

УДК 538:56

ИМПЕДАНС ШЕРОХОВОЙ ПРОВОДЯЩЕЙ ГРАНИЦЫ
В СЛОИСТОЙ СРЕДЕ

Н. П. Жук, О. А. Третьяков, А. Г. Яровой

Построен оператор эквивалентного импеданса шероховатой поверхности, ограничивающей слоистую среду, и выяснена физическая картина его формирования. Приведен пример применения этого оператора для вычисления затухания собственных волн интегральнооптического волновода с шероховатой подложкой.

С тех пор как Басс предложил [1] эквивалентные граничные условия (ЭГУ) для электромагнитного поля на шероховатой поверхности с флуктуациями импеданса, появилось большое число работ по этому вопросу. В работе [2] ЭГУ рассмотрены с точки зрения теории многократного рассеяния, в [3, 4] выдвинута концепция эквивалентного импеданса (ЭИ) шероховатой проводящей поверхности. Однако в этих и других работах по данной тематике среда, примыкающая к шероховатой поверхности, считалась однородной. Для задач, где необходимо учитывать пространственную неоднородность среды, ЭИ еще не был построен. Причиной этому является более сложный характер спектра собственных волн в неоднородной среде по сравнению со спектром для однородной среды [5]. Между тем задачи такого рода содержательны физически и представляют практический интерес для многих приложений — например в интегральной оптике, дефектоскопии и др. Изложим основные результаты данной работы. Для расположенной в слоистой среде проводящей границы со статистически неоднородными, однородными и изотропными шероховатостями построен ЭИ — формулы (7), (8), (9) соответственно. Его эрмитовская часть описывает ослабление электромагнитного поля в соответствии с «законом сохранения энергии» (22). Физически она образуется как результат рассеяния в распространяющиеся собственные волны, вклад каждой из которых определяется обобщенной характеристикой рассеяния шероховатостей. Соотношения (17), связывающие эти величины с сечениями и индикатрисой рассеяния шероховатостей, представляют самостоятельный интерес. Вклады волн дискретной и непрерывной частей спектра связаны между собой принципом аналитического продолжения в форме (23). Рассмотрен пример — волновод интегральной оптики, для которого найдены комплексные добавки к собственным волновым числам, обусловленные шероховатостями подложки — формула (24).

1. Среда с вещественными материальными параметрами $\varepsilon(z)$, $\mu(z)$, безграничная по $\mathbf{r} = (x, y)$, простирается вплоть до $z = +\infty$, где ее параметры стремятся к постоянным значениям ε_∞ , μ_∞ , и ограничена проводящей поверхностью $z = \zeta(\mathbf{r})$. Случайная функция ζ с нулевым средним значением описывает малые и пологие неровности — шероховатости — гладкой (подстилающей) поверхности $z = 0$, $B(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \langle \zeta(\mathbf{r}) \zeta(\mathbf{r}') \rangle$ — функция корреляции, угловые скобки означают усреднение по ансамблю реализаций ζ .

Случайное монохроматическое ($\sim e^{-i\omega t}$) поле $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{R}), \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{R})$, $\mathbf{R} = (\mathbf{r}, z)$ заданных детерминированных источников \mathbf{j}, \mathbf{M} в такой среде подчиняется уравнениям Максвелла

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{E}} - ik_0 \mu \tilde{\mathbf{H}} = -(4\pi/c) \mathbf{M}, \quad (1)$$

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{H}} + ik_0 \epsilon \tilde{\mathbf{E}} = (4\pi/c) \mathbf{j}, \quad k_0 = \omega/c$$

и условиям излучения (в форме принципа предельного поглощения) на бесконечности. Кроме того, при $z=\xi$ составляющая поля $\tilde{\mathbf{E}}$, касательная к этой поверхности, обращается в нуль.

Положим, что функции $\epsilon(z)$, $\mu(z)$ можно продолжить гладким образом с границы $z=\xi$. Тогда из аналитичности решений уравнений Максвелла следует, что поле $\tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{H}}$ допускает аналитическое продолжение с этой же границы. Граничное условие на случайной поверхности $z=\xi$ с точностью до малых членов $O(\xi^2)$ оказывается эквивалентным соотношению [2]

$$\tilde{\mathbf{E}}_t(\mathbf{r}) = \tilde{\mathbf{L}}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{z}_0 \times \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) \quad (2)$$

на подстилающей поверхности $z=0$ со случайным импедансом в виде дифференциального оператора

$$\tilde{\mathbf{L}}(\mathbf{r}) = - [1/ik_0 \epsilon(0)] [k^2(0) \zeta(\mathbf{r}) + \nabla_t \zeta(\mathbf{r}) \nabla_t]. \quad (3)$$

Здесь индекс t обозначает горизонтальную (компланарную плоскости $z=0$) составляющую вектора; два рядом стоящих вектора образуют диаду.

Введем понятие ЭИ, исходя из краевой задачи для статистически среднего поля $\mathbf{E} \equiv \langle \tilde{\mathbf{E}} \rangle$, $\mathbf{H} \equiv \langle \tilde{\mathbf{H}} \rangle$. Пусть \hat{L}_e — оператор, определяемый тождеством

$$\langle \tilde{\mathbf{L}}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{z}_0 \times \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) \rangle \equiv \hat{L}_e \cdot \mathbf{z}_0 \times \mathbf{H}(\mathbf{r}). \quad (4)$$

С его помощью задача для среднего поля приводится к обычному импедансному виду и включает неоднородные уравнения Максвелла (1) и ЭГУ канонического вида

$$\mathbf{E}_t(\mathbf{r}) = \hat{L}_e \cdot \mathbf{z}_0 \times \mathbf{H}(\mathbf{r}), \quad z=0. \quad (5)$$

Таким образом, оператор ЭИ \hat{L}_e учитывает отличие свойств гладкой и шероховатой границ по отношению к среднему полю. Отсюда и из (1)—(2) немедленно следует также краевая задача для флуктуационного поля $\mathbf{E}_f = \tilde{\mathbf{E}} - \mathbf{E}$, $\mathbf{H}_f = \tilde{\mathbf{H}} - \mathbf{H}$, которое подчиняется уравнениям (1) с нулевой правой частью и неоднородными ЭГУ на подстилающей поверхности $z=0$,

$$\mathbf{E}_{ft}(\mathbf{r}) = \hat{L}_e \cdot \mathbf{z}_0 \times \mathbf{H}_f(\mathbf{r}) + \tilde{\mathbf{L}}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{z}_0 \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) \quad (6)$$

со средним полем в правой части. Здесь оператор ЭИ учитывает ослабление флуктуационного поля за счет рассеяния на шероховатостях.

2. Общая задача об ЭГУ на шероховатой границе раздела двух магнитоэлектрических сред решена в нашей работе [6]. Очевидно,

что выражения для \hat{L}_e получаются из результатов этой работы, если в них выполнить предельный переход к среде, описанной выше. Опуская несложные промежуточные выкладки, приводим окончательные соотношения. В общем случае оператор \hat{L}_e оказывается интегродифференциальным. Его действие на произвольную функцию $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ происходит по правилу

$$\hat{L}_e \cdot u(r) = [c/4\pi k_0^2 \varepsilon^2(0)] [k^2(0) + \nabla_t \tilde{\nabla}_t] \cdot$$

(7)

$$\cdot \int z_0 \times \hat{G}_{mm}(r, r') \times z_0 \cdot [k^2(0)B(r, r') + \nabla_t' B(r, r') \nabla_t'] \cdot u(r') dr'$$

Здесь $\hat{G}_{mm}(R, R')$ — одна из функций Грина уравнений Максвелла для задачи с гладкой границей, построенная в [7]: ∇_t, ∇_t' действуют на все функции r или r' справа от этих операторов, а $\tilde{\nabla}_t$ — на переменную r только в \hat{G}_{mm} , z_0 — орт по оси z , $k^2(z) = k_0^2 \varepsilon(z) \mu(z)$.

Поверхность, описываемая (7), с электродинамической точки зрения относится к классу пространственно диспергирующих границ из-за нелокальности ЭИ. Она обусловлена двумя факторами: статистической корреляцией шероховатостей в различных точках и нелокальной связью между значениями случайного электромагнитного поля на шероховатой границе и подстилающей поверхности. Последнее приводит к тому, что усредненные граничные условия (2) сами по себе являются нелокальными. Кроме того, упомянутая граница является неоднородной из-за статистической неоднородности шероховатостей. Уместно подчеркнуть, что это может быть из-за конечных размеров шероховатого участка, внутри которого неровности могут быть однородными.

Из (7) следует, что оператор \hat{L}_e является симметричным в смысле тождества для достаточно произвольных функций u, v : $\int [u(r) \cdot \hat{L}_e \cdot v(r) - v(r) \cdot \hat{L}_e \cdot u(r)] dr = 0$.

Если шероховатости являются статистически однородными, $B(r, r') \equiv B(r - r')$, ядро интегро-дифференциального оператора \hat{L}_e инвариантно относительно сдвига. Это означает, что однородные уравнения Максвелла (1) имеют решение, подчиняющееся ЭГУ (5), в виде пространственных гармоник среднего поля $E(x, z) \exp(ix \cdot r)$, $H(x, r) \exp(ix \cdot r)$. Здесь $x = (x_x, x_y)$ — волновой вектор, вообще говоря, комплекснозначный, для него используется также представление $x = \kappa n$ с $\kappa = \sqrt{\kappa_x^2 + \kappa_y^2}$ и $n = (\cos \varphi, \sin \varphi)$. В x -представлении ЭИ описывается диадной функцией $\hat{L}_e(x)$ в соответствии с ЭГУ $E_i(x, z) = \hat{L}_e(x) \cdot z_0 \times H(x, z)$, $z = 0$, которые вытекают из (5). Статистическая однородность шероховатостей приводит, таким образом, к однородности диспергирующей границы. В математическом плане эти ЭГУ сводятся к краевым условиям со спектральным параметром. Здесь в последнее время получены значительные результаты [8].

В явном виде диада $\hat{L}_e(x)$ представляется как интеграл по всей вещественной плоскости волновых чисел от некоторой функции $\hat{L}(x, x')$:

$$\hat{L}_e(x) = \int \hat{L}(x, x') dx'$$

$$\hat{L}(x, x') = [c/4\pi i k_0^2 \varepsilon^2(0)] B(x - x') [k^2(0) -$$

$$- x x'] \cdot z_0 \times \hat{G}_{mn}(x', z, z') \times z_0 \cdot [k^2(0) - x' x']|_{z, z' \rightarrow +0}$$

Здесь $B(x) = (2\pi)^{-2} \int e^{-ix \cdot r} B(r) dr$ — энергетический спектр неровностей, $\hat{G}_{mn}(x, z, z') = \int e^{-ix \cdot (r - r')} \hat{G}_{mn}(R, R') dr$ — фурье-образ функции Грина. На вещественной плоскости x' подынтегральное выражение в (8) не имеет особенностей в силу предположения $\text{Im } k_0 = +0$. Симметрия ЭИ формулируется в виде $\hat{L}_e(x) = \hat{L}_e^T(x)$, «т» — транспони-

рование. Из (8) следует, что $\hat{L}_e(\mathbf{x}) = \hat{L}_e(-\mathbf{x})$, что означает эквивалентность электродинамических свойств в границы в двух взаимно противоположных направлениях.

Для статистически изотропных шероховатостей в «естественном» базисе $\mathbf{n}, \mathbf{z}_0 \times \mathbf{n}$ ($\mathbf{n} = \mathbf{x}/x$) физически неэквивалентными оказываются только два направления — вдоль волнового вектора и поперек него.

Поэтому диада $\hat{L}_e(\mathbf{x})$ сводится к двум скалярным функциям $\hat{L}_{l,t}(\mathbf{x})$,

$$\hat{L}_e(\mathbf{x}) = L_t(\mathbf{x}) \mathbf{n} \mathbf{n} + L_l(\mathbf{x}) \mathbf{z}_0 \times \mathbf{n} \mathbf{z}_0 \times \mathbf{n}, \quad (9)$$

свойственным для пространственно диспергирующей изотропной границы. Функции $L_{l,t}(\mathbf{x})$ при этом оказываются четными по переменной x .

Проведенное здесь рассмотрение позволяет включить построенную краевую задачу для среднего поля в рамки общей теории волн в средах с пространственной дисперсией.

3. Рассмотрим физические процессы, приводящие к формированию ЭИ. Для этого найдем связь ЭИ с физическими характеристиками процесса рассеяния. Для слоистой среды они вводятся своеобразно, с учетом существования в ней собственных волн дискретной и непрерывной частей спектра [5].

Решим вспомогательную задачу. Пусть шероховатости занимают ограниченный участок S . Выберем первичное поле простейшего вида, существующее в среде с гладкой границей, а именно — пространственную гармонику $E_0(\mathbf{R}) = E_\alpha(x_0, z) e^{i\mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{r}}$, $H_0(\mathbf{R}) = H_\alpha(x_0, z) e^{i\mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{r}}$, бегущую в направлении $\mathbf{n}_0 = (\cos \varphi_0, \sin \varphi_0)$, $0 \leq \varphi_0 \leq 2\pi$. Здесь $\mathbf{x}_0 = x_0 \mathbf{n}$, $0 \leq x_0 < +\infty$ — вещественный волновой вектор, α указывает поляризацию: $\alpha = s$ или p , если соответственно вектор H_0 или E_0 компланарен плоскости $z=0$. Набегая на участок S , такая волна рассеивается во флуктуационную компоненту. Найдем полный поток средней мощности флуктуационного поля в направлении \mathbf{n} от шероховатого участка в точку наблюдения \mathbf{R} :

$$J_\alpha(x_0, \mathbf{n}) = (c/8\pi) \operatorname{Re} \int_0^{+\infty} E_f(\mathbf{R}') \times H_f^*(\mathbf{R}') \cdot \mathbf{n} dz', \quad (10)$$

где $\mathbf{n} = (\cos \varphi, \sin \varphi) = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)/D$, \mathbf{r}_0 — радиус-вектор центра S , $D = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$.

Пренебрежем ослаблением флуктуационного поля и отличим среднего и первичного полей в граничных условиях (6) и предположим, что шероховатости внутри S статистически однородны с характерным размером, много меньшим размеров шероховатого участка. С помощью аппарата функций Грина уравнений Максвелла [7] в зоне «разделения спектров» [2] получаем представление для $J_\alpha(x_0, \mathbf{n})$ в виде «суммы» вкладов за счет рассеяния в собственные волны регулярной слоистой среды:

$$J_\alpha(x_0, \mathbf{n}) = [c/16 k_0 \epsilon^2(0)] (S/D) \sum_{\beta=s,p} \sum_{\nu} B(x_0 - x_\nu) |H_\beta(\nu, \mathbf{n}, z) \times \mathbf{z}_0 \cdot [k^2(0) - x_\nu x_0] \cdot \mathbf{z}_0 \times H_\alpha(x_0, z)|^2_{z=0}. \quad (11)$$

Каждая из этих волн (см. Приложение), отвечающая собственному волновому числу x_0 , распространяется в направлении \mathbf{n} , $\mathbf{x}_\nu = x_\nu \mathbf{n}$. По индексу ν проводится обычное суммирование по точкам ν_k дискретного спектра и интегрирование по непрерывному спектру распространяющихся волн излучения: $\sum_{\nu} \equiv \sum_{\nu_k} + \int_0^{\pi/2} \dots d\nu$. Спектральный параметр ν вводится соотношением $x_0 = k_\infty \cos \nu$. Для волн излучения он имеет

четкий физический смысл угла скольжения, под которым эти волны распространяются в $z = +\infty$. Внешний знак суммы в (11) учитывает вклад волн обеих поляризаций и, вообще говоря, излишен, если различать спектральные параметры различных поляризаций. В (11) S — площадь шероховатого участка.

Дифференциальное сечение рассеяния разумно ввести следующим образом:

$$\sigma_z(\mathbf{x}_0, \mathbf{n}) = (D/S) J_\alpha(\mathbf{x}_0, \mathbf{n})/J_\alpha(\mathbf{x}_0), \quad (12)$$

где $J_\alpha(\mathbf{x}_0)$ — некоторый параметр, который определяется мощностью, переносимой первичной волной. К примеру, если она представляет собой волну дискретного спектра регулярной среды, J_α удобно положить равным полному потоку энергии этой волны в направлении распространения:

$$J_\alpha(\mathbf{x}_0) = (c/8\pi) \operatorname{Re} \int_0^{+\infty} \mathbf{E}_z(\mathbf{x}_0, z) \times \mathbf{H}_z^*(\mathbf{x}_0, z) \cdot \mathbf{n}_0 dz. \quad (13)$$

Для распространяющейся волны излучения $J_\alpha(\mathbf{x}_0)$ есть величина плотности потока энергии при $z = +\infty$ в той ее компоненте, которая физически отвечает волне, приходящей из $z = +\infty$.

Из (11) следует, что дифференциальное сечение рассеяния представляет собой «сумму» парциальных сечений рассеяния в волны дискретного спектра $\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_{\nu k})$ и распространяющиеся волны излучения $\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{x}_0, \mathbf{n}_0, \nu)$ обеих поляризаций ($\beta = s, p$):

$$\sigma_\alpha(\mathbf{x}_0, \mathbf{n}) = \sum_\beta \left[\sum_{\nu k} \sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_{\nu k}) + \int_0^{\pi/2} \sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{x}_0, \mathbf{n}, \nu) \cos \nu d\nu \right]. \quad (14)$$

Конкретный вид $\sigma_{\alpha\beta}$ легко восстановить из (11).

Понятие индикатрисы рассеяния ввести несколько сложнее. Для однородной среды она характеризует распределение по направлениям средней мощности, рассеянной в волны излучения [2]. Обобщая это определение на случай слоистой среды, введем индикатрису рассеяния равенством

$$\sigma_\alpha(\mathbf{x}_0, \mathbf{n}, \nu) \equiv \sum_\beta \sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{x}_0, \mathbf{n}, \nu). \quad (15)$$

Наконец, полное сечение рассеяния определим обычным образом как $\sigma_\alpha(\mathbf{x}_0) = \int_0^{2\pi} \sigma_\alpha(\mathbf{x}_0, \mathbf{n}) d\varphi$.

Нетрудно убедиться, что, если среда однородна во всем пространстве $0 < z < +\infty$, все эти величины совпадают с обычными характеристиками рассеяния. Они, однако, зависят от вида первичной волны. Для наших целей удобнее ввести обобщенные характеристики рассеяния — диады

$$\hat{S}_\beta(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_\nu) = [\pi/2 k_0 \varepsilon^2(0)] B(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_\nu) [k^2(0) - \mathbf{x}_0 \mathbf{x}_\nu] \cdot \mathbf{z}_0 \times \mathbf{H}_\beta(\nu, \mathbf{n}, 0) \mathbf{z}_0 \times \mathbf{H}_\beta(\nu, -\mathbf{n}, 0) \cdot [k^2(0) - \mathbf{x}_\nu \mathbf{x}_0], \quad \mathbf{x}_\nu = \mathbf{x}, \mathbf{n}, \quad (16)$$

$$\hat{S}(\mathbf{x}_0, \mathbf{n}) = \sum_\beta \sum_\nu \hat{S}_\beta(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_\nu), \quad \hat{S}(\mathbf{x}_0) = \int_0^{2\pi} \hat{S}(\mathbf{x}_0, \mathbf{n}) d\varphi,$$

которые зависят от структуры первичного поля в минимально возможной степени, — посредством волнового вектора \mathbf{x}_0 . Вместе с тем, как нетрудно убедиться, имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_v, k) & \hat{S}_\beta(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_v, k) \\ \sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{x}_0, \mathbf{n}, \nu) \cos \nu & = \frac{c z_0 \times \mathbf{H}_\alpha^*(\mathbf{x}_0, 0)}{8\pi J_\alpha(\mathbf{x}_0)} \cdot \hat{S}_\beta(\mathbf{x}_0, k_\infty \cos \nu \mathbf{n}) \cdot z_0 \times \mathbf{H}_\alpha(\mathbf{x}_0, 0), \quad (17) \\ \sigma_\alpha(\mathbf{x}_0, \mathbf{n}) & \hat{S}(\mathbf{x}_0, \mathbf{n}) \\ \sigma_\alpha(\mathbf{x}_0) & \hat{S}(\mathbf{x}_0) \end{aligned}$$

полностью оправдывающие их определение как обобщенных характеристик рассеяния.

4. Выясним теперь физический смысл ЭИ и его связь с обобщенными характеристиками рассеяния. Определим для произвольной диады \hat{V} , зависящей, быть может, от некоторых параметров, операцию эрмитовского сопряжения $\hat{V}^+ \equiv \hat{V}^{*\tau}$, а также эрмитовскую \hat{V}' и антиэрмитовскую \hat{V}'' части

$$\hat{V}' = (\hat{V} + \hat{V}^+)/2, \quad \hat{V}'' = (\hat{V} - \hat{V}^+)/2i, \quad (18)$$

так что $\hat{V} = \hat{V}' + i\hat{V}''$, причем $(\hat{V}'')^+ = -\hat{V}''$.

Вычислим эрмитовскую и антиэрмитовскую части оператора ЭИ $\hat{L}_e(\mathbf{x}_0)$ при вещественных значениях волнового вектора $\mathbf{x}_0 = x_0 \mathbf{n}_0$. Переходя в (10) к полярным координатам и используя технику контурного интегрирования, получаем следующие физически прозрачные соотношения:

$$\hat{L}'_e(\mathbf{x}_0) = \hat{S}(\mathbf{x}_0) = \int_0^{2\pi} \sum_\beta \sum_\nu \hat{S}_\beta(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_\nu) d\varphi; \quad (19)$$

$$\hat{L}''_e(\mathbf{x}_0) = [c/4\pi k_0^2 \varepsilon^2(0)] P V \cdot \int B(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}) [k^2(0) - \mathbf{x}_0 \mathbf{x}] \rightarrow \quad (20)$$

$$\rightarrow z_0 \times \hat{G}''_{mm}(\mathbf{x}, z, z')|_{z, z' \rightarrow +0} \cdot z_0 \times [k^2(0) - \mathbf{x} \mathbf{x}_0] d\mathbf{x}.$$

Здесь $\mathbf{x}_\nu = x_\nu(\cos \varphi, \sin \varphi)$, интеграл в бесконечных пределах берется в смысле главного значения в полюсах $\pm x_{\nu k}$ подынтегрального выражения, \hat{G}''_{mm} — антиэрмитовская часть функции Грина.

Отсюда видно, что эрмитовская часть ЭИ, описывающая «тепловые» потери в границе, формируется за счет рассеяния первичного поля на шероховатостях в распространяющиеся собственные волны, идущие по всем азимутальным направлениям. В соответствии с физической картиной процесса рассеяния $\hat{L}'_e(\mathbf{x}_0)$ оказывается положительно определенной диадой, как и должно быть для границы, пассивной в энергетическом смысле. В частности, поэтому для любой пространственной гармоники среднего поля с вещественным волновым вектором \mathbf{x}_0 величина плотности потока энергии в отрицательном направлении оси z на границе $z=0$ положительна,

$$\begin{aligned} P_\alpha(\mathbf{x}_0) & = (c/8\pi) \operatorname{Re} \mathbf{E}_\alpha(\mathbf{x}_0, z) \cdot z_0 \times \mathbf{H}_\alpha^*(\mathbf{x}_0, z)|_{z=0} = \\ & = (c/8\pi) z_0 \times \mathbf{H}_\alpha^*(\mathbf{x}_0, 0) \cdot \hat{L}'_e(\mathbf{x}_0) \cdot z_0 \times \mathbf{H}_\alpha(\mathbf{x}_0, 0) > 0, \end{aligned} \quad (21)$$

из-за поглощения энергии среднего поля. Это поглощение происходит за счет рассеяния во флуктуационную компоненту в соответствии с «законом сохранения энергии» в форме

$$J_{\alpha}(x_0) \int_0^{2\pi} \sigma_{\beta}(x_0, n) d\varphi = P_{\alpha}(x_0), \quad (22)$$

который вытекает из (17), (19) и (21).

Антиэрмитовская, реактивная часть ЭИ, согласно (20), формируется за счет рассеяния во всевозможные типы волн с любыми волновыми векторами.

Как нетрудно убедиться, вклады волн излучения $\hat{S}_{\alpha}(x_0, x_v)$ и волн дискретного спектра $\hat{S}_{\alpha}(x_0, x_{vk})$ оказываются связанными между собой. Действительно, аналитическое продолжение вклада волны излучения $\hat{S}_{\alpha}(x_0, x_v)$ с волновым вектором $x_v = k_{\infty} \cos v n$ с отрезка вещественной оси $0 \leq v \leq \pi/2$ в точку дискретного спектра x_k осуществляет соотношение

$$-2\pi i \operatorname{res} \hat{S}_{\alpha}(x_0, x_v) = \hat{S}_{\alpha}(x_0, x_{vk}), \quad (23)$$

которое определяет формулировку принципа аналитического продолжения для обобщенных характеристик рассеяния.

5. Сопоставим наши результаты с результатами работы [3], ссылку на формулы которой мы сопровождаем буквой Б. Для однородной среды формула (8) для диады ЭИ переходит в формулу (6Б), «закон сохранения энергии» (27) оказывается эквивалентным «закону сохранения плотности потока энергии» (20Б), а выражение (19) для эрмитовской части ЭИ, связывающее ее посредством формул (17) с характеристиками рассеяния шероховатой площадки, приводит к формулам (23Б) и (25Б). Отметим, что результаты пп. 1 и 2 нашей статьи пригодны и для случая среды с омическими потерями.

6. Проведенное исследование ЭИ шероховатой границы позволяет сформулировать и, в принципе, решить любую из двух основных крайних задач электродинамики — о среднем поле заданного распределения источников и о собственных волнах среднего поля.

В качестве иллюстрации найдем собственные волновые числа дискретного спектра для структуры шероховатая граница плюс слоистая среда. Предполагая, что наличие шероховатостей не приводит к существенной перестройке дискретного спектра по сравнению со спектром волн регулярной среды для добавки $\delta x_n = \tilde{x}_n - x_n$ к волновым числам x_n регулярной среды, получаем выражение

$$\delta x_n = icz_0 \times H_{\alpha}^*(x_n, 0) \cdot \hat{L}_e(x_n) \cdot z_0 \times H_{\alpha}(x_n, 0) / 16 \pi J_{\alpha}(x_n), \quad (24)$$

где $H_{\alpha}(x_n, z)$, $E_{\alpha}(x_n, z)$ — комплексные амплитуды собственной волны в регулярной среде. Как и следовало ожидать, затухание $\gamma_n = \operatorname{Im} \delta x_n$ определяется эрмитовской частью ЭИ, а реактивная часть приводит к изменению фазовой скорости волны. Затухание в общем случае зависит от направления распространения волны, определяемого вектором $n = (\cos \varphi, \sin \varphi)$. Это явление проиллюстрировано на рис. 1 для примера однородного планарного волновода на шероховатой подложке, граничащего со свободным пространством. Показатель преломления среды волновода 2,0, толщина волновода h и волновое число k_0 в свободном пространстве связаны соотношением $k_0 h = 1$. Шероховатости описываются функцией корреляции $B(r) = \sigma^2 \exp(-\sqrt{x^2/l_x^2 + y^2/l_y^2})$, σ — дисперсия неровностей. Кривые 1—4 на рисунке отвечают нормированному затуханию $\tilde{\gamma}_n^{\beta}$ основной ($n=1$) ТМ-моды ($\beta=s$): $\tilde{\gamma}_n^{\beta} = h^3 \gamma_1 / \sigma^2$ — для $l_x/h = 0,5; 1,0; 2,0$ и 0,01 соответственно, при этом всюду $l_y/h = 0,1$. Угол $\varphi = 0$ отвечает направлению вдоль оси x .

Исходя из (19), (24), затухание можно представить как сумму вкладов $\gamma_1^{\alpha\beta}$ за счет рассеяния в волны ТМ ($\alpha=s$) или ТЕ ($\alpha=p$) поляризаций, принадлежащих дискретной ($\beta=d$) или непрерывной ($\beta=r$) частям спектра:

$$\gamma_1 = \gamma_1^{sd} + \gamma_1^{pd} + \gamma_1^{sr} + \gamma_1^{pr}.$$

Кривые 5—8 дают соответственно зависимости удельных потерь $\delta_1^{\alpha\beta} = \gamma_1^{\alpha\beta}/\gamma_1$ этой же моды за счет рассеяния в волны каждой из групп: $\alpha=s, \beta=d$ (5); $\alpha=p, \beta=d$ (6); $\alpha=s, \beta=r$ (7); $\alpha=p, \beta=r$ (8). При этом $l_x/h=2,0, l_y/h=0,1$.

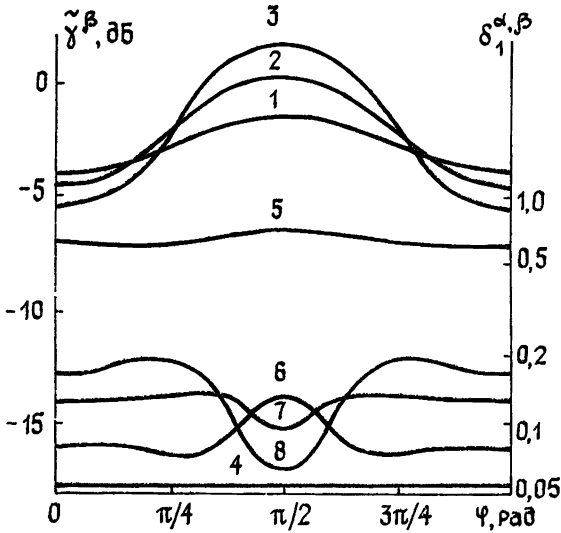


Рис. 1.

Из рисунка видно, что величина затухания существенно зависит от направления распространения, если по крайней мере один из характерных размеров шероховатостей l_x или l_y сравним с длиной волны.

ПРИЛОЖЕНИЕ

В формулах (16) фигурируют векторные собственные функции «поперечного» оператора [5] уравнений Максвелла в слоистой среде. Они даются выражениями

$$E_s(\nu, n, z) = [1/k_0 \epsilon(z)] d(\nu, n, z) \Psi_\epsilon(z, \nu)/N_\epsilon(\nu),$$

$$H_s(\nu, n, z) = -z_0 \times n \Psi_\epsilon(z, \nu)/N_\epsilon(\nu),$$

$$E_p(\nu, n, z) = z_0 \times n \Psi_\mu(z, \nu)/N_\mu(\nu),$$

$$H_p(\nu, n, z) = [1/k_0 \mu(z)] d(\nu, n, z) \Psi_\mu(z, \nu)/N_\mu(\nu),$$

$$d(\nu, \pm n, z) = z_0 k_\infty \cos \nu \pm in\partial/\partial z.$$

Здесь $\Psi_\eta(z, \nu)$ — собственные функции краевой задачи

$$[D_\eta + k^2(z) - k_\infty^2 \cos^2 \nu] \Psi_\eta(z, \nu) = 0, \quad \eta = \epsilon, \mu,$$

$$\Psi_\mu = \partial \Psi_\epsilon / \partial z = 0, \quad z = 0, \quad |\Psi_\eta| < +\infty;$$

$$D_\eta \equiv \eta(z) \partial_z \eta^{-1}(z) \partial_z \quad (\partial_z \equiv \partial/\partial z),$$

ортогональные в смысле

$$\int_0^{+\infty} \Psi_\eta(z, \nu) \Psi_\eta(z, \nu') dz / \eta(z) = N_\eta^2(\nu) \delta_{\nu, \nu'},$$

$N_n(\nu)$ — нормировочный коэффициент, $\delta_{\nu,\nu'}$ — дельта-функция Кронекера или Дирака, произвольный единичный вектор n , лежащий в плоскости $z=0$, определяет направление распространения волны. Значения спектрального параметра ν , непрерывно заполняющие интервал $0 < \nu < \pi/2$, отвечают распространяющимся волнам излучения; значения ν на полупрямой $\text{Im } \nu < 0$, $\text{Re } \nu = \pi/2$ нераспространяющимся волнам непрерывного спектра, а точки дискретного спектра ν_k на мнимой полуоси $\text{Re } \nu = 0$, $\text{Im } \nu > 0$ соответствуют волнам, захваченным слоистой средой. Выбор ν в качестве спектрального параметра, с которым волновое число связано соотношением $k_\nu = k_\infty \cos \nu$, удобен для описания спектра собственных волн слоистой среды в терминах углов скольжения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Басс Ф. Г. — Изв. вузов — Радиофизика, 1960, 3, № 1, с. 72.
2. Басс Ф. Г., Фукс И. М. Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. — М.: Наука, 1972.
3. Брюховецкий А. С., Тигров В. М., Фукс И. М. — Изв. вузов — Радиофизика, 1984, 27, № 8, с. 999.
4. Брюховецкий А. С., Фукс И. М. Тезисы докладов 14 Всесоюзной конференции по распространению радиоволн. — М.: Наука, 1984, ч. 2, с. 273.
5. Шевченко В. В. Плавные переходы в открытых волноводах. — М.: Наука, 1969.
6. Жук Н. П., Третьяков О. А. — Изв. вузов — Радиофизика, 1981, 24, № 12, с. 1476.
7. Жук Н. П., Третьяков О. А. — ДАН УССР, 1984, сер. А, № 4, с. 58.
8. Шкалик А. А. В кн.: Труды семинара им. И. Г. Петровского. — М.: Гос. ун-т, 1983, вып. 9, с. 190.

Харьковский государственный университет

Поступила в редакцию
10 октября 1984 г.

IMPEDANCE OF THE ROUGH CONDUCTING SURFACE IN THE STRATIFIED MEDIUM

N. P. Zhuck, O. A. Tretyakov, A. G. Yarovoj

The operator of equivalent impedance of the rough surface in the stratified medium and its physical meaning have been considered. The power loss of the eigenmode in the open waveguide of integral optics with the rough boundary of the substrate is calculated.