

УДК 537.874.6

МЕТОД АДАПТИВНОЙ КОЛЛОКАЦИИ В ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧАХ ДИФРАКЦИИ

А. И. Клеев, А. Б. Маненков

Описан метод выбора точек коллокации, обеспечивающий сходимость решения, представленного в виде линейной комбинации расходящихся цилиндрических волн. Предложенная методика применена к нескольким дифракционным задачам, в том числе для расчета дифракции плоской волны на цилиндрах эллиптического и прямоугольного поперечного сечения. Результаты расчета показали, что при адаптивной коллокации сходятся не только интегральные параметры решения (например, сечение рассеяния), но и поле вблизи рассеивателя.

В резонансной и квазистатической областях параметров при решении внешних задач дифракции широко применяется представление рассеянных полей в виде ряда по системе расходящихся волн. Полнота таких систем доказана в работе [1], поэтому можно ожидать, что существует линейная комбинация этих функций, приближающая решение всюду вне тела. Для нахождения коэффициентов разложения удобно использовать метод коллокации; его преимущества заключаются в простоте программирования, высокой скорости счета и небольших требованиях к памяти ЭВМ. Однако вопрос применимости этого метода и особенно вопрос выбора точек (узлов) коллокации недостаточно изучен; в ряде случаев, как оказалось, такая методика расчета может приводить к расходящимся вычислительным процессам (см., например, [2]). В наиболее полном обзоре [3] вопрос о сходимости этого метода связывается со справедливостью гипотезы Рэлея, т. е. со сходимостью бесконечного ряда по расходящимся волнам в соответствующих областях; при этом сходимость рядов понимается в смысле сходимости «жестких» разложений [4]. В настоящей статье предлагается адаптивный способ * выбора точек коллокации, обеспечивающий равномерную сходимость разложения. Описываемый метод позволяет получить сходящийся вычислительный процесс даже в случаях, когда гипотеза Рэлея не верна. Предлагаемый способ выбора узлов не зависит от длины волны рассеиваемого поля, а определяется только формой рассеивателя.

1. Выбор точек коллокации. Рассмотрим дифракцию плоской E -поляризованной волны на идеально проводящем цилиндре (при граничных условиях Дирихле). Предполагаем, что в цилиндрической системе координат r, φ, z контур поперечного сечения цилиндра C описывается гладкой однозначной функцией угла: $r=r_C(\varphi)$, $r_C \neq 0$. Рассеянное поле вне цилиндра будем искать в виде последовательности функций **

$$\Phi_N(r, \varphi) = \sum_{n=-N+1}^{N-1} R_n^{(N)} H_n^{(1)}(kr) e^{in\varphi}, \quad (1)$$

* Этот термин был предложен нам Л. А. Вайнштейном.

** Временная зависимость предполагается в виде $\exp(-i\omega t)$, где $\omega=kc$, k — волновое число, c — скорость света в вакууме.

где $H_n^{(1)}(kr)$ — функция Ханкеля первого рода. Коэффициенты разложения $R_n^{(N)}$ (зависящие от номера приближения N) определяются из условия равенства нулю полного поля в дискретной системе точек на поверхности рассеивателя:

$$E = E^{(\text{inc})}(r_j, \varphi_j) + \sum_{n=-N+1}^{N-1} R_n^{(N)} H_n^{(1)}(kr_j) e^{in\varphi_j} = 0, \quad (2)$$

где $E^{(\text{inc})}$ — поле падающей волны, $r_j = r_c(\varphi_j)$, $j = 1, 2, \dots, 2N - 1$.

Исследуем вопрос о сходимости последовательности (1) к $[-E^{(\text{inc})}]$ при $N \rightarrow \infty$, $r \in C$. Для этого рассмотрим сходимость «статической асимптотики» — последовательности обобщенных [5] интерполяционных полиномов (1):

$$\tilde{\Phi}_N^+(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{N-1} \varepsilon_n \tilde{R}_n^{(N)} r^{-n} e^{in\varphi}; \quad (3)$$

$$\tilde{\Phi}_N^-(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{N-1} \varepsilon_n \tilde{R}_{-n}^{(N)} r^{-n} e^{-in\varphi}, \quad (4)$$

$$\varepsilon_0 = 0,5, \quad \varepsilon_n = 1, \quad n > 0.$$

Введем комплексную переменную $\zeta = re^{i\varphi}$. Функция $w = 1/\zeta$ отображает внешнюю по отношению к контуру C область плоскости ζ на область G , лежащую в плоскости w , с границей Γ . Обобщенный полином $\tilde{\Phi}_N^+$ становится при этом обычным алгебраическим полиномом степени $N - 1$ от переменной w . Аналогичное преобразование можно сделать и для $\tilde{\Phi}_N^-$. Таким образом, сходимость последовательности (1) к заданному полю падающей волны связана со сходимостью последовательностей алгебраических интерполяционных полиномов в области G . Как известно [6], последовательности таких полиномов будут равномерно сходящимися в G , если узлы интерполяции $w_j^{(N)} \in G$ в плоскости w расположены так, что при $N \rightarrow \infty$ и $w \notin G$

$$\lim \left| \frac{\sqrt{\prod_{j=1}^N (w - w_j^{(N)})}}{\Psi(w)} \right| = 1, \quad (5)$$

где функция $\tau = \Psi(w)$ конформно отображает внешность G на внешность единичного круга: $|\tau| > 1$. В частности, условие (5) будет выполнено*, если точки коллокации распределены на исходном контуре C так, что при отображении $\tau = \Psi(1/\zeta)$ они перейдут в точки $\tau_j^{(N)}$, равномерно распределенные на окружности $|\tau| = 1$ [6]. Подчеркнем, что распределение точек коллокации (например, характер их сгущения) определяется свойствами контура Γ , а не исходного контура C (см. ниже). Условие сходимости интерполяционного процесса имеет следующую «электростатическую» интерпретацию [5]. Представим себе, что в точках интерполяции $w_j^{(N)}$ помещены заряженные нити с погонной плотностью заряда $1/N$. Интерполяционная последовательность (1) будет сходиться, если при $N \rightarrow \infty$ существует линия уровня потенциала, создаваемого заряженными нитями, которая содержит внутри себя область G , но не содержит особых точек интерполяционной функции. Отметим, что указанный выбор точек коллокации связан с поведением производных полиномов от комплексной переменной [7].

* Аналогичный результат получается, если использовать асимптотику полиномов Фабера и преобразовать (3), (4) к тригонометрическому полиному.

В большинстве случаев задача нахождения конформного преобразования $\tau = \Psi(\omega)$ сравнительно сложна. Однако в нашем случае нет необходимости в точном определении функции $\Psi(\omega)$; при практических расчетах достаточно знать некоторую последовательность $\omega_j^{(N)}$, которой только в пределе соответствует последовательность точек $\tau_j^{(N)}$, равномерно расположенных на окружности $|\tau| = 1$. Например, для нахождения такой последовательности можно использовать асимптотические свойства полиномов Сеге $P_N(\omega)$ [5, 6], ортогональных на контуре Γ ; при $N \rightarrow \infty$ имеет место следующая связь между $P_N(\omega)$ и $\Psi(\omega)$:

$$P_N(\omega) \approx \text{const} [\Psi(\omega)]^N \sqrt{\Psi'(\omega)}. \quad (6)$$

Из (6) легко получить, что точки $\omega_j^{(N)}$ на контуре Γ , в которых обращается в нуль действительная (или мнимая) часть полиномов $P_N(\omega)$ при конформном отображении $\tau = \Psi(\omega)$, переходят в точки, имеющие распределение, близкое к равномерному. Поэтому узлы коллокации на контуре Γ можно определить как нули функции $\text{Re } P_N(\omega)$; в свою очередь, систему ортогональных полиномов Сеге можно построить, например, методом Грамма — Шмидта.

2. Результаты расчетов. Описанная выше методика была применена к нескольким дифракционным задачам. На рис. 1 показаны результаты расчета дифракции плоской волны на цилиндре, поперечное сечение которого в полярных координатах имеет вид

$$r_c(\varphi) = a + b \cos \varphi, \quad 0 < b < a \quad (7)$$

(улитка Паскаля). Контур Γ , соответствующий этой задаче, является эллипсом:

$$\omega = e^{i\theta} / (a + b \cos \theta), \quad 0 \leq \theta < 2\pi. \quad (8)$$

Для этого примера нетрудно построить явное выражение для функции, осуществляющей отображение внешности единичной окружности $|\tau| > 1$ на внешность эллипса (8). Исходя из этого отображения, можно получить азимутальные координаты адаптивных точек коллокации $\varphi_j^{(N)}$:

$$\varphi_j^{(N)} = \arccos \left(\frac{a \cos \alpha_j^{(N)} - b}{a - b \cos \alpha_j^{(N)}} \right), \quad (9)$$

где точки $\alpha_j^{(N)}$ равномерно распределены на отрезке $[0, 2\pi]$; например, $\alpha_j^{(N)} = 2\pi(j - 0,5)/(2N - 1)$, $j = 1, 2, \dots, 2N - 1$. На рис. 1а показано распределение абсолютной величины электрического поля E (т. е. погрешность решения) на поверхности цилиндра при адаптивной коллокации. Амплитуда поля падающей волны принята за единицу, отношение $b/a = 0,7$; $ka = 1$. Уменьшение величины E при увеличении числа точек коллокации N указывает на сходимость процесса. При другом выборе узлов последовательность (1) может, вообще говоря, оказаться расходящейся. Рис. 1б иллюстрирует такую ситуацию для данной задачи, когда точки коллокации располагались равномерно по углу φ . Видно, что в этом случае с ростом порядка интерполяции осцилляции поля E в промежуточных точках возрастают и процесс расходится. Рис. 1в иллюстрирует зависимость сечения рассеяния σ_s от порядка интерполяции. Видно, что расходимость интерполяции на равномерной сетке приводит к сильному «разбалтыванию» результата (кривая 2), а при адаптивной коллокации наблюдается быстрая сходимость (кривая 1). Отметим, что при малых значениях b/a (т. е. когда контур (7) близок к окружности) интерполяционный процесс может сходиться и на равномерной сетке. Как и в случае интерполяции аналитических функций в области [6, 7], характер сходимости данного вычислитель-

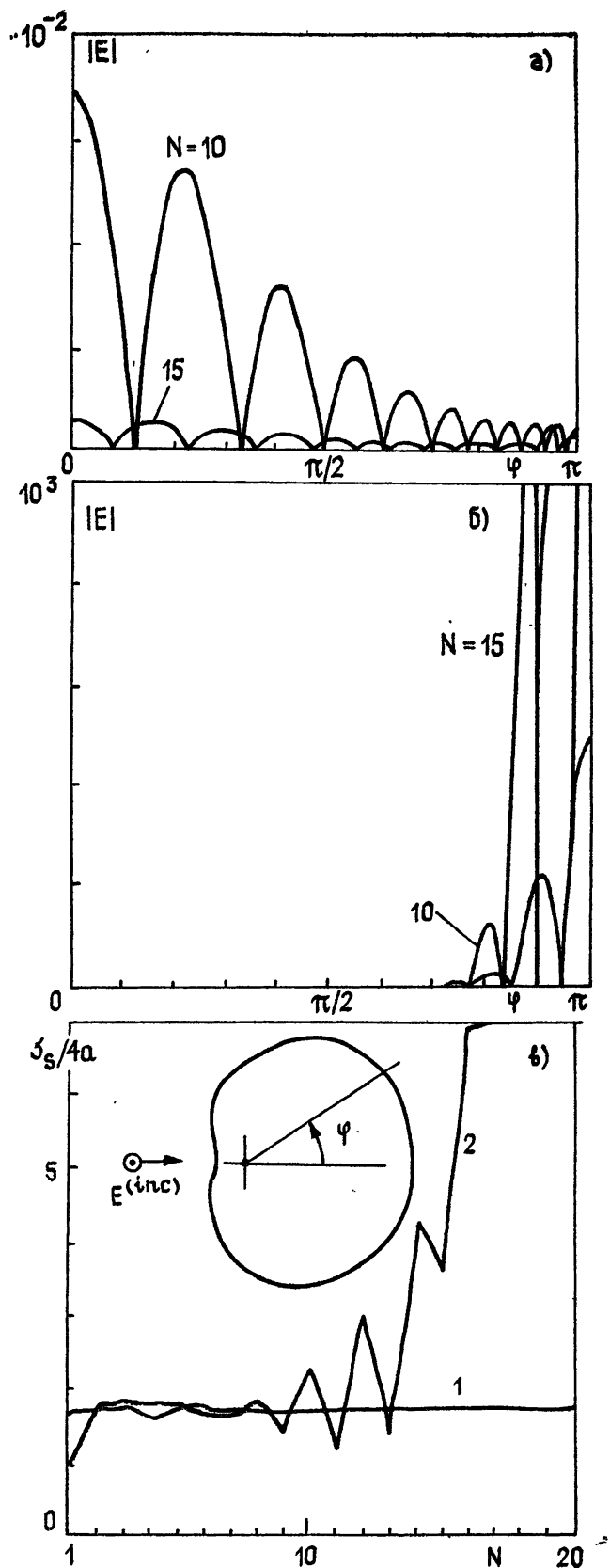


Рис. 1.

ного процесса существенным образом зависит от того, насколько будут близки к контуру Γ (в комплексной плоскости ω) особые точки искомого решения.

Возможность построения конформного отображения в явном виде позволяет в данном случае сравнить предельное распределение точек коллокации, полученное с его помощью, и распределение нулей действительной части полиномов Сегё. Кривая 1 на рис. 2 показывает предельное распределение точек коллокации, вычисленное по формуле (9), а кривая 2 — распределение десяти нулей $\text{Re } P_{10}(\omega)$. Отметим, что предельная функция распределения узлов пропорциональна распределению заряда на проводящем цилиндре с направляющей Γ .

Аналогичный расчет был проведен и для цилиндра, у которого направляющая имела форму эллипса с фокусом в начале координат: $r_c(\varphi) = (a - b \cos \varphi)^{-1}$. Для нахождения адаптивных точек коллокации использовалось указанное выше асимптотическое свойство полиномов, ортогональных на контуре Γ . Для численной ортогонализации применялся алгоритм Грамма — Шмидта [8]. При значениях b/a , близких к единице (сильно вытянутый контур), процесс ортогонализации становится неустойчивым, что, по-видимому, обусловлено неминимальностью системы ортогонализуемых функций [9]. Для ортогонализации систем с плохо обусловленной матрицей Грамма мы использовали итерационный уточняющий алгоритм, описанный в [10]. Отметим также, что для симметричных контуров распределение корней ортогонализованных гармонических полиномов [8] оказалось асимптотически близким к распределению нулей $\text{Re } P_N(\omega)$; в ряде случаев это обстоятельство позволяет упростить вычисления. Результаты расчета для $b/a = 0,7$ и $ka = 1$ приведены на рис. 3. Как и выше, рис. 3а и кривая 1 на рис. 3в построены для адаптивных точек коллокации, а рис. 3б и кривая 2 на рис. 3в — для равномерного по φ распределения точек. Отметим, что для этого отношения b/a гипотеза Рэлея уже не работает [11] (она справедлива лишь при $b/a < 1/3$), так что соответствующий ряд Рэлея на поверхности эллипса расходится.

Характер сходимости решения в методе коллокации существенным образом зависит от положения начала координат. Этот вопрос исследовался при анализе дифракции плоской волны на эллиптическом цилиндре; начало координат смещалось из фокуса в центр эллипса. В этом случае при равномерном по угловой координате φ распределении узлов коллокации расходимость сечения рассеяния не была обнаружена вплоть до $N \sim 20$, в то же время осцилляции E между интерполяционными узлами остаются практически такими же сильными, как и в первой системе координат (см. рис. 3б). По-видимому, из-за высокой симметрии данного цилиндра расходимость при расчете сечения рассеяния σ_s должна произойти при значительно больших порядках N .

Интересно отметить, что рекомендуемое во многих работах (см., например, [12]) сгущение узлов коллокации к точкам излома контура, где поле имеет особенность, приводит к сильной расходимости процесса. Для иллюстрации на рис. 4а, б приведено распределение E на поверхности квадратной призмы для разных N и различных законах сгущения узлов. Видно, что выбор распределения узлов, сгущающихся к ребрам (рис. 4б), приводит с увеличением N к быстрому росту погрешности решения E в серединах граней (вдали от ребер), где точ-

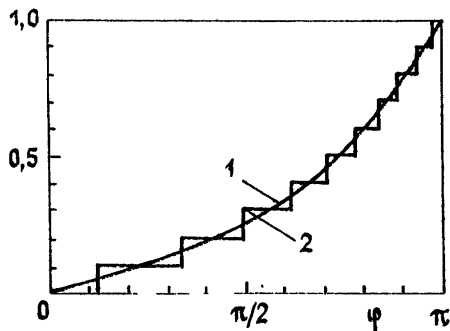


Рис. 2.

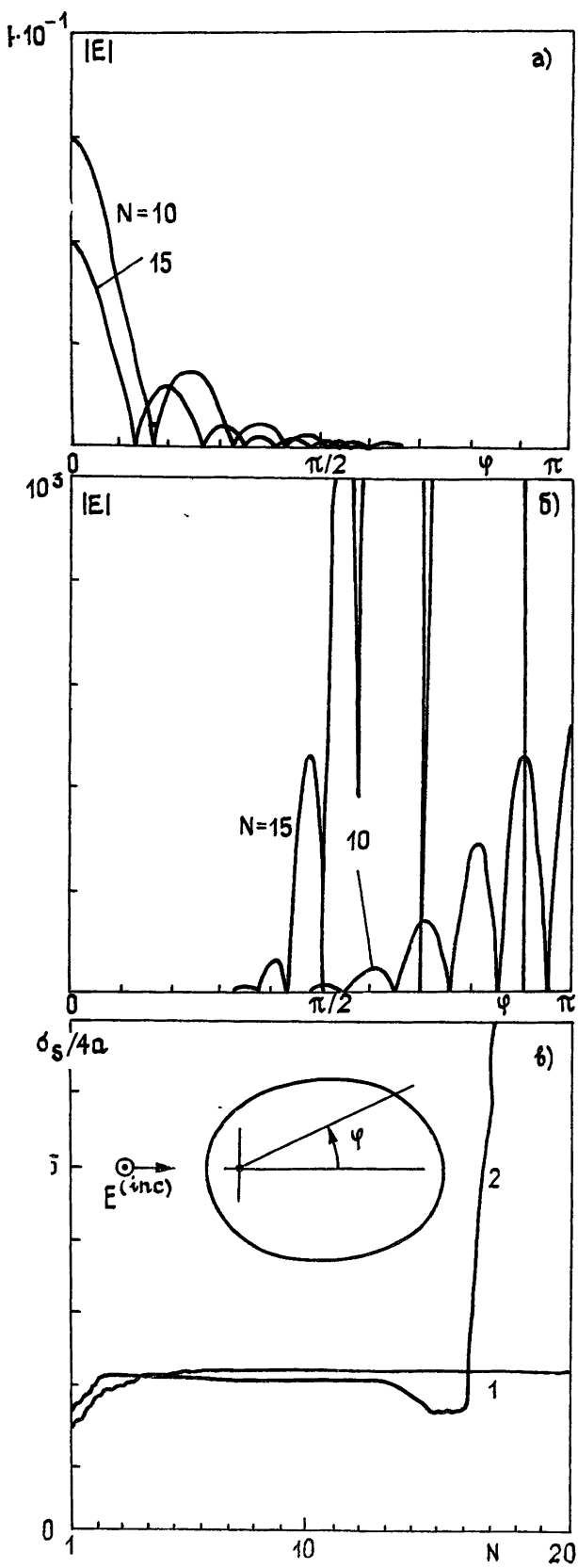


Рис. 3.

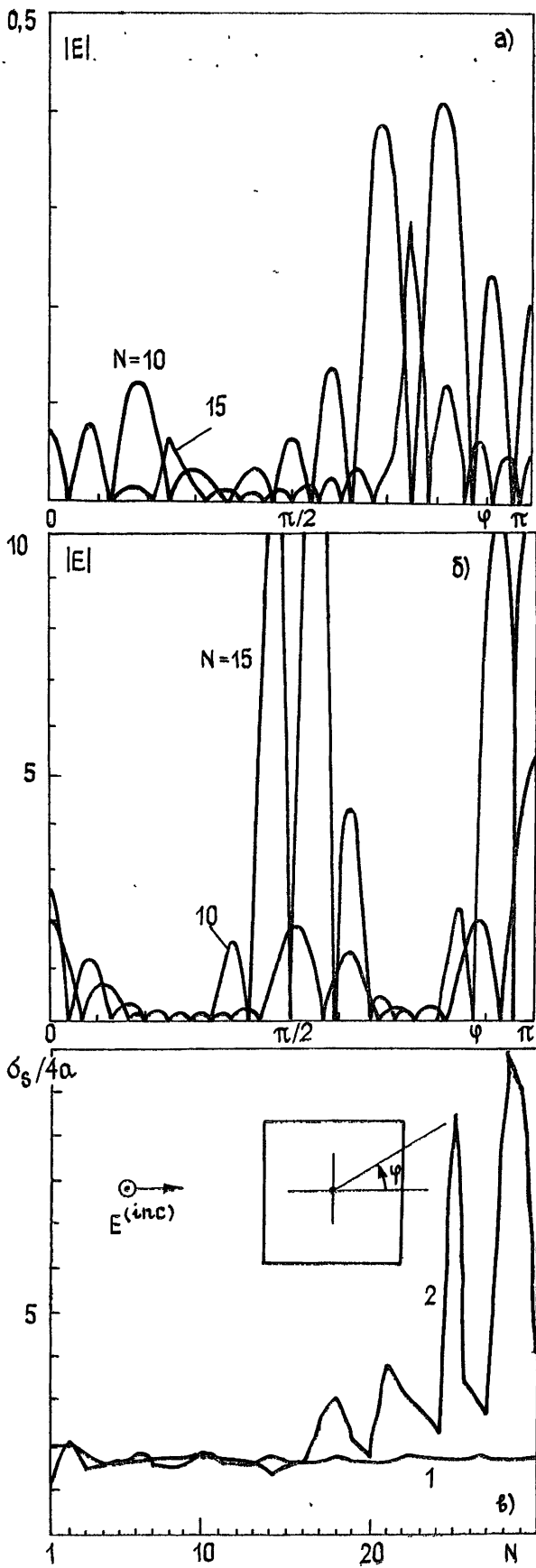


Рис. 4.

ки коллокации расположены редко. Правильно расположенные точки коллокации сгущаются как раз к серединам граней (рис. 4а). На рис. 4в показана зависимость сечения рассеяния плоской волны на квадратной призме от степени интерполяционного полинома. Как и в предыдущих примерах, неправильный выбор расположения узлов коллокации приводит к расходимости σ_s (кривая 2). При правильном выборе узлов сечение быстро сходится к точному значению $\sigma_s/4a=1,67$, которое получено в работе [13] методом интегрального уравнения. Кривые на рис. 4 построены при $ka=1$ ($2a$ — размер стороны квадрата).

Использование представления Рэлея часто приводит к плохой обусловленности систем уравнений, получающихся при алгебраизации задачи (см., например, [9, 14]). Применение метода адаптивной коллокации позволяет значительно улучшить устойчивость процесса решения. На рис. 5 показана зависимость числа обусловленности cond системы линейных алгебраических уравнений для коэффициентов $R_n^{(N)}$ от порядка системы. Все зависимости построены для контура (7), у которого $b/a=0,7$, $ka=1$ (вследствие симметрии задачи порядок фактически решаемой системы был равен N). Оценка числа обусловленности производилась с помощью методики, описанной в [15]. Видно, что при равномерном по φ распределении точек коллокации число обусловленности быстро возрастает (кривая 1). Кривая 2 построена для случая, когда использовались адаптивные точки коллокации; в этом случае обусловленность возрастает значительно медленнее. Наилучшего результата можно достичь, используя при адаптивной коллокации разложение рассеянного поля по «квазиортогональным» линейным комбинациям цилиндрических волн, коэффициенты которых образуются при ортогонализации гармонических полиномов на контуре Γ (кривая 3).

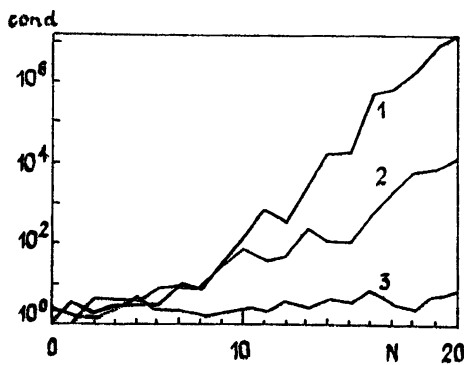


Рис. 5.

Использование при адаптивной коллокации разложение рассеянного поля по «квазиортогональным» линейным комбинациям цилиндрических волн, коэффициенты которых образуются при ортогонализации гармонических полиномов на контуре Γ (кривая 3).

Изложенная выше методика расчета позволяет применить исключительно эффективный (с точки зрения машинной реализации) коллокационный алгоритм для расчета коэффициентов в представлении полей по системе расходящихся волн. Подчеркнем, что предложенный способ расчета работает и тогда, когда гипотеза Рэлея уже не справедлива. Он обладает также большей устойчивостью, чем метод нулевого поля [14], хотя, как уже отмечалось, и в данной методике возникают определенные трудности для сильно вытянутых тел. Указанный выбор узлов оказывается полезен также при решении задач дифракции методом интегральных уравнений; как показано в работе [15], произвольный выбор узлов коллокации может привести к расходимости вычислительного процесса. Отметим, что данная методика может быть применена и в других задачах, например для продолжения поля из одной области в другую.

Авторы благодарны Л. А. Вайнштейну за поддержку и ценные замечания, С. П. Капице за интерес к работе и Е. Л. Косареву за ее обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Векуа И. Н. — ДАН СССР, 1953, 90, № 5, с. 715.
2. Поповиди-Заридзе Р. С., Каркашадзе Д. Д., Хатнашвили Д. Ш. — Краткие тезисы докладов VIII Всесоюзного симпозиума по дифракции и распространению волн. — М.: ИРЭ АН СССР, 1981, т. 1, с. 255.

3. Lewin L. — IEEE Trans., 1970, MTT-18, № 12, p. 1041.
4. Данцощ К. Практические методы прикладного анализа. — М.: Физматгиз, 1961.
5. Гончаров В. Л. Теория интерполирования и приближения функций. — М.: Гостехиздат, 1954.
6. Смирнов В. И., Лебедев Н. А. Конструктивная теория функций комплексного переменного. — М.—Л.: Наука, 1964.
7. Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. — М.: Наука, 1977.
8. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. — М.—Л.: Гостехиздат, 1949, с. 58.
9. Апельцин В. Ф., Кюркчан А. Г. — Радиотехника и электроника, 1985, 30, № 2, с. 193.
10. Парлетт Б. Симметричная проблема собственных значений. — М.: Мир, 1983, с. 123.
11. Van der Berg P. M., Fokkema J. T. — IEEE Trans., 1979, AP-27, № 5, p. 577.
12. Миллер Е., Поджио А. В сб.: Численные методы теории дифракции. — М.: Мир, 1982, с. 42.
13. Mei K., van Bladel J. — IEEE Trans., 1963, AP-11, № 3, p. 185.
14. Ng F. L., Bates R. H. T. — IEEE Trans., 1972, MTT-20, № 10, p. 658. с. 66.
15. Форсайт Дж., Молер К. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений. — М.: Мир, 1969.
16. Клеев А. И., Маненков А. Б. — Радиотехника и электроника, 1984, 29, № 12, с. 2293.

Институт физических проблем
АН СССР

Поступила в редакцию
7 мая 1985 г.

ADAPTIVE POINT MATCHING METHOD IN TWO-DIMENSIONAL DIFFRACTION PROBLEMS

A. I. Kleev, A. B. Manenkov

The method of choosing the collocation points is presented, which provides the convergency of the solution in terms of outgoing cylindrical waves. This method has been applied to several diffraction problems such as scattering of plane wave by elliptical and rectangular cylinders. The results of the calculations showed that the adaptive point matching method provides not only the convergency of integral scattering characteristics (e. g. cross section), but the convergency of near-fields as well.

АСТРОНОМИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 1985, т. 62, вып. 4.

(Окончание)

Апушкинский Г. П., Топчило Н. А. Радионаблюдения захода спокойного протуберанца за край Солнца и интерпретация результатов затмения протуберанца 31 июля 1981 г.

Радионаблюдения захода спокойного протуберанца за край Солнца на волне 0,8 см позволяют определить его структуру. Хромосфера под протуберанцем не радиоизлучает: радиорadius равен оптическому. Аналогично можно интерпретировать результаты затмения 31 июля 1981 г.

Любимов Г. П., Переслгина Н. В. Отображение структуры хромосферы и короны Солнца в солнечном ветре и межпланетном магнитном поле.

Методом конкретного сопоставления данных о солнечном ветре и межпланетном магнитном поле с солнечными данными найдены новые особенности в структуре солнечного ветра низкой скорости и получены дополнительные указания об источниках солнечного ветра. Эти закономерности обнаружены в данных за апрель 1968 г. и подтверждены на других интервалах. Показано: 1) низкоскоростному солнечному ветру соответствуют участки спокойной солнечной хромосферы между группами активных областей; 2) низкоскоростной солнечный ветер выносит слабое крупномасштабное солнечное магнитное поле, знак которого соответствует знаку слабого межпланетного магнитного поля; 3) на линии инверсии знака межпланетного магнитного поля наблюдаются дублетные импульсы плотности, которым соответствует минимальная величина напряженности магнитного поля. Высказана гипотеза о наблюдении корональных петлевых плазменных структур, перенесенных солнечным ветром к 1 а. е. Предложена феноменологическая модель явления.