, \quad 0 \leq |x| < W, \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \int [A(\alpha)E(\alpha) - B(\alpha)F(\alpha)] e^{i\alpha x} d\alpha = 0 \\ \int [A(\alpha)P(\alpha) - B(\alpha)Q(\alpha)] \alpha e^{i\alpha x} d\alpha = 0 \end{aligned} \right\}, \quad W < |x| < \infty,$$

где

$$E(\alpha) = \alpha \eta \operatorname{cth} \delta'(b-h)/\delta', \quad F(\alpha) = \alpha \xi \operatorname{cth} bh/\delta + \alpha \operatorname{cth} \delta'(b-h)/\delta',$$

$$P(\alpha) = \xi \delta' \operatorname{cth} \delta'(b-h)/\alpha + \varepsilon \delta \operatorname{cth} \delta h/\alpha - \bar{\beta}^2 \alpha \eta \operatorname{cth} \delta'(b-h)/\delta',$$

$$Q(\alpha) = -\bar{\beta}^2 \alpha [\operatorname{cth} \delta'(b-h)/\delta' + \operatorname{cth} \delta h/\delta],$$

$$\xi = (\varepsilon - \bar{\beta}^2)/(1 - \bar{\beta}^2), \quad \eta = (\varepsilon - 1)/(1 - \bar{\beta}^2).$$

Введем вместо $A(\alpha)$ и $B(\alpha)$ новые коэффициенты в соответствии с формулами

$$X(\alpha) = A(\alpha)E(\alpha) - B(\alpha)F(\alpha), \quad Y(\alpha) = A(\alpha)P(\alpha) - B(\alpha)Q(\alpha).$$

Продифференцировав первое и третье уравнения системы (1) и проведя преобразования, получаем следующую систему интегральных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} X(\alpha) |\alpha| e^{i\alpha x} d\alpha = \int [X(\alpha)a(\alpha) + Y(\alpha)b(\alpha)] \alpha e^{i\alpha x} d\alpha \\ \int_{-\infty}^{\infty} Y(\alpha) |\alpha| e^{i\alpha x} d\alpha = \int [X(\alpha)c(\alpha) + Y(\alpha)d(\alpha)] \alpha e^{i\alpha x} d\alpha \end{aligned} \right\}, \quad 0 \leq |x| < W, \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} X(\alpha) \alpha e^{i\alpha x} d\alpha = 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} Y(\alpha) \alpha e^{i\alpha x} d\alpha = 0 \end{aligned} \right\}, \quad W < |x| < \infty,$$

где

$$a(\alpha) = \operatorname{sign}(\operatorname{Re} \alpha) - [EQ(\alpha) - FP(\alpha)]/M(\alpha),$$

$$b(\alpha) = [EF(\alpha) - FE(\alpha)]/M(\alpha), \quad c(\alpha) = [QP(\alpha) - PQ(\alpha)]/M(\alpha),$$

$$d(\alpha) = \operatorname{sign}(\operatorname{Re} \alpha) - [QE(\alpha) - PF(\alpha)]/M(\alpha),$$

$$M(\alpha) = Q(\alpha)E(\alpha) - F(\alpha)P(\alpha) = -\xi[\varepsilon \operatorname{cth} \delta h + (\delta/\delta') \operatorname{cth} \delta'(b-h)] \times \\ \times [\operatorname{cth} \delta h + (\delta'/\delta) \operatorname{cth} \delta'(b-h)],$$

$$E = \eta, \quad Q = 2\bar{\beta}^2, \quad F = \xi + 1, \quad P = 2\varepsilon.$$

В левых частях уравнений (2) мы совместили контур интегрирования с действительной осью. Эта операция законна, так как функции $X(\alpha)$ и $\alpha Y(\alpha)$ с точностью до постоянных множителей совпадают с трансформантами Фурье поперечного и продольного токов на полосковом проводнике и по теореме Винера—Пэли являются целыми функциями экспоненциального типа.

* В интегралах с опущенными пределами интегрирование производится по контуру Γ .

Применив метод полуобращения интегрального оператора [7], сведем систему (2) к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода

$$X(\alpha) = \int [X(\lambda) a(\lambda) + Y(\lambda) b(\lambda)] V_{\alpha}^{\lambda} d\lambda, \quad (3)$$

$$Y(\alpha) = \int [X(\lambda) c(\lambda) + Y(\lambda) d(\lambda)] V_{\alpha}^{\lambda} d\lambda + \Pi (J_0(\alpha W) / \alpha),$$

где

$$V_{\alpha}^{\lambda} = \frac{2}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} n J_{2n}(\alpha W) J_{2n}(\lambda W),$$

Π — неизвестная постоянная, определяемая из условия эквивалентности системы (3) исходной задаче. С целью нахождения Π выразим $A(\alpha)$ через $X(\alpha)$ и $Y(\alpha)$ и подставим полученное выражение в первое уравнение системы (1). При $x=0$ будем иметь

$$\int \frac{Q(\alpha)X(\alpha) - F(\alpha)Y(\alpha)}{M(\alpha)} d\alpha = 0. \quad (4)$$

Отыскивая решение системы уравнений (3) в виде

$$X(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n (J_{2n}(\alpha W) / \alpha), \quad (5)$$

$$Y(\alpha) = \Pi \frac{J_0(\alpha W)}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \frac{J_{2n}(\alpha W)}{\alpha}$$

(X_n и Y_n — неизвестные коэффициенты) и подставляя выражения (5) в (4), получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n Q_n - \sum_{n=1}^{\infty} Y_n F_n = \Pi F_0, \quad (6)$$

где

$$Q_n = \int \frac{Q(\alpha) J_{2n}(\alpha W)}{\alpha M(\alpha)} d\alpha, \quad F_n = \int \frac{F(\alpha) J_{2n}(\alpha W)}{\alpha M(\alpha)} d\alpha.$$

С учетом (5) сведем систему интегральных уравнений к системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов X_n , Y_n и Π :

$$X_k = \sum_{n=1}^{\infty} X_n A_{nk}^{11} + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n A_{nk}^{12} + \Pi A_{0k}^{12}, \quad (7)$$

$$Y_k = \sum_{n=1}^{\infty} X_n A_{nk}^{21} + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n A_{nk}^{22} + \Pi A_{0k}^{22},$$

где

$$\left\| \begin{array}{cc} A_{nk}^{11} & A_{nk}^{12} \\ A_{nk}^{21} & A_{nk}^{22} \end{array} \right\| = 2k \int \left\| \begin{array}{c} a(\alpha) b(\alpha) \\ c(\alpha) d(\alpha) \end{array} \right\| \frac{J_{2n}(\alpha W) J_{2k}(\alpha W)}{\alpha} d\alpha.$$

Как уже отмечалось, чтобы система (7) была эквивалентна исходной краевой задаче, ее следует дополнить уравнением (6). Можно показать, что определитель системы (6), (7) является нормальным, поэтому при его вычислении правомочно применение метода редукции. Приравнивание определителя нулю дает искомое дисперсионное уравнение.

АНАЛИЗ ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ

Анализ дисперсионного уравнения для случая поверхностных волн, когда контур Γ может быть совмещен с вещественной осью комплексной плоскости α , изложен в работах [8, 9]. Так, в [9] показано, что квази- T -волна при $\epsilon > 1$ является поверхностной во всем частотном диапазоне. В отличие от этой волны поверхностные волны высших типов могут при изменении частоты переходить в вытекающие волны. Это происходит в точках $\bar{\beta}$, соответствующих пересечению дисперсионных зависимостей волны типа TM_0 двухслойного волновода без полоскового проводника и рассматриваемой поверхностной волны.

Учитывая сложность задачи (см. [10]), ограничимся рассмотрением случая узкого полоскового проводника ($\bar{W} = W/h \ll 1$). Устремляя \bar{W} к нулю, замечаем, что все коэффициенты системы уравнений (6), (7) стремятся к нулю за исключением коэффициента F_0 . Таким образом, при малых \bar{W} приближенное дисперсионное уравнение приобретает вид

$$F_0 = 0.$$

Его можно представить в форме

$$\int_0^{\infty} \frac{J_0(\alpha \bar{W}) F(\alpha) d\alpha}{\delta' M(\alpha)} + 2\pi i \sum_{n=1}^N \frac{J_0(\alpha_n \bar{W}) F(\alpha_n)}{\delta'_n M'(\alpha_n)} = 0, \quad (8)$$

где

$$F(\alpha) = \delta' \left[\xi \frac{\text{cth } \delta}{\delta} + \frac{\text{cth } \delta' (\bar{b} - 1)}{\delta'} \right],$$

$$M(\alpha) = \xi \left[\epsilon \frac{\text{cth } \delta}{\delta} + \frac{\text{cth } \delta' (\bar{b} - 1)}{\delta'} \right] [\delta \text{cth } \delta + \delta' \text{cth } \delta' (\bar{b} - 1)],$$

$$\delta = \sqrt{\alpha^2 - \bar{k}^2 (\epsilon - \bar{\beta}^2)}, \quad \delta' = \sqrt{\alpha^2 - \bar{k}^2 (1 - \bar{\beta}^2)},$$

$$\bar{k} = kh, \quad \bar{\beta} = \beta/k, \quad \bar{b} = b/h,$$

α_n — корни уравнения

$$\epsilon \frac{\text{cth } \delta_n}{\delta_n} + \frac{\text{cth } \delta'_n (\bar{b} - 1)}{\delta'_n} = 0,$$

удовлетворяющие условиям $\text{Re } \alpha_n \geq 0$ при $n = 1, 2, \dots, N$;

$$M'(\alpha_n) = -\xi [\delta_n \text{cth } \delta_n + \delta'_n \text{cth } \delta'_n (\bar{b} - 1)] \times \\ \times \left[\frac{\epsilon}{\delta_n^2 \text{sh}^2 \delta_n} + \frac{\epsilon \text{cth } \delta_n}{\delta'_n} + \frac{\bar{b} - 1}{(\delta'_n)^2 \text{sh}^2 \delta'_n (\bar{b} - 1)} + \frac{\text{cth } \delta'_n (\bar{b} - 1)}{(\delta'_n)^3} \right] \alpha_n.$$

В уравнении (8) учтены только волны типа LM_{n-1} , поскольку естественно положить, что волны LE_n ($n = 1, \dots, N$) при узком полосковом проводнике в представлении поля рассматриваемой волны практически отсутствуют. Действительно, волны типа LE_n имеют составляющую магнитного поля, нормальную к плоскости $y = \text{const}$. Однако реально существующее условие магнитной стенки в плоскости $x = 0$, а также малая ширина полоскового проводника не способствуют появлению волн LE -типа.

Несколько замечаний по выбору числа N . Он базируется на феноменологическом аспекте излагаемой теории и заключается в следующем. Исходной является очевидная предпосылка, что при достаточно малом волновом числе в ЧЭМПЛ существует только одна излуча-

емая волна типа LM_0 . С возрастанием частоты (волнового числа) количество излучаемых волн этого типа увеличивается. Каков же процесс появления таких волн? Естественно предположить, что в момент «возникновения» волны LM_{n-1} значение соответствующего вычета в (8) должно быть равно нулю, т. е. вклад новой волны в общее поле должен отсутствовать — при этом не будет нарушаться свойство непрерывности дисперсионных зависимостей. Анализируя выражение для вычета в точке α_n , заключаем, что последнее обращается в нуль, если $M'(\alpha_n) = \infty$. Это происходит тогда, когда волна LM_{n-1} в волноводе с диэлектрическим слоем становится поверхностной. Изложенное проиллюстрировано на рис. 3, где пунктиром нанесены дисперсионные кривые TM_{n-1} -волн плоского волновода ($W=0,125$; $b=1,2$; $\epsilon=9,8$).

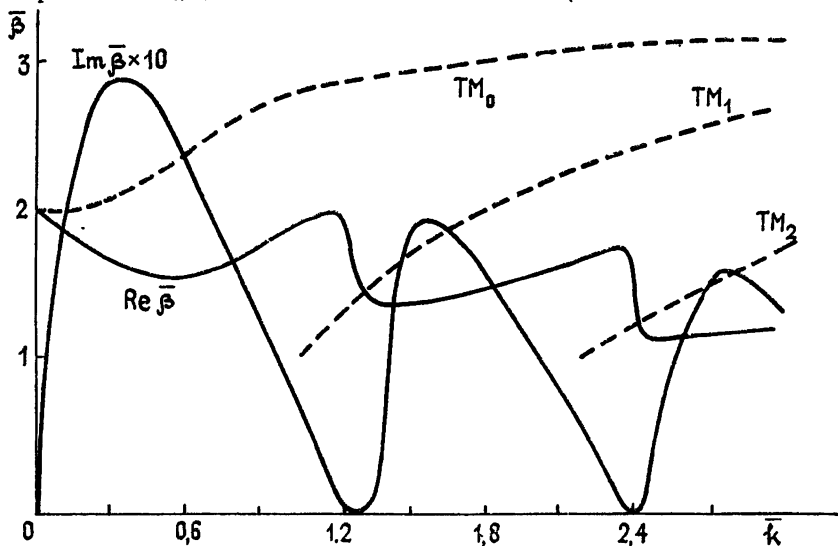


Рис. 3.

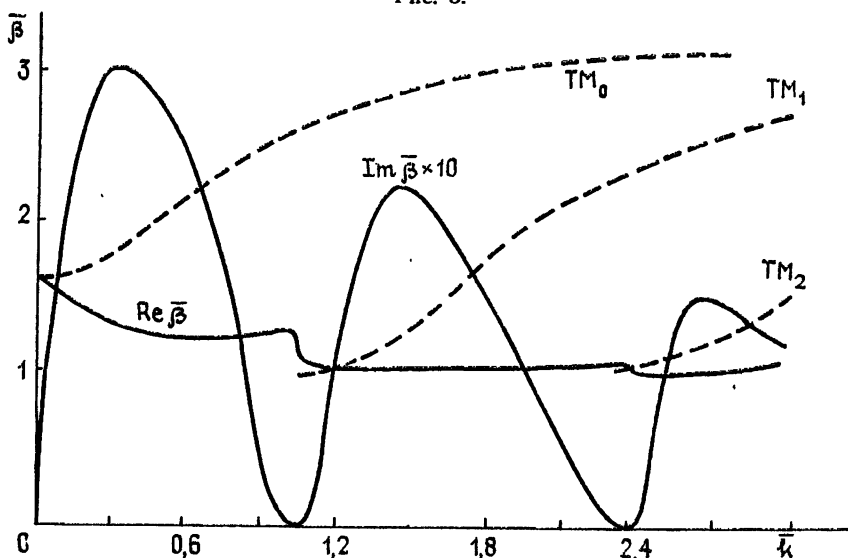


Рис. 4.

Видно, что при $\bar{k}=0$ затухание $\text{Im} \bar{\beta}$ обращается в нуль; при увеличении \bar{k} оно сначала достигает максимума (в области $\bar{k} \approx 0,3$), а затем снова уменьшается. При $\bar{k} \approx 1,05$ в регулярном слоистом волноводе начинает распространяться, нарастая при $x \rightarrow \infty$, волна типа LM_1 . (При вычислении собственных волн ЧЭМПЛ происходит захват конту-

ром Γ полюса, отвечающего этой волне.) Ее вклад, соответствующий ее амплитуде, увеличивается с ростом частоты, и в точке $\bar{k} \approx 1,2$ происходит взаимодействие двух волн: LM_1 (которая переходит, по существу, в волну TM_1 подложки) и рассматриваемой вытекающей волны в ЧЭМПЛ, которое и обуславливает наличие близкого к нулевому уровня на кривой затухания $\text{Im } \bar{\beta}$. Кривая замедления ($\text{Re } \bar{\beta}$) на этом участке также претерпевает резкое изменение. В области $\bar{k} \approx 1,3$ затухание начинает возрастать и картина в целом повторяется вплоть до появления следующей волны типа LM_2 (в области $\bar{k} \approx 2,3$). В целом отмеченный характер поведения дисперсионных кривых существенно не изменяется при вариациях параметров задачи (см. рис. 4, $\bar{b} = 1,5$; $\bar{W} = 0,125$; $\epsilon = 9,8$). Аналогичное поведение кривых затухания было обнаружено при исследовании более простых структур с вытекающими волнами, например, диэлектрических волноводов (см., например, [14,12]). Следует подчеркнуть, что в отличие от данных [13] квази- T -волна в ЧЭМПЛ является поверхностной (при любых изменениях геометрических и электрических параметров задачи).

Отметим вычислительные особенности разработанного алгоритма нулевого приближения. При малых затуханиях волны (близких к нулю) алгоритм проявляет признаки неустойчивости (снижается точность вычисления $\bar{\beta}$), объясняемые учетом всего одного члена в разложении токов. Тем не менее, он позволяет получить ответ на один из наиболее принципиальных вопросов — о существовании в ЧЭМПЛ наряду с квази- T -волной вытекающей волны с нулевой частотой отсечки [16,17] — и определить сложный характер ее дисперсии.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Рассмотрим асимптотическое поведение функции $U(x, y)$ (U — любая компонента поля) при $|x| \rightarrow \infty$, исходя из представления поля в двухслойных областях, не занятых полосковым проводником. Именно, представляя искомое поле в указанных областях в виде суперпозиции LM -и LE -волн, функцию $U(x, y)$ запишем в виде (в силу симметрии структуры ограничимся рассмотрением области $x \geq 0$)

$$U(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \Phi_n(y) e^{i\alpha_n x},$$

где $\Phi_n(y)$ — известная функция, f_n — неизвестные коэффициенты, α_n — корни уравнения $\alpha_n^2 h^2 = \bar{k}^2 [(\epsilon - 1)v_n + 1 - \bar{\beta}^2]$,

$$\bar{k} = kh, \quad \bar{\beta} = \beta/k. \quad (\text{П.1})$$

Значения $v_n = \{\hat{v}_n, \tilde{v}_n\}$ определяются в свою очередь из уравнений [14]:

$$\begin{aligned} & \epsilon \sqrt{\hat{v}_n} \cos \rho \sqrt{1 - \hat{v}_n} \text{sh } \rho \sqrt{\hat{v}_n} (\bar{b} - 1) - \\ & - \sqrt{1 - \hat{v}_n} \text{ch } \rho \sqrt{\hat{v}_n} (\bar{b} - 1) \sin \rho \sqrt{1 - \hat{v}_n} = 0, \\ & \sqrt{1 - \tilde{v}_n} \cos \rho \sqrt{1 - \tilde{v}_n} \text{sh } \rho \sqrt{\tilde{v}_n} (\bar{b} - 1) + \\ & + \sqrt{\tilde{v}_n} \sin \rho \sqrt{1 - \tilde{v}_n} \text{ch } \rho \sqrt{\tilde{v}_n} (\bar{b} - 1) = 0, \\ & \rho = \bar{k} \sqrt{\epsilon - 1}, \quad \bar{b} = b/h, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (\text{П.2})$$

Исследование уравнений (П.2) показало, что они имеют только вещественные корни v_n ($n = 1, 2, \dots$) — конечное число положительных и бесконечное — отрицательных корней. Таким образом, комплексность

корней α_n определяется только комплексностью значений $\bar{\beta}^2$. Если $\bar{\beta}^2$ — вещественное число, то значения корней α_n выбираются из условий $\text{Im } \alpha_n < 0$. Случай $\text{Re } \alpha_n > 0$ при вещественных $\bar{\beta}^2$ не может иметь места, так как излучение волны в поперечном направлении должно приводить к уменьшению амплитуды волны по оси z , т. е. к комплексному $\bar{\beta}^2$.

Для вытекающих волн выбор корней α_n осуществляется с привлечением соображений, сформулированных при постановке задачи и в следующей лемме.

Лемма 1. При комплексном $\bar{\beta}^2$ любая компонента $U(x, y)$ поля излучающейся волны при $x > W$ может быть представлена в виде

$$U = U_1 + U_2, \quad (\text{П.3})$$

где

$$U_1 = \sum_{n=1}^N f_n \Phi_n(y) e^{i\alpha_n x}, \quad U_2 = \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n \Phi_n(y) e^{i\alpha_n x},$$

причем значения корней α_n определяются из условий $\text{Re } \alpha_n > 0$ при $n=1, 2, \dots, N$ и $\text{Im } \alpha_n > 0$ при $n=N+1, N+2, \dots$, N — некоторое целое положительное число.

Доказательство. Из уравнения (П.1) следует, что если при всех n $\text{Re } \alpha_n > 0$, то $\text{Im } \alpha_n < 0$, причем при $n \rightarrow \infty$ $\text{Im } \alpha_n \rightarrow -\infty$. Это означает, что энергия волны при любом конечном значении координаты x обрабатывается в бесконечность, что невозможно. Далее, если при всех n $\text{Im } \alpha_n > 0$, то возможны два случая:

а) $\text{Re } \alpha_n \neq 0$, волна не является излучающей и, кроме того, не переносит энергии вдоль оси z^* ;

б) $\text{Re } \alpha_n = 0$, величина $\bar{\beta}^2$ — вещественная.

Таким образом, из приведенных рассуждений следует, что поле излучающейся волны при $x > W$ должно представляться суперпозицией вида (П.3). Причем, как указывалось в предыдущем разделе, значение номера N находится в результате решения задачи в целом.

Лемма 2. При $v_{N+1} < v_N$ и достаточно больших x для функций U_1 и U_2 имеют место оценки

$$|U_1| < C_1 \exp(|\text{Im } \alpha_N| x), \quad |U_2| < C_2 \exp[-(|\text{Im } \alpha_N| + \xi) x],$$

где C_1, C_2 — некоторые положительные константы, ξ — малая положительная величина.

Доказательство. Обозначим $\alpha_n^2 = P_n + iq$. Из (П.1) следует, что q не зависит от n . Справедливо равенство $\text{Im } \alpha_n = \sqrt{2} \sqrt{-P_n + \sqrt{P_n^2 + q^2}}$, из которого следует, что если $v_{N+1} < v_N$ (а значит, $P_{N+1} < P_N$), то $|\text{Im } \alpha_{N+1}| > |\text{Im } \alpha_N|$; таким образом, величина ξ определяется из выражения $\xi \leq |\text{Im } \alpha_{N+1}| - |\text{Im } \alpha_N|$. Лемма доказана.

Перейдем теперь к вопросу о представлении функции $U(x, y)$ интегралом типа Фурье и обоснованию выбора контура интегрирования. Для этого докажем теорему.

Теорема. Пусть $f(x)$ — некоторая функция вещественной переменной, удовлетворяющая условиям:

1) $f(x) = 0$ при $x < 0$ и непрерывна при $x \geq 0$ всюду, за исключением конечного числа точек;

* Волны такого типа не являются вытекающими и поэтому здесь не рассматриваются.

$$2) \int_0^{\infty} |f(x)| e^{-ax} dx < \infty, \quad a > 0;$$

$$3) f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

где

$$f_1(x) = \sum_{k=1}^N A_k e^{i\alpha_k x}, \quad -a < \text{Im } \alpha_k < 0, \quad k=1, \dots, N,$$

$$|f_2(x)| < \text{const } e^{-(a+\xi)x}, \quad \xi > 0,$$

тогда функция $F(\alpha) = 1/2\pi \int_0^{\infty} f(x) e^{-i\alpha x} dx$ непрерывна в полуплоскости

$\text{Im } \alpha \leq -a$, регулярна в ее внутренних точках и продолжима на полуполосу $-a < \text{Im } \alpha < a + \xi$, $\text{Re } \alpha < \text{Re } \alpha_k$, $k=1, \dots, N$.

Если в точке x функция $f(x)$ непрерывна, то справедлива формула

$$f(x) = \int_{-\infty+iB}^{\xi_1+iB} F(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha + \int_{\xi_1+iB}^{\xi_1+ic} F(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha + \int_{\xi_1+ic}^{\infty+ic} F(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha,$$

где $B \leq a + \xi$, $c \leq -a$, $\xi_1 < \text{Re } \alpha_k$, $k=1, \dots, N$.

Доказательство этой теоремы следует из теоремы 1.3 монографии [15] (с. 282) и двух следующих замечаний.

1) Интеграл вида $\int_{\sigma+i\tau_1}^{\sigma+i\tau_2} F(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha$ с отрезком интегрирования,

лежащим в области регулярности $F(\alpha)$, стремится к нулю при вещественных постоянных τ_1 и τ_2 и $\sigma \rightarrow \pm\infty$.

2) Функция $f_1(x)$ может быть представлена интегралом типа Фурье с контуром интегрирования, изображенным на рис. 5а (τ_3 и τ_4 — произвольные вещественные постоянные). Доказательство очевидно и следует из того факта, что преобразование Фурье от $f_1(x)$, существующее при $\text{Im } \alpha < -a$, аналитически продолжимо в полуплоскость $\text{Im } \alpha \geq -a$ всюду, за исключением конечного числа точек, лежащих в правой полуплоскости α (см. лемму 1). На этом доказательство теоремы заканчивается.

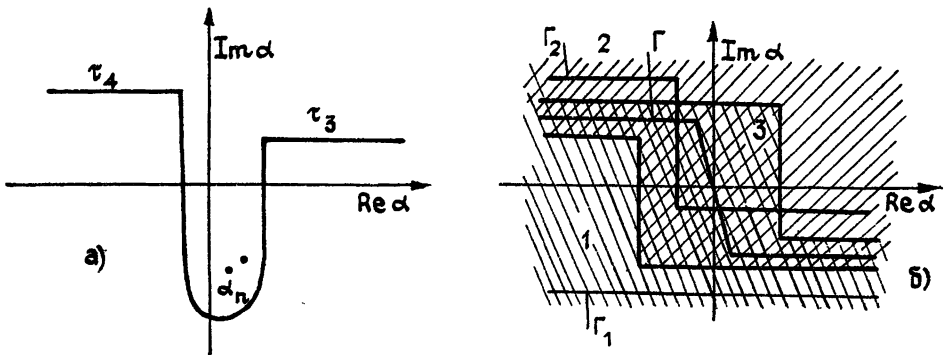


Рис. 5.

Представим теперь функцию $U(x, y)$ в виде $U = U_+ + U_-$, где

$$U_+ = \begin{cases} U, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \quad U_- = \begin{cases} 0, & x > 0 \\ U, & x < 0 \end{cases},$$

$U_+(x, y)$ и $U_-(x, y)$ являются непрерывными функциями аргумента x при $y \neq h$ в областях $x > 0$ и $x < 0$ соответственно. При $y = h$ эти функции имеют интегрируемые особенности в точках $x = \pm W$. Асимптотическое поведение функции $U_+(x, y)$ (а также $U_-(x, y)$) при $|x| \rightarrow \infty$ исследовано ранее (см. лемму 1 и 2). Таким образом, каждая из

функций U_+ и U_- удовлетворяет условиям теоремы и, следовательно, справедливы следующие представления этих функций интегралами типа Фурье:

$$U_+(x, y) = \int_{\Gamma_1} F_+(\alpha, y) e^{i\alpha x} d\alpha, \quad U_-(x, y) = \int_{\Gamma_2} F_-(\alpha, y) e^{i\alpha x} d\alpha,$$

где $F_+(\alpha, y)$, $F_-(\alpha, y)$ как функции α регулярны в областях 1 и 2 соответственно (рис. 5б). Из рисунка, в частности, видно, что области регулярности функций F_+ и F_- пересекаются. Если теперь контуры интегрирования Γ_1 и Γ_2 выбрать одинаковыми, $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma$, и лежащими в области пересечения 3, то $U = U_+ + U_-$ может быть представлена интегралом вида

$$U(x, y) = \int_{\Gamma} F(\alpha, y) e^{i\alpha x} d\alpha,$$

где

$$F(\alpha, y) = F_+(\alpha, y) + F_-(\alpha, y).$$

Контур Γ может быть деформирован, как показано на рис. 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фиалковский А. Т. — Радиотехника и электроника, 1976, № 4, с. 683.
2. Веселов Г. И., Темнов В. М. — Сб. научных трудов по проблемам микроэлектроники. — М.: МИЭТ, 1978, вып. 37.
3. Зайцев С. В., Фиалковский А. Т. — Изв. вузов — Радиофизика, 1981, 24, № 9, с. 1152.
4. Митра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов. — М.: Мнр, 1974.
5. Веселов Г. И., Платонов Н. И. — Сб. Электродинамические основы автоматизированного проектирования интегральных схем СВЧ. — М.: ИРЭ АН СССР, 1981, с. 187.
6. Веселов Г. И., Раевский С. Б. — Радиотехника, 1983, № 2, с. 55.
7. Сологуб В. Г. — ЖВМ и МФ, 1971, № 4, с. 837.
8. Темнов В. М. — Техника средств связи. Сер. Радиоизмерительная техника, 1976, вып. 2, с. 43.
9. Веселов Г. И., Темнов В. М., Алехин Ю. Н. — Сб. научных трудов. — М.: МИЭТ, 1980, с. 37.
10. Вайнштейн Л. А., Фиалковский А. Т. — Радиотехника и электроника, 1976, 21, № 6, с. 1137.
11. Oliver A. A., Peng S. T., Hsu T. I., Saucher A. — IEEE Trans., MTT-29, 1981, p. 855.
12. Ogusu K. — J. Opt. Soc. Am., 1983, 73, № 3, p. 353.
13. Гипсман А. И., Нефедов И. С., Силин Р. А. — Электронная техника. Сер. Электроника СВЧ, 1979, вып. 8, с. 12.
14. Авдеев Е. В., Потапова В. И. — Электронная техника, Сер. 3, 1972, вып. 2, с. 36.
15. Евграфов М. А. Аналитические функции. — М.: Наука, 1968.
16. Веселов Г. И., Темнов В. М., Ружицкий С. В. Тезисы докладов «Расчет и проектирование полосковых антенн». — Свердловск, 1982, с. 79.
17. Веселов Г. И., Темнов В. М. Тезисы докладов XXXIX Всесоюзной научной сессии. — М.: Радио и связь, 1984, Ч. 2, с. 21.

Московский институт
электронной техники

Поступила в редакцию
15 октября 1984 г.

ELECTRODYNAMIC FLOWOUT WAVE THEORY IN MICROSTRIP TRANSMISSION LINE

G. I. Veselov, V. M. Temnov

Integral operator short conversion analysis for electrodynamic flowout wave theory in half-shielded microstrip transmission line has been stated. Variance equation for complex roots in discrete spectrum modes has been derived. Calculations resulted in uncertain zero cut-off frequency flowout wave detection has been given.