ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXIX, № 5 РАДИОФИЗИКА 1986

УДК 533.951

# О ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ВОЛН В ПЛОСКОМ ПЛАЗМЕННОМ ВОЛНОВОДЕ СО СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ КОНЦЕНТРАЦИИ

*Н. А. Урусова, С. М. Файнштейн*

Проведено исследование взаимодействия электромагнитных волн в плоском плазменном волноводе с одномерными случайными неоднородностями. Выведены уравнения для средних по ансамблю неоднородностей амплитуд полей. Найден порог распадной неустойчивости. Приведены оценки для лабораторной плазмы.

Взаимодействие квазимонохроматических волн и распространение нелинейных сигналов в безграничной плазме со случайными неоднородностями исследованы весьма подробно (см., например, [1]). В реальных условиях плазма является ограниченной, поэтому представляет интерес анализ влияния ограниченности плазменной системы на параметрическое взаимодействие волн с учетом случайных неоднородностей в плазме. Известно (см. [2,4,5]), что ограниченность плазмы (плазменные волноводы) приводит к качественно новым физическим эффектам, проявляющимся в появлении дополнительной дисперсии для мод системы, а также к поляризационным запретам на резонансные трехволновые процессы взаимодействия мод в плазменном волноводе. В данной работе решена строгая нелинейная краевая задача о взаимодействии волн в плоском плазменном волноводе, заполненном «холодной» плазмой с хаотическими одномерными флуктуациями концентрации плазмы. Проведен последовательный вывод уравнений для амплитуд среднего поля и найден порог распадной неустойчивости для электромагнитных волн в волноводе. Приведены оценки для лабораторной плазмы в СВЧ диапазоне возбуждаемых колебаний. Показано, что из-за ограниченности плазменной системы пороговые значения полей значительно выше, чем в соответствующей безграничной плазме, что связано с дополнительной дисперсией для мод плазменной системы.

1. Запишем исходную систему квазигидродинамических уравнений и уравнений Максвелла в безразмерных переменных

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_б}{\partial t_б} + (\boldsymbol{v}_б \nabla)\boldsymbol{v}_б = \frac{1}{\sigma}\boldsymbol{E}_б + \alpha^2[\boldsymbol{v}_б \boldsymbol{H}_б], \quad \frac{\partial N_б}{\partial t_б} + \sigma \operatorname{div} N_б \boldsymbol{v}_б = 0,$$
$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E}_б + \alpha^2\frac{\partial \boldsymbol{H}_б}{\partial t_б} = 0, \quad \operatorname{rot}\boldsymbol{H}_б - \frac{\partial \boldsymbol{E}_б}{\partial t_б} = \sigma N_б \boldsymbol{v}_б, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{E}_б = \boldsymbol{E}/E_0$, $\boldsymbol{H}_б = \boldsymbol{H}/H_0$ ($\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$ — электрическое и магнитное поле), $E_0 = 4\pi N_0 d$ — характерное плазменное поле, $H_0 = (\omega_0 d/c)E_0$, $d$ — толщина волновода, $\boldsymbol{v}_б = \boldsymbol{v}/v_0$, $v_0 = (e/m\omega_0)E_0$, $N_б = N/N_0$, $t_б = t\omega_0$ ($\boldsymbol{v}$, $N$ — скорость и концентрация электронов), $x_б, y_б, z_б = x, y, z/d$, $\omega_0$ — ленгмюровская частота электронов, $\alpha = \omega_0 d/c$, $\sigma = v_0/\omega_0 d$.

Считая стенки волновода идеально проводящими, дополним систему (1) граничными условиями *

* Индекс «б» в дальнейшем опускаем.

$$E_{x,y}(0;1)=0.$$

Рассмотрим случай, когда случайное отклонение электронной концентрации $\Delta N$ от среднего значения $N_0$, а также величина возмущения под действием электромагнитного поля $\langle\tilde{N}(x,t)\rangle$, $N'(x,t)$ зависят от одной координаты. Электронную концентрацию можно представить в виде

$$N=N_0+\Delta N(x)+\langle\tilde{N}(x,t)\rangle+N'(x,t), \tag{2}$$

где $\langle N\rangle$ — среднее по ансамблю, а $N'$ — флуктуационная часть возмущения.

Представим величины полей и скорости в (1) в виде средних значений и их флуктуационных отклонений, тогда после усреднения системы (1) получим уравнения для средних величин:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial t}\langle\boldsymbol{v}\rangle-\frac{1}{\sigma}\langle E\rangle=\mu\,\{-(\langle\boldsymbol{v}\rangle\nabla)\langle\boldsymbol{v}\rangle+\alpha^2[\langle\boldsymbol{v}\rangle\langle\boldsymbol{H}\rangle]\},\\
\frac{\partial}{\partial t}\langle\tilde{N}\rangle+\sigma\operatorname{div}\langle\boldsymbol{v}\rangle+\sigma\operatorname{div}\langle\Delta N\boldsymbol{v}'\rangle=\mu\,\{-\operatorname{div}\langle\tilde{N}\rangle\langle\boldsymbol{v}\rangle\},\\
\operatorname{rot}\langle E\rangle+\alpha^2\frac{\partial}{\partial t}\langle\boldsymbol{H}\rangle=0,\\
\operatorname{rot}\langle\boldsymbol{H}\rangle-\frac{\partial}{\partial t}\langle E\rangle-\sigma\langle\boldsymbol{v}\rangle-\sigma\langle\Delta N\boldsymbol{v}'\rangle=\mu\sigma\langle\tilde{N}\rangle\langle\boldsymbol{v}\rangle.
\end{gathered}\tag{3}$$

Параметр $\mu$ введен для обозначения малости правых частей, он определяется отношением возмущенных компонент к их равновесному значению $\mu\approx|\langle u\rangle|^2/u_0^2$. Предполагаем, что по порядку величины $\mu$ совпадает с параметром $\xi$, характеризующим неоднородность данной среды, $\xi\approx|\Delta N(x)|/N$.

Система линейных уравнений для флуктуирующих величин имеет вид

$$\begin{gathered}
\sigma\frac{\partial\boldsymbol{v}'}{\partial t}-\boldsymbol{E}'=0,\quad \operatorname{rot}\boldsymbol{E}'+\alpha^2\frac{\partial\boldsymbol{H}'}{\partial t}=0,\\
\operatorname{rot}\boldsymbol{H}'-\frac{\partial\boldsymbol{E}'}{\partial t}-\sigma\boldsymbol{v}'=\sigma\Delta N\langle\boldsymbol{v}\rangle,\quad \frac{\partial N'}{\partial t}+\sigma\operatorname{div}\boldsymbol{v}'=-\sigma\operatorname{div}(\langle\boldsymbol{v}\rangle\Delta N).
\end{gathered}\tag{4}$$

При выводе систем уравнений (3), (4) были сделаны предположения, описанные в [1].

Решение системы (3) будем искать в виде асимптотического ряда по $\mu$:

$$\langle u\rangle=\sum_s a_s(\mu x,\mu t)\psi_s(z)\exp\left[i(\omega_s t-k_s x)\right]+\mu\sum_s\langle u_1\rangle+\text{к.с.},$$

где $s$ — индекс взаимодействующих волн, $\psi_s(z)$ — поляризационный вектор, характеризующий поперечную по отношению к направлению распространения волн структуру поля, $a_s$ — амплитуда волны.

Решение системы (4) можно представить в виде

$$u'=\sum_s\psi_s'(z)\exp\left[i(\omega_s t-k_s x)\right]+\text{к.с.}$$

Нам необходимо найти значения поляризационного вектора как для усредненных, так и для флуктуирующих компонент полей и скорости:

$$\psi_i(z)=\{E_x,E_y,E_z,H_x,H_y,H_z,v_x,v_y,v_z,N\},\qquad i=1,\dots,10.$$

Рассмотрим линейную задачу ($\mu=0$). При этом системы (3), (4) разбиваются на две независимые системы для волн типа TE и TM.

Можно получить замкнутые системы уравнений для средних и флуктуирующих значений $\psi_{1,2}(z)$ (поперечное распределение проекций электрического поля по осям $x, y$):

$$\frac{d^2\langle\psi_1(z)\rangle}{dz^2}+h_1^2\langle\psi_1(z)\rangle=\beta_1\langle\Delta N(x)\psi_7'(z)\rangle+\beta_2\left\langle\Delta N(x)\frac{d\psi_9'(z)}{dz}\right\rangle; \quad (5а)$$

$$\frac{d^2\psi_1'(z)}{dz^2}+h_2^2\psi_1'(z)=\beta_1\Delta N(x)\langle\psi_7(z)\rangle+\beta_2\Delta N(x)\left\langle\frac{d\psi_9(z)}{dz}\right\rangle,$$

$$\langle\psi_1(0;1)\rangle=0, \quad \psi_1'(0;1)=0; \quad (5б)$$

$$\frac{d^2\langle\psi_2(z)\rangle}{dz^2}+h_1^2\langle\psi_2(z)\rangle=i\omega\sigma\alpha^2\langle\Delta N(x)\psi_8'(z)\rangle; \quad (6а)$$

$$\frac{d^2\psi_2'(z)}{dz^2}+h_2^2\psi_2'(z)=i\omega\sigma\alpha^2\Delta N(x)\langle\psi_8(z)\rangle,$$

$$\langle\psi_2(0;1)\rangle=0, \quad \psi_2'(0;1)=0, \quad (6б)$$

где $h_1$ — дисперсионное уравнение для TE- и TM-волн усредненной системы,

$$h_1^2=\alpha^2(\omega_s^2-1)-k_s^2, \quad (7)$$

$h_2$ — дисперсионное уравнение для флуктуирующих TE-, TM-волн,

$$\beta_1=i\omega\sigma\left(\alpha^2+\frac{k^2}{1-\omega}\right), \quad \beta_2=\frac{\omega k\sigma}{(1-\omega^2)}.$$

В системе (3) содержатся члены, связанные с наличием флуктуаций концентрации в среде. Для интересующей нас задачи необходимо знать их фурье-компоненты [1]:

$$\nu_1(\omega,k)=\sigma\int \operatorname{div}\langle\Delta N(x)\mathbf{v}'\rangle e^{-i(\omega t-kx)}dtdx,$$

$$\nu_2(\omega,k)=\sigma\int\langle\Delta N(x)\mathbf{v}'\rangle e^{-i(\omega t-kx)}dtdx. \quad (8)$$

Следовательно, для нахождения декрементов $\nu_1$, $\nu_2$ необходимо знать флуктуирующие компоненты скорости.

Вынужденное решение систем (5), (6) будем искать в виде разложения в ряд по собственным функциям соответствующей однородной задачи с данными граничными условиями *:

$$\langle\psi(z)\rangle=\sum_n A_n\sin\pi nz, \quad \psi'(z)=\sum_n B_n\sin\pi nz. \quad (9)$$

В результате получим

$$\psi_1'(z)=\sum_n\left[\frac{\int\Delta N(x)\beta_1\langle\psi_7(z)\rangle+\beta_2\langle d\psi_9(z)/dz\rangle\sin\pi nzdz}{h^2_{2(\mathrm{TM})}-(\pi n)^2}\right]\sin\pi nz,$$

$$\psi_2'(z)=\sum_n\left[\frac{\alpha^2\int\Delta N(x)\langle\psi_8(z)\rangle\sin\pi nzdz}{h^2_{2(\mathrm{TE})}-(\pi n)^2}\right]\sin\pi nz. \quad (10)$$

* Ищется лишь рассеянное поле на флуктуациях концентрации, поэтому определяется вынужденное решение дифференциальных уравнений.

Подставляя решения (10) в (8) и учитывая связи компонент скорости и электрического поля, найденные из системы (4), получим выражения, справедливые при любых соотношениях $k_{TE}, k_{TM}$ и $l_0$ ($l_0$ — характерный масштаб неоднородности):

$$\nu_{1(TM)}(\omega, k_{TM}) = \frac{\langle(\Delta N)^2\rangle}{\sigma\omega}\sum_n\left[ik_{TM}(1-\omega^2) - l_0\omega^2\frac{1+ikl_0}{1+2ikl_0}\right]\times$$

$$\times\left[\frac{\beta_2 i}{k}\int\left\langle\frac{d\psi_9(z)}{dz}\right\rangle\sin\pi nz - \frac{\beta_1 i\int\langle\psi_7(z)\rangle\sin\pi nz dz}{2\alpha^2(1-\omega^2)-(\pi n)^2}\right]\sin\pi nz, \tag{11}$$

$$\nu_{2(TE)}(\omega, k_{TE}) =$$

$$=\sum_n\left[\frac{2\pi i\langle(\Delta N)^2\rangle\alpha^2 kl_0(1+ik_{TE}l_0)\int\langle\psi_8(z)\rangle\sin\pi nz dz}{\alpha^2(\omega^2+2ik_{TE}\omega^2 l_0 - 2ik_{TE}l_0 - 1)-(\pi n)^2}\right]\sin\pi nz,$$

где $k_{TM,\,TE}=\alpha^2(\omega^2_{TE,\,TM}-1)+(\pi n)^2$, $n=0, 1, \ldots$ При этом предполагалось, что корреляционная функция $N$ имеет вид

$$\langle\Delta N(x)\Delta N(x+\xi)\rangle = \langle(\Delta N)^2\rangle\exp(-|\xi|/l_0).$$

Продолжая решать системы (5), (6), найдем значения коэффициентов разложения

$$A_n = \frac{\beta_1\int\limits_0\langle\Delta N(x)\psi'(z)\rangle\sin\pi nz dz}{h_1^2-(\pi n)^2}.$$

Тогда с учетом (10) для ТЕ-волн запишем

$$A_n = \frac{\beta_1\beta_2}{h_1^2-(\pi n)^2}\int\limits_0^1\left\langle\sum_l\frac{\sin\pi l\zeta\sin\pi lz}{h_2^2-(\pi l)^2}\Delta N(x)\Delta N(x+\xi)\right\rangle\times$$

$$\times\sin\pi nz\,dz.$$

Проведя ряд преобразований, при помощи таблиц [7] избавимся от знака суммы под интегралом. Окончательно имеем

$$A_n = \frac{2\beta_1\beta_2\pi\langle(\Delta N)^2\rangle e^{-|\xi|/l_0}}{[h_1^2-(\pi n)^2]h_2\sin\pi h_2}\times$$

$$\times[|\cos\pi h_2(2j+1)(1-\cos h_2)\sin h_2 - \sin\pi(2j+1)\sin h_2|].$$

Аналогичным образом можно получить выражения коэффициентов разложения для волн типа ТМ.

2. Исследуем трехволновое взаимодействие ТЕ- и ТМ-волн, удовлетворяющих условию синхронизма

$$\omega_1+\omega_2=\omega_3, \qquad k_1+k_2=k_3. \tag{12}$$

Оно выполняется в случае распада ТЕ(ТМ)-волны на две ТЕ(ТМ)-волны с меньшими поперечными индексами. Это возможно, если низшие частоты связаны с высшей соотношением

$$\omega_{1,2} = \left(1-\frac{\omega_3^2+\alpha^2}{\alpha^2 k_3^2}\right)^{-1}\left\{\frac{(\omega_3^2+\alpha^2)^{1/2}\pi^2 m^2}{2\alpha k_3}\mp\left[\frac{(\omega_3^2+1)\pi^2 m^2}{2\alpha^2 k_3^2}-\right.\right.$$

$$-\left(\frac{\pi^2 m^2}{2k_3^2}+\pi^2 n^2\right)\left(1-\frac{\omega^2+\alpha^2}{2k^2\alpha^2}\right)\Bigg]^{1/2}\Bigg\}. \tag{13}$$

Индекс «$m$» соответствует высшей гармонике, «$n$» — частотам $\omega_{1,2}$. Из этого выражения следует, что распадаться может волна с индексом $m>2n$.

Процесс распада ТЕ(ТМ)-волны на две ТМ(ТЕ)-волны невозможен из-за специфики их поляризаций [2].

При выводе уравнений для амплитуд взаимодействующих волн можно воспользоваться асимптотическим методом [3]. Из условия ортогональности полуоднородной краевой задачи [4]

$$\int_0^1 \langle \psi_s'^{,2}(z)\rangle F_{1,2}(\mu x, \mu t, x, t, z)\,dz=0, \tag{14}$$

где $F_{1,2}$ — функция, стоящая в правой части неоднородного уравнения, для нелинейной добавки $\langle u_1'^2\rangle$ получим систему уравнений для медленно меняющихся амплитуд (см. также [2]):

$$\begin{gathered}\frac{\partial a_{1,2}}{\partial t}+v_{1,2}\frac{\partial a_{1,2}}{\partial x}=\varepsilon_{1,2}\,a_3\,a_{2,1}^{*}-\nu^{(1,2)}a_{1,2},\\ \frac{\partial a_3}{\partial t}+v_3\frac{\partial a_3}{\partial x}=-\varepsilon_3\,a_1\,a_2-\nu^{(3)}a_3,\end{gathered} \tag{15}$$

где $\varepsilon_{1,2,3}$ — коэффициенты нелинейного взаимодействия, $v_{1,2,3}$ — групповые скорости взаимодействующих волн,

$$\begin{gathered}\varepsilon_{1,2,3}=[1-(-1)^{m,n}(\pi m, n)]^{-1}\omega_{1,2,3}k_{1,2,3}/\omega_1\omega_2\omega_3\alpha^2(\omega_{1,2,3}^2-1),\\ v_{1,2,3}=k_{1,2,3}/\alpha^2(1+\omega_{1,2,3}^2).\end{gathered} \tag{16}$$

В общем случае вид комплексных декрементов $\nu(\omega, k)$ с учетом (11) чрезвычайно громоздок, поэтому рассмотрим два предельных случая, в которых эти выражения могут быть существенно упрощены. В случае мелкомасштабных неоднородностей ($k_{\mathrm{TE,TM}}\, l_0 \ll 1$) значения $\gamma=\mathrm{Re}\,\nu$, $\Phi=\mathrm{Im}\,\nu$ принимают вид

$$\gamma_{1,2}^{(\mathrm{TE,TM})}\approx\frac{1}{4}\langle(\Delta N)^2\rangle\frac{k_{1,2}\,l_0}{\omega_{1,2}^3}\eta,\quad \Phi\approx\langle(\Delta N)^2\rangle\,\omega_{1,2}\,\eta, \tag{17}$$

где

$$\eta=1+\frac{2\,|\cos\pi h_2\,(2j+1)|}{h_2^2\sin\pi h_2},\quad j=0, 1, \ldots$$

В предельном случае крупномасштабных неоднородностей ($k_{\mathrm{TE,TM}} l_0 \gg \gg 1$) в формуле (17) множитель 1/4 заменяется на 1/8.

Заметим, что при $d\to\infty$ эти значения совпадают с точностью до обозначений с формулами для декрементов в безграничной среде, приведенными в работе [1].

Рассмотрим временную задачу ($\partial/\partial x=0$) и найдем инкремент параметрической неустойчивости $\Gamma$ в заданном поле волны накачки:

$$\Gamma=-\frac{1}{2}(\gamma_1+\gamma_2)+\left[\frac{1}{4}(\gamma_1-\gamma_2)^2-\frac{1}{4}(\Phi_1-\Phi_2)^2+\varepsilon_1\,\varepsilon_2\,|a_3^0|^2\right]$$

Здесь $\gamma_{1,2}$ и $\Phi_{1,2}$ отвечают соответственно за затухание и фазовую расстройку. Из (18) следует, что распадная неустойчивость имеет место при условии

$$|a_3^0|^2 \geqslant \frac{\gamma_1 \gamma_2 + (1/4)(\Phi_1 - \Phi_2)^2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2}. \tag{19}$$

В рассматриваемых предельных случаях $\varphi_1 \approx \varphi_2$, следовательно, величина расстройки не влияет на значение амплитуды.

Оценим пороговое значение амплитуды поля для плазмы со следующими параметрами: концентрация электронов $N_0 \sim 10^{11}$ см$^{-3}$, частота волны накачки $\omega_3 = 1{,}2 \cdot 10^{12}$ с$^{-1}$ (длина волны $\lambda = 1{,}57$ мм). Следствием плоской геометрии задачи является взаимодействие волн с нечетными поперечными индексами, тогда для $m=3$, $n=1$ получим $\omega_1 = 3{,}5 \cdot 10^{11}$ с$^{-1}$, $\omega_2 = 8{,}3 \cdot 10^{11}$ с$^{-1}$. Соответствующие этим частотам линейные декременты (17) в случае мелкомасштабных неоднородностей при $\langle (\Delta N)/N_0 \rangle^2 \sim 10^{-4}$ равны $\gamma_1 = 9{,}8 \cdot 10^{-3}$ с$^{-1}$, $\gamma_2 = 7{,}3 \cdot 10^{-3}$ с$^{-1}$, а пороговое значение амплитуды $|a_3^0| = 1{,}1 \cdot 10^{-2}$ В/см. Во втором предельном случае ($kl_0 \gg 1$) $\gamma_1 = 4{,}9$ с$^{-1}$, $\gamma_2 = 3{,}6$ с$^{-1}$, $|a_3^0| = 5{,}7$ В/см.

Заметим, что пороговое значение амплитуды уменьшается с ростом частоты. Это можно показать, если в (19) подставить выражения (18) и (16). Приведенные оценки были получены при значении параметра $\varkappa = 1$, т. е. при толщине волновода $d = 1{,}7$ см.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Тамойкин В. В., Файнштейн С. М. — ЖЭТФ, 1972, **62**, вып. 1, с. 213; 1975, **68**, с. 948; 1976, **71**, с. 531.
2. Дворяковский В. П., Файнштейн С. М. — Изв. вузов — Радиофизика, 1981, **24**, № 5, с. 1284.
3. Гапонов А. В., Островский Л. А., Рабинович М. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1970, **13**, № 2, с. 163.
4. Дворяковский В. П., Петрухин Н. С., Файнштейн С. М. — Физика плазмы, 1979, **5**, с. 80.
5. Кондратенко А. Н. Плазменные волноводы. — М.: Атомиздат, 1976.
6. Градштейн И. С., Рыжик Л. М. Таблица интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Наука, 1971.



Горьковский политехнический институт



Поступила в редакцию 3 января 1985 г.


## PARAMETRIC INTERACTION BETWEEN WAVES IN A PLANE PLASMA WAVEGUIDE WITH RANDOM INHOMOGENEITIES


*N. A. Urusova, S. M. Fainstein*



Parametric interaction of electromagnetic waves in a plasma waveguide with one-dimensional random inhomogeneities is studied. The equations are obtained for wave amplitudes averaged over the inhomogeneity ensemble. The threshold of decay instability is detected. Estimations are given for a laboratory plasma.