ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXIX, № 5 РАДИОФИЗИКА 1986

УДК 537.86:519; 621.373

О ВЛИЯНИИ ШУМОВ НА СТАТИСТИКУ ХАОТИЧЕСКИХ АВТОКОЛЕБАНИЙ

А. С. Пиковский

На примере простого автогенератора шума радиодиапазона рассматривается влияние шумов на статистику странного аттрактора. Показано, что для вычисления макроскопических статистических характеристик требуется, во-первых, найти инвариантную функцию распределения и, во-вторых, решить статистическую задачу о выходе из области. В случае малого шума соответствующие поправки находятся аналитически.

1. Хаотические автоколебания наблюдаются во многих нелинейных системах. Математическим их образом служит странный аттрактор [1]. Однако в реальных ситуациях всегда присутствуют флуктуации (шумы), поэтому строго детерминированные модели не являются вполне адекватными. Особенно сильно влияние шумов в точках перехода от регулярного поведения к хаотическому (см. [2]). Если же имеют место развитые хаотические колебания, то малые шумы не приводят к качественным изменениям (хотя и нарушают детерминистскую предсказуемость). Здесь представляется естественной следующая постановка задачи: определить, как меняются статистические характеристики хаотических колебаний под действием шума. Трудность решения этой задачи состоит в том, что даже статистические характеристики чисто детерминированного хаотического режима удается аналитически определить в немногих ситуациях. Одной из простейших систем, для которой возможно аналитическое описание, является автогенератор шума радиодиапазона, предложенный в [3]. Статистические характеристики автоколебаний в этом генераторе были аналитически определены в [4,5]. В данной работе рассматривается влияние шумов на статистику сигнала в генераторе шума. Этой задаче была посвящена работа [6], однако там она решена не полностью. В настоящей работе в разд. 2 выводятся основные уравнения, описывающие колебания в автогенераторе в присутствии шума. В разд. 3 статистические характеристики сигнала находятся в общем виде. Случай малого шума рассматривается в разд. 4.

2. Схема автогенератора шума радиодиапазона приведена на рис. 1а. Единственный нелинейный элемент здесь — туннельный диод, характеристика которго изображена на рис. 1б. Работа генератора описывается уравнениями

$$\dot{x} = 2hx + y - \sigma z + \eta_1(t)\,, \quad \dot{y} = -x + \eta_2(t),$$
$$\varepsilon\dot{z} = x - f(z) + \eta_3(t)\,. \tag{1}$$

Здесь x, y, z — безразмерные переменные, пропорциональные току I, напряжениям U и V соответственно, $\varepsilon \ll 1$, σ, h — параметры [3], $\eta_i(t)$ — внешние шумы.

В отсутствие шумов малый параметр ε позволяет разделить движения на быстрые и медленные и свести задачу к одномерному отображению последования. Это отображение, связывающее последовательные маскимумы величины y, приведено на рис. 2. При кусочно-линейной аппроксимации характеристики диода это отображение выписывается аналитически [5], однако соответствующие формулы имеют громоздкий вид. Поэтому ограничимся графическим представлением рис. 2. Видно, что отображение $y \to F(y)$ состоит из двух частей. При $y<A$ отображение линейно: $F(y)=ay$, $a>1$. Итерациям с $y<A$ соответствует экспоненциальное нарастание колебаний в контуре, при котором ток через диод остается меньше порога I_m. При $y > A$ $F(y)$ — нелинейная функция, описывающая сброс колебательной энергии в диоде. Растягивающий характер отображения ($|F'(y)|>1$) обеспечивает хаотический режим колебаний. Процесс представляет собой последовательность цугов нарастающих колебаний, причем число осцилляций в каждом цуге различно и является хаотической величиной.

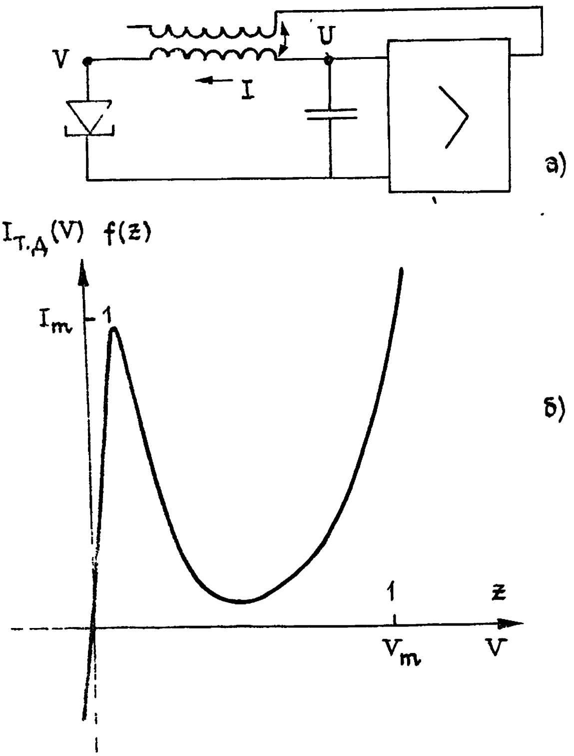

Рис. 1.

В присутствии шума процедура перехода к отображению последования не обоснована математически строго. Однако при малом шуме процесс мало отличается от чисто динамического. Поэтому для его описания можно по-прежнему использовать отображение рис. 2, добавив шум [6]. В результате получаем дискретное одномерное отображение с шумом

$$y_{n+1} = F(y_n) + g\xi_n, \qquad (2)$$

где g^2 пропорционально интенсивности шума, ξ_n — последовательность независимых случайных величин, $\langle\xi\rangle=0$, $\langle\xi^2\rangle=1$. Уравнение (2) является основным для описания статистических характеристик автоколебаний генератора в присутствии шума.

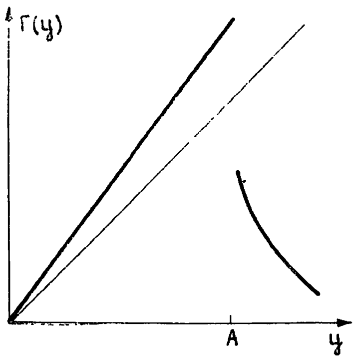

Рис. 2.

3. При выводе статистических характеристик системы (2) будем исходить из установленных в работе [7] общих соотношений для дискретных отображений с шумом. Обозначим функцию распределения случайной величины ξ через $V(\xi)$. Тогда уравнение для эволюции плотности вероятности $P(y, n)$ величины y имеет вид

$$P(y, n+1) = \int duK(y, u)\, P(u, n)\,, \tag{3}$$

где $K(y, u) = g^{-1}V\{g^{-1}[y-F(u)]\}$. В пределе $n\to\infty$ любое достаточно гладкое начальное распределение стремится к инвариантной плотности вероятности $P_0(y)$. Однако для нахождения некоторых статистических характеристик знания $P_0(y)$ недостаточно. Например, важной и легко экспериментально наблюдаемой характеристикой является распределение по числу осцилляций в цуге $W(n)$ [3,8]. В детерминированной системе ($g\equiv 0$) число колебаний в цуге, на единицу большее числа итераций отображения с $y<A$, является однозначной функцией начальной точки цуга (т. е. точки y_n, для которой $y_{n-1}>A$). Поэтому для определения $W(n)$ достаточно знать $P_0(y)$. Однако при $g\neq 0$ ситуация меняется. Здесь возникает статистическая задача о выходе из области. Действительно, пусть цуг начинается с некоторой точки $y<A$. Тогда число колебаний в цуге на единицу больше числа итераций отображения (2) в области $y<A$, и из-за шума оно не является детерминированной функцией от y. Имеет смысл говорить о вероятности $Q(y, n)$ того, что это число равно n. Очевидно, должно выполняться условие нормировки

$$\sum_{n=1}^{\infty} Q(y, n) = 1\,. \tag{4}$$

Нормированное распределение начальных амплитуд в цуге $P_1(y)$ определяется по инвариантной функции распределения:

$$P_1(y) = \frac{\bar{P}_1(y)}{\int \bar{P}_1(y)\,dy}\,, \quad \bar{P}_1(y) = \int_{u>A} duK(y, u)P_0(u)\,. \tag{5}$$

Зная $P_1(y)$ и $Q(y, n)$, можно найти искомую функцию распределения чисел колебаний в цуге:

$$W(n) = \int P_1(y)\,Q(y, n-1)\,dy\,. \tag{6}$$

Нетривиальная задача состоит в вычислении $Q(y, n)$. Для нахождения этой функции используем выведенное в [7] уравнение для переходной вероятности. Пусть $p(u, y; k)$ — вероятность того, что за k шагов система переходит из точки y в точку u, оставаясь при этом все время в заданной области фазового пространства D (в нашем случае D — это область $y<A$). Эта величина удовлетворяет уравнению [7]

$$p(u, y; k) = \int_D dwK(w, y)\,p(u, w; k-1)\,. \tag{7}$$

Тогда вероятность того, что из точки y система ровно за n итераций покинет область D, равна

$$Q(y, n) = \int_D du[p(u, y; n) - p(u, y; n+1)]\,. \tag{8}$$

Подставляя (7) в (8), после несложных преобразований получим рекуррентное уравнение для $Q(y, n)$

$$Q(y, n) = \int_D duK(u, y)Q(u, n-1) \tag{9}$$

с начальным условием

$$Q(y,1)=1-\int\limits_D K(u,y)du\,. \tag{10}$$

Отметим, что в (9) аргументы в ядре K переставлены по сравнению с (3). Полученные формулы решают поставленную задачу. Функции $Q(y,n)$ находятся из (9), (10), начальное распределение $P_1(y)$ определяется из (5), инвариантное распределение $P_0(y)$ находится из (3).

4. Рассмотрим случай малого шума, используя метод возмущений. Пусть функция распределения шума $V(\xi)$ — достаточно быстро убывающая симметричная функция. Тогда при $g\to 0$ можно использовать так называемое дифференциальное приближение

$$\begin{gathered}\frac{1}{g}V\left(\frac{y}{g}\right)=\delta(y)+\frac{1}{2}g^2\delta''(y),\\ K(y,u)=\delta(y-F(u))+\frac{1}{2}g^2\delta''(y-F(u)).\end{gathered} \tag{11}$$

Пусть $P_0(y)=P_0^0(y)+g^2P_0^1(y)$, где $P_0^0(y)$ — инвариантная плотность вероятности в отсутствие шума. Подставляя это выражение вместе с (11) в (3), получим для поправки $P_0^1(y)$:

$$P_0^1(y)=\frac{1}{2}\,\frac{P_0^{0''}(u)}{|F'(u)|},\quad u=F^{-1}(y)\,. \tag{12}$$

Аналогичное выражение получаем для поправки к функции распределения начальных амплитуд в цуге $P_1(y)=\overline{P}_1^0(y)+g^2\overline{P}_1^1(y)$:

$$\overline{P}_1^1(y)=\frac{1}{2}\,\frac{P_0^{0''}(u)}{|F'(u)|},\quad u=F^{-1}(y),\quad u>A\,. \tag{13}$$

При определении функций $Q(y,n)$ воспользуемся линейностью отображения в области D: $F(y)=ay$. Тогда (9) с учетом (11) принимает вид

$$Q(y,n)=Q(ay,n-1)+\frac{1}{2}g^2Q''(ay,n-1) \tag{14}$$

с начальным условием

$$Q(y,1)=\theta(ay-A)+\frac{1}{2}g^2\delta'(ay-A),$$

где θ — функция Хевисайда.

Итерируя (14), получим выражение для $Q(y,n)$ в явном виде:

$$\begin{gathered}Q(y,n)=Q^0(y,n)+g^2Q^1(y,n)=\theta(A-a^{n-1}y)\theta(a^ny-A)+\\ +\frac{1}{2}g^2\left[\frac{1-a^{2n}}{1-a^2}\delta'(a^ny-A)+\frac{1-a^{2n-2}}{1-a^2}\delta'(A-a^{n-1}y)\right].\end{gathered} \tag{15}$$

В результате, подставляя (15) в (6), получим

$$W(n)=W^0(n)+g^2W^1(n)\,, \tag{16}$$

где

$$W^0(n)=\int P_1^0(y)Q^0(y,n-1)dy\,,$$

$$W^1(n)=\int(P_1^1(y)Q^0(y,n-1)+P_1^0(y)Q^1(y,n-1))dy\,.$$

Из (16) видно, что оба фактора — изменение инвариантной функции распределения и изменение времени достижения границы области — вносят вклад одного порядка в поправку к функции распределения чисел осцилляций в цуге.

Обратим внимание, что в результат входят производные от инвариантной функции распределения $P_0^0(y)$. Однако может случиться, что эта функция не дифференцируема в некоторых точках (см. [4]). Тогда дифференциальное приближение (11), строго говоря, не применимо. В этом случае можно, однако, в ответе (16) заменить величины вида $\delta'(\xi)$ функциями $d(g^{-1}V\times\times(\xi/g))/d\xi$. В результате интегрирования получается, что вклад от разрывов первого рода функции $P_0^0(y)$ будет порядка g, а не g^2, как от точек непрерывности.

Таблица 1

n	$W(n)$			
	$g=0$	$g=0{,}005$	$g=0{,}01$	$g=0{,}02$
2	0	0,03	0,03	0,09
3	0,524	0,5	0,47	0,47
4	0,476	0,44	0,44	0,34
5	0	0,03	0,06	0,09
6	0	0	0,0001	0,01

5. В заключение приведем результаты расчета $W(n)$ для конкретного отображения. Функция $F(y)$ была выбрана в виде $F(y)=ay$ при $y<1$, $F(y)=[a^2+a-1-y(a+1)]a^{-3}$ при $y>1$. При таком выборе параметров отображения инвариантная функция распределения выписывается аналитически [4, 5]; в цуге может быть 3 или 4 колебания, причем $W^0(3)=a/(1+a)$, $W^0(4)=1/(1+a)$. Численный расчет проводился по формулам (3), (5), (9), (10) при значении $a=1{,}1$ и при различных интенсивностях гауссова шума g. Из приведенных в табл. 1 значений $W(n)$ видно, как с увеличением g «расширяется» функция распределения $W(n)$ (это явление экспериментально наблюдалось в [8]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Рабинович М. И. — УФН, 1978, **125**, № 1, с. 123.
2. Crutchfield J. P., Farmer J. D., Huberman B. A. — Physics Reports, 1982, **92**, № 2, p. 45.
3. Кияшко С. В., Пиковский А. С., Рабинович М. И. — Радиотехника и электроника, 1980, **25**, № 2, с. 336.
4. Pikovsky A. S., Rabinovich M. I. — Physica D, 1981, **2**, № 1, p. 8.
5. Пиковский А. С. Диссертация, Горький, Гос. ун-т, 1982.
6. Апресян Л. А., Кравцов Ю. А., Рабинович М. И. — Радиотехника и электроника, 1984, **29**, № 3, с. 473.
7. Haken H., Wunderlin A. — Zeit. Physik B, 1982, **46**, № 2, p. 181.
8. Кравцов Ю. А., Полянина Т. Д., Эткин В. С. — Радиотехника и электроника, 1984, **29**, № 3, с. 479.

Институт прикладной физики
АН СССР

Поступила в редакцию
27 ноября 1984 г.

EFFECT OF NOISE ON THE STATISTICS OF CHAOTIC OSCILLATIONS

A. S. Pikovskij

Effect of external noise on the statistics of simple electronic generator with a strange attractor is considered. It is shown that for the determination of macroscopic statistical properties one has 1) to found an invariant probability distribution and 2) to solve a statistical problem of the first escape time. In the case of small noise the corresponding corrections are analitically determined.