

УДК 621.372.81

**К УСТОЙЧИВОСТИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ КОЛЕБАНИЙ
В РЕЗОНАТОРЕ, ЗАПОЛНЕННОМ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СРЕДОЙ**

В. П. Бондарев

Методом интегральных уравнений решается задача об электромагнитных колебаниях в резонаторах, заполненных средой с изменяющейся по гармоническому закону диэлектрической проницаемостью. Для случая полного заполнения резонатора средой и малой амплитуде модуляции получено аналитическое выражение для напряженности электрического поля. Рассмотренный метод позволяет численно в широкой области изменения параметров нестационарной среды исследовать характеристики электромагнитного поля в резонаторе.

Исследование параметрических явлений в резонансных системах с изменяющимися во времени параметрами, начатое с работы [1], к настоящему времени проведено достаточно полно [2-4]. Вместе с тем теоретический и практический интерес представляет случай, когда нестационарная среда частично заполняет резонансную систему.

1. Рассмотрим прямоугольный резонатор, в котором существовали свободные гармонические колебания типа H_{m0n0} с частотой ω_{m0n0} . В момент времени $t=0$ в резонатор помещают вещество с диэлектрической проницаемостью

$$\epsilon(t) = \epsilon + \Delta\epsilon \cos 2\Omega t, \tag{1}$$

где $\Delta\epsilon$ и Ω — соответственно амплитуда и частота модуляции. При $t > 0$ поле в резонаторе удовлетворяет интегральному уравнению [5]

$$E(r, t) = E_0 + \hat{L} \int_0^t dt' \int_{V_1} G(r, t; r', t') [\epsilon(t') - \epsilon_1] E(r', t') dr', \tag{2}$$

где $\hat{L} = 1/\epsilon_1 (\text{grad div} - \epsilon_0 \mu_0 \epsilon_1 \partial^2 / \partial t^2)$, ϵ_1 — диэлектрическая проницаемость окружающего пространства, V_1 — объем, занимаемый средой, $G(r, t; r', t')$ — функция Грина.

Предположим, что вещество заполняет резонатор таким образом, что вариации поля вдоль оси y отсутствуют (рис. 1). Тогда y -составляющую поля внутри резонатора представим в виде

$$E(r, t) = \sum_{\alpha, \beta=1}^{\infty} E_{\alpha\beta}(t) \sin \frac{\alpha\pi}{a} x \sin \frac{\beta\pi}{l} z. \tag{3}$$

Функцию Грина с условием ортонормировки можно выбрать равной

$$G(r, t; r', t') = \frac{4}{al\epsilon_0 \mu_0 \epsilon_1} \sum_{m, n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\epsilon_1}}{\omega_{mn}} \sin \frac{\omega_{mn}}{\sqrt{\epsilon_1}} \times \\ \times (t-t') \Phi_{mn}(x, z) \Phi_{mn}(x', z'), \tag{4}$$

где a, l — размеры прямоугольного резонатора, ω_{mn} , $\Phi_{mn}(x, z)$ — соответственно собственная частота и собственные функции незаполненно-

го резонатора. Подставляя выражения (3) и (4) в интегральное уравнение (2), вычисляя интеграл по объему V_1 , занимаемому веществом, и учитывая ортогональность собственных функций резонатора, получим систему интегральных уравнений относительно $E_p(t)$:

$$E_p(t) = E_{p_0}(t) \delta_{pp_0} - \frac{1}{\varepsilon_1 \omega_p} \sum_{q=1}^{\infty} A_{pq} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^t \sin \tilde{\omega}_p(t-t') \times \\ \times [\varepsilon(t') - \varepsilon_1] E_q(t') dt', \quad p = 1, 2, 3, \dots, \quad (5)$$

где под индексами p, p_0, q необходимо понимать совокупность индексов m, n ; m_0, n_0 и α, β соответственно, A_{pq} — коэффициент, численно равный интегралу по объему V_1 , δ_{pp_0} — символ Кронекера, $\tilde{\omega}_p = \omega_p / \sqrt{\varepsilon_1}$.

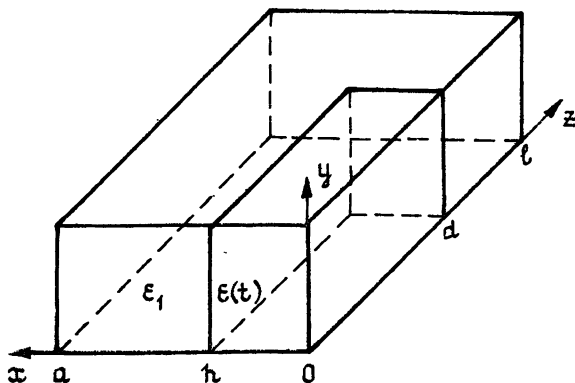


Рис. 1.

Так как диэлектрическая проницаемость изменяется во времени по периодическому закону, то $E_p(t)$ можно представить в виде ряда, удовлетворяющего условию Флоке:

$$E_p(t) = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} (U_{rp}^{+(s)} e^{i\omega_{rs}t} + U_{rp}^{-(s)} e^{-i\omega_{rs}t}), \quad (6)$$

где $\omega_{rs} = \omega_r + 2s\Omega$, ω_r — характеристический показатель r -го типа колебаний.

Подставляя (1), (6) в систему (5) и выполняя соответствующие преобразования, получим соотношение, в которое входят слагаемые с различной зависимостью от времени. Приравнявая слагаемые, пропорциональные $\exp(\pm i\omega_{rs}t)$ при $s=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, приходим к системе линейных однородных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов $U_{rq}^{\pm(s)}$:

$$\sum_{q=1}^{\infty} \left[A_{pq} \frac{1}{\varepsilon_1 \omega_{rs}^2 - \tilde{\omega}_p^2} (\varepsilon - \varepsilon_1)^s \omega_{rs}^2 + \delta_{pq} \right] U_{rq}^{\pm(s)} + \frac{\Delta \varepsilon}{2\varepsilon_1} \frac{\omega_{rs}^2}{\omega_{rs}^2 - \tilde{\omega}_p^2} \times \\ \times (U_{rq}^{\pm(s-1)} + U_{rq}^{\pm(s+1)}) = 0, \quad (7)$$

$$p=1, 2, 3, \dots, \quad s=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Условием существования нетривиального решения (7) является равенство нулю детерминанта, образованного из коэффициентов при $U_{rq}^{\pm(s)}$. Корни детерминанта определяют допустимые значения ω_r . По извест-

ными значениям ω_r определяются отношения амплитуд высших гармоник к амплитуде основной. Это приводит к следующим соотношениям:

$$U_{rp}^{\pm(s)} = g_{rp}^{(s)} U_r^{\pm(0)}, \quad g_{rr}^{(0)} = 1. \quad (8)$$

Приравнявая слагаемые, пропорциональные $\exp(\pm i\tilde{\omega}_p t)$, получим систему алгебраических уравнений

$$\sum_{r=1}^{\infty} \left[\sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{\omega_{rs} + \tilde{\omega}_p}{\omega_{rs}^2} g_{rp}^{(s)} U_r^{+(0)} - \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{\omega_{rs} - \tilde{\omega}_p}{\omega_{rs}^2} g_{rp}^{(s)} U_r^{-(0)} \right] = \frac{2}{\tilde{\omega}_p} E_{p_0} \delta_{pp_0}, \quad (9)$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} \left[\sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{\omega_{rs} - \tilde{\omega}_p}{\omega_{rs}^2} g_{rp}^{(s)} U_r^{+(0)} - \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{\omega_{rs} + \tilde{\omega}_p}{\omega_{rs}^2} g_{rp}^{(s)} U_r^{-(0)} \right] = 0,$$

$$p = 1, 2, 3, \dots,$$

связывающих амплитуду поля в невозмущенном резонаторе с амплитудами гармоник в возмущенном.

2. Решение дисперсионного уравнения. При полном заполнении резонатора средой коэффициенты $A_{pq} = 0$ при $p \neq q$ и $A_{pq} = 1$ при $p = q$, а индекс r не влияет на вид матричных коэффициентов в системе (7) и поэтому может быть опущен. Решая (7) для p -го типа колебаний и учитывая три центральных относительно $U_p^{(0)}$ уравнения, получим дисперсионное уравнение

$$\omega^2 - \frac{\hat{\omega}_p^2}{\omega^2} - \left(\frac{\Delta\varepsilon}{2\varepsilon} \right)^2 \frac{\omega^2 (\omega - 2\Omega)^2}{(\omega - 2\Omega)^2 - \hat{\omega}_p^2} - \left(\frac{\Delta\varepsilon}{2\varepsilon} \right)^2 \frac{\omega^2 (\omega + 2\Omega)^2}{(\omega + 2\Omega)^2 - \hat{\omega}_p^2} = 0 \quad (10)$$

и выражения для амплитуд временных гармоник

$$\frac{U_p^{\pm(-1)}}{U_p^{\pm(0)}} = - \frac{\Delta\varepsilon}{2\varepsilon} \frac{(\omega - 2\Omega)^2}{(\omega - 2\Omega)^2 - \hat{\omega}_p^2}, \quad (11)$$

$$\frac{U_p^{\pm(1)}}{U_p^{\pm(0)}} = - \frac{\Delta\varepsilon}{2\varepsilon} \frac{(\omega + 2\Omega)^2}{(\omega + 2\Omega)^2 - \hat{\omega}_p^2},$$

где $\hat{\omega}_p = \omega_p / \sqrt{\varepsilon}$ — собственная частота заполненного резонатора. Положив в качестве первого приближения $\omega = \hat{\omega}_p$, из (10) находим

$$\omega = \pm \hat{\omega}_p \sqrt{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta\varepsilon}{2\varepsilon} \right)^2 \frac{4\Omega^2 - 3\hat{\omega}_p^2}{\Omega^2 - \hat{\omega}_p^2}}. \quad (12)$$

Подставляя (12) в (11), получим

$$\frac{U_p^{\pm(-1)}}{U_p^{\pm(0)}} = \frac{\Delta\varepsilon}{2\varepsilon} \frac{(\hat{\omega}_p - 2\Omega)^2}{4\Omega(\hat{\omega}_p - \Omega)}, \quad \frac{U_p^{\pm(1)}}{U_p^{\pm(0)}} = - \frac{\Delta\varepsilon}{2\varepsilon} \frac{(\hat{\omega}_p + 2\Omega)^2}{4\Omega(\hat{\omega}_p + \Omega)}. \quad (13)$$

Из (12) следует, что модуляция среды приводит к изменению частоты основной гармоники. В зависимости от соотношения между Ω и $\hat{\omega}_p$ возможен сдвиг частоты как в сторону увеличения, так и в сторону уменьшения.

Выражения (12), (13) справедливы при условии, что $\Omega \neq \omega_p$. Если $\Omega = \omega_p$, т. е. выполнено условие параметрического резонанса, то уравнение (10) имеет комплексно-сопряженные корни

$$\omega = \Omega \pm i \frac{\Delta \varepsilon}{4\varepsilon} \Omega \quad (14)$$

и соответствующие амплитуды

$$\frac{U_p^{\pm(-1)}}{U_p^{\pm(0)}} = \mp i - \frac{3}{8} \frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon}, \quad \frac{U_p^{\pm(1)}}{U_p^{\pm(0)}} = -\frac{9}{16} \frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon}. \quad (15)$$

При подстановке (14) в (6) видно, что амплитуда поля в резонаторе экспоненциально нарастает со временем.

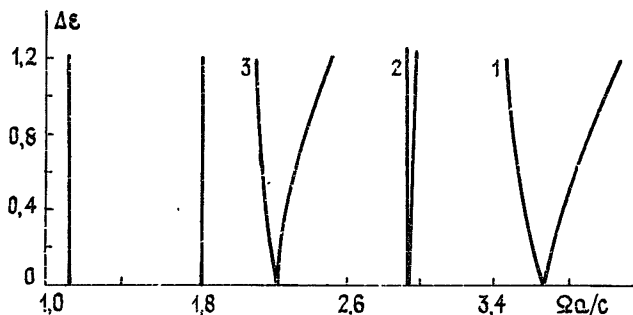


Рис. 2.

Составленный алгоритм расчета позволил использовать его и для численного анализа электромагнитных колебаний в резонаторе, частично заполненном нестационарной средой. Каждому r -му типу колебаний резонатора соответствует определенное значение характеристического показателя ω_r и зона неустойчивости, в которой амплитуда соответствующего типа колебаний неограниченно нарастает во времени. На рис. 2 показаны зоны неустойчивости для двух типов колебаний H_{101} и H_{102} частично заполненного резонатора с параметрами $\varepsilon=4,0$, $\varepsilon_1=1,0$, $h/a=0,8$, $d/a=l/a=1,0$ при учете пяти гармоник Флоке ($s=0, \pm 1, \pm 2$) и пяти поперечных собственных функций ($m=1, \dots, 5$). На рисунке цифры соответствуют следующим зонам: 1 — первая зона неустойчивости колебания H_{101} -типа; 2 — зона неустойчивости, соответствующая комбинационному резонансу колебаний H_{101} - и H_{102} -типов; 3 — первая зона неустойчивости для колебания H_{102} -типа. Аналогичный вид будут иметь зоны и для последующих более высоких типов колебаний. Значения частот, к которым стягиваются зоны неустойчивости, могут быть найдены из соотношения [6]

$\Omega = (\omega_i + \omega_j) / 2N$, $N=1, 2, 3, \dots$; $1 \leq i \leq j \leq M$; ω_i, ω_j — собственные частоты частично заполненного резонатора, M — число учитываемых типов колебаний. При $i=j$ Ω являются частотами основного параметрического резонанса, где характеристический показатель соответствующего типа колебаний является комплексной величиной (зона 1 для колебания H_{101} и зона 3 — для H_{102}). При $i \neq j$ значения Ω соответствуют частотам комбинационного резонанса (зона 2), где одновременно для двух мод H_{101} и H_{102} характеристический показатель ω_r является комплексной величиной. Характерной особенностью диаграммы неустойчивости является вырождение в линию всех высших зон параметрического резонанса, кроме первой и зон комбинационного резонанса.

Положение и ширина зон неустойчивости зависят от параметров нестационарной среды. Зоны основного параметрического резонанса расширяются, когда среда перемещается в максимум напряженности электрического поля соответствующего типа колебаний, где наиболее сильно проявляется эффект концентрации поля. Ширина зон комбинационного резонанса рассчитывается для каждого конкретного случая отдельно. Однако можно отметить, что «широкие» зоны для рассмотренных типов колебаний H'_{101} и H_{102} получаются, когда среда располагается между максимумами напряженности электрического поля этих колебаний ($x/a \approx 0,35$) и вырождается в линию при полном заполнении.

В зависимости от характера заполнения зоны могут перемещаться вдоль оси $\Omega a/c$ и пересекаться между собой. На рис. 3 приведен частный случай зон неустойчивости, соответствующих основному параметрическому резонансу колебаний H_{102} и H_{201} резонатора с параметрами $\varepsilon = 4,0$, $\varepsilon_1 = 1,0$, $l/a = 1,0$, $h/a = 0,9$, $d/a = 0,7$ (зона комбинационного резонанса ввиду ее малой ширины на рисунке не приведена). Особенностью зон является наличие области пересечения, где одновременно два типа колебаний, так же как и при комбинационном резонансе, являются неустойчивыми. Но, в отличие от комбинационного резонанса, в области пересечения действительные части характеристических показателей взаимодействующих типов колебаний совпадают, в то время как мнимые части различны. С ростом номера колебания возможно пересечение нескольких зон неустойчивости. В предельном случае $M \rightarrow \infty$ значения Ω , при которых возможна параметрическая неустойчивость, стремятся всюду плотно заполнить ось $\Omega a/c$.

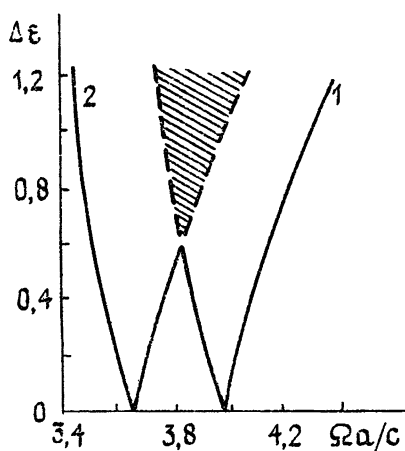


Рис. 3.

3. Поле в резонаторе, заполненном периодически нестационарной средой. Решение (6) представляет собой суперпозицию электромагнитных колебаний с различными частотами и амплитудами. При $\Delta\varepsilon \ll \varepsilon$ для резонатора, полностью заполненного нестационарной средой, в (6) можно ограничиться тремя гармониками с $s=0, \pm 1$ и решение представить в виде

$$E_p^\pm(t) = U_p^{\pm(0)} \left(\frac{U_p^{\pm(-1)}}{U_p^{\pm(0)}} e^{\mp i 2\Omega t} + 1 + \frac{U_p^{\pm(1)}}{U_p^{\pm(0)}} e^{\pm i 2\Omega t} \right) e^{\pm i \omega t}, \quad (16)$$

где знаки «+» и «-» соответствуют двум линейно независимым решениям. Подставляя значения (12), (13) в (16) и выделяя действительную часть этого выражения, с точностью до $(\Delta\varepsilon)^2$, получим

$$E_p^\pm(t) = C_p(t) U_p^{\pm(0)} \cos[\omega_p t - \arctg \varphi_p(t)], \quad (17)$$

где

$$C_p(t) = 1 + \frac{\Delta\varepsilon}{4\varepsilon} \frac{4\Omega^2 - 3\omega_p^2}{\omega_p^2 - \Omega^2} \cos 2\Omega t; \quad (18)$$

$$\varphi_p(t) = \frac{\Delta\varepsilon}{4\varepsilon} \frac{\omega_p^3}{\Omega(\omega_p^2 - \Omega^2)} \sin 2\Omega t. \quad (19)$$

Для определения абсолютных значений $U_p^{\pm(0)}$ через амплитуду поля в невозмущенном резонаторе необходимо решить систему (9). При полном заполнении резонатора средой и малой амплитуде модуляции, с учетом выражений (12) и (13), для (9) получим следующее решение:

$$U_p^{+(0)} = \frac{\hat{\omega}_p^3}{2\tilde{\omega}_p^2} \left(\frac{\hat{\omega}_p + \tilde{\omega}_p}{\hat{\omega}_p^2} - \frac{\Delta\varepsilon}{4\varepsilon} \frac{\hat{\omega}_p - \tilde{\omega}_p}{\hat{\omega}_p^2 - \Omega^2} \right) E_{p_0},$$

$$U_p^{-(0)} = \frac{\hat{\omega}_p^3}{2\tilde{\omega}_p^2} \left(\frac{\hat{\omega}_p - \tilde{\omega}_p}{\hat{\omega}_p^2} - \frac{\Delta\varepsilon}{4\varepsilon} \frac{\hat{\omega}_p + \tilde{\omega}_p}{\hat{\omega}_p^2 - \Omega^2} \right) E_{p_0}.$$
(20)

Используя выражения для $E_p^{\pm}(t)$, определенные выше, окончательно для поля в резонаторе получим

$$E_p(t) = \frac{\hat{\omega}_p^2}{\tilde{\omega}_p^2} \left(1 - \frac{\Delta\varepsilon}{4\varepsilon} \frac{\hat{\omega}_p^2}{\hat{\omega}_p^2 - \Omega^2} + \frac{\Delta\varepsilon}{4\varepsilon} \frac{4\Omega^2 - 3\hat{\omega}_p^2}{\hat{\omega}_p^2 - \Omega^2} \cos 2\Omega t \right) \times$$

$$\times E_{p_0} \cos \left[\hat{\omega}_p t - \arctg \left(\frac{\Delta\varepsilon}{4\varepsilon} \frac{\hat{\omega}_p^3}{\Omega(\hat{\omega}_p^2 - \Omega^2)} \sin 2\Omega t \right) \right].$$
(21)

Выражение (21) можно рассматривать как электромагнитное колебание с несущей частотой $\hat{\omega}_p$, модулированное по амплитуде и частоте. В стационарном случае, как следует из этого выражения, в резонаторе происходят гармонические колебания с амплитудой $\varepsilon_1/\varepsilon E_{p_0}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

При частичном заполнении резонатора нестационарной средой система (7) решалась численно. Вычисление характеристического показателя проводилось методом половинного деления с точностью 10^{-7} . Несмотря на то, что скорость сходимости этого метода невелика, однако она обеспечена для любых непрерывных функций $f(\omega_p)$. Алгоритм определения характеристических показателей содержал стандартную программу вычисления определителя методом исключения.

При решении задачи рассматривалась сходимость искомых величин при последовательно возрастающих порядках редукции. Так как аналитическую оценку сходимости результатов вычислений получить не удается, то исследование проводилось численным методом. Данные таблицы иллюстрируют сходимость характеристического показателя на границе зоны неустойчивости для низшего типа колебаний H_{101} частично заполненного резонатора в зависимости от амплитуды модуля-

Таблица 1

$\Delta\varepsilon$	N_1	$\omega_r a/c, N_2=5$	N_2	$\omega_r a/c, N_1=5$
0,4	3	2,31979	3	2,31716
	5	2,31881	5	2,31881
	7	2,31875	7	2,31881
0,8	3	2,39384	3	2,38458
	5	2,38735	5	2,38735
	7	2,37964	7	2,39371
1,2	3	2,48363	3	2,46496
	5	2,48283	5	2,48283
	7	2,48277	7	2,48350

ции при следующих значениях: $\varepsilon=4,0$, $\varepsilon_1=1,0$, $h/a=0,8$, $d/a=l/a=1,0$. В таблице значения $\omega_r a/c$ вычислены при учете $N_2=5$ гармоник Флоке и различном числе типов колебаний, а также при фиксированном числе типов колебаний $N_1=5$ с увеличением числа гармоник Флоке. Из приведенной таблицы можно определить скорость сходимости и относительную величину ошибки вычисления характеристического показателя в сравнении с ω_r^{\max} , проведенном при максимальном порядке усечения. Для получения количественных результатов о скорости сходимости процесса усечения необходимо рассмотреть поведение разности результатов при двух последовательных усечениях. Как следует из табл. 1, относительная ошибка при $\Delta\varepsilon=1,2$ и $N_1=N_2=5$ меньше 0,7%.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мандельштам Л. И. Полное собрание трудов. Т. 3. — М.: АН СССР, 1955.
2. Ахманов С. А., Хохлов Р. В. Проблемы нелинейной оптики — М.: АН СССР, 1964.
3. Ярич А. Квантовая электроника и нелинейная оптика. — М.: Сов. радио, 1973.
4. Люиссел У. Связанные и параметрические колебания в электронике. — М.: ИЛ, 1963.
5. Тыжненко А. Г., Хижняк Н. А. — Радиотехника и электроника, 1973, 18, № 1, с. 19.
6. Якубович В. А., Старжинский В. М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложение. — М.: Наука, 1972.

Днепропетровский государственный
университет

Поступила в редакцию
30 октября 1984 г.

ON STABILITY OF ELECTROMAGNETIC OSCILLATIONS IN THE RESONATOR, FILLED WITH NON-STABLE MEDIUM

V. P. Bondarev

The problem of electromagnetic oscillations in the resonator, filled with media having harmonically varying dielectric permittivity is solved by the method of integral equations. The analytical expression for the intensity of an electric field has been obtained for the case of complete filling of the resonator with the media and low modulation amplitude. This method permits one to analyse electromagnetic fields in the resonator, filled with non-stable medium in the wide range of parameter variations.