ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXIX, № 4 РАДИОФИЗИКА 1986

УДК 530.18:535.44

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕЖИМАХ С ДРОБНЫМИ ЧАСТОТАМИ В ГИБРИДНЫХ БИСТАБИЛЬНЫХ УСТРОЙСТВАХ

Т. А. Мурина, Н. Н. Розанов

Рассмотрены нестационарные режимы работы бистабильных оптических гибридных устройств под действием постоянного внешнего излучения. Аналитически и численно исследованы характеристики режимов с периодами, кратными половине времени запаздывания сигнала в цепи обратной связи и установлена их неустойчивость. Показана высокая чувствительность выходного сигнала устройства к периодическим или шумовым воздействиям в окрестности определенных резонансных частот.

Действие внешнего стационарного излучения на нелинейные оптические системы с запаздыванием, приводящее при определенных условиях к появлению периодических и стохастических пульсаций интенсивности, широко исследуется как теоретически, так и экспериментально. Наиболее удобным для анализа и экспериментов объектом служат здесь гибридные бистабильные оптические устройства (БОУ). Для таких БОУ в случае больших времен запаздывания в цепи обратной связи $\tau_з$ в работе [1] показано существование периодических (с периодами, кратными $\tau_з$) и стохастических режимов. Дальнейшие теоретические и экспериментальные исследования [2, 3] показали, что возникновение в процессе перехода от стационарного режима к хаотическому периодических режимов с последовательным удвоением периода ($2\tau_з$, $4\tau_з$, $8\tau_з, \ldots$) подчиняется закону подобия Фейгенбаума [4]*.

В чисто оптических бистабильных системах, для которых сценарий Фейгенбаума был предсказан в работе [7], механизм перехода к хаосу может быть и иным (см., например, [8]). Однако и в гибридных БОУ остается нерешенным ряд важных вопросов. Это относится, в частности, к найденным в [9] периодическим режимам с «дробными периодами» ($2\tau_з/3$, $2\tau_з/5$, $2\tau_з/7$ и т. д.). Авторы [9] пришли к выводу об их устойчивости и сосуществовании при фиксированных параметрах системы нескольких таких режимов. Тесно связана с указанными режимами и данная в [10] интерпретация хаоса и «окон периодичности» как нелинейного взаимодействия «собственных мод» соответствующей линеаризованной системы. Такой подход трудно согласовать с моделью Фейгенбаума [4].

В настоящей работе более подробно, аналитически и численно, исследуются характеристики режимов с «дробными периодами» и устанавливается их неустойчивость. Показана также высокая чувствительность выходного сигнала гибридного БОУ к периодическим или шумовым воздействиям в окрестности частот «собственных мод».

Дифференциально-разностное уравнение, описывающее режимы безрезонаторного гибридного БОУ [11], имеет вид

$$t_р(dx(t)/dt)+x(t)=f(x(t-t_з)); \qquad (1)$$

$$f(x(t))=PT(x)=P\sin^2(\varphi+x(t)), \qquad (2)$$

где $t_р$ — время релаксации электрического сигнала $x(t)$ в цепи обратной связи, $T(x)$ — безразмерный коэффициент пропускания интенсив-

* Переход к развитому хаосу включает в себя также обращенную последовательность бифуркаций квазипериодических решений с уменьшением периода гармонической составляющей в два раза [5, 6].

ности внешнего излучения P в цепи обратной связи. Приведенный вид $T(x)$ в хорошем приближении соответствует электрооптическим модуляторам, причем φ — постоянное электрическое смещение на модуляторе.

Уравнение (1) может иметь несколько стационарных ветвей с различными областями устойчивости стационарных режимов. Исследуем возможность возникновения периодических решений вблизи стационарных. Введем отклонение от стационарного решения на фиксированной ветви $\Phi(t)=x(t)-x_{\text{ст}}$. Тогда для $\Phi(t)$ из (1) получим

$$t_{\text{р}}(d\Phi/dt)+\Phi(t)=g(\Phi(t-t_{\text{з}})). \quad (3)$$

Величину g представим в виде ряда по $\Phi(t)$:

$$g(\Phi(t))=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f'(x_{\text{ст}})}{n!}\Phi^n(t)=\sum_{n=1}^{\infty}g_n\Phi^n(t). \quad (4)$$

Для БОУ с функцией пропускания (2) первые коэффициенты разложения имеют вид

$$g_1=P\sin 2(\varphi+x_{\text{ст}}),\quad g_2=P\cos 2(\varphi+x_{\text{ст}}),$$
$$g_3=-(2/3)P\sin 2(\varphi+x_{\text{ст}}). \quad (5)$$

Устойчивость стационарного решения $x_{\text{ст}}$ определяется характеристическим уравнением

$$t_{\text{р}}\gamma+1-g_1\exp(-\gamma t_{\text{з}})=0, \quad (6)$$

полученным линеаризацией (3). Уравнение (6) имеет неограниченное множество решений (см., например, [12]). Вещественная часть каждого корня $\operatorname{Re}\gamma=p_n$ характеризует скорость затухания соответствующей моды линеаризованной системы, а мнимая часть — ее частоту. Когда $\operatorname{Re}\gamma>0$, стационарный режим неустойчив по отношению к возбуждению данной моды.

Разделяя вещественную и мнимую части (6), можно определить точки бифуркаций ($\operatorname{Re}\gamma=0$, $\operatorname{Im}\gamma=\omega_n$) и частоты линеаризованной задачи ω_n:

$$\cos(\omega t_{\text{з}})-\omega t_{\text{р}}\sin(\omega t_{\text{з}})=g_{10}; \quad (7а)$$

$$\sin(\omega t_{\text{з}})+\omega t_{\text{р}}\cos(\omega t_{\text{з}})=0. \quad (7б)$$

Здесь g_{10} — значение g_1 в точке бифуркации (на границе области устойчивости стационарного решения), определяемое из (7а) после нахождения характеристической частоты из (7б). Множеству характеристических частот отвечают точки пересечения семейства тангенсоид с прямой

$$\operatorname{tg}(\omega_n t_{\text{з}})=-(t_{\text{р}}/t_{\text{з}})(\omega_n t_{\text{з}}),\quad n=0,\pm1,\pm2,\ldots \quad (8)$$

В дальнейшем исключим из рассмотрения все частоты с четным номером, так как они соответствуют не границе устойчивости, а границе существования стационарного решения. Отход от каждой бифуркационной точки можно характеризовать отклонением различных, связанных между собой бифуркационных параметров от соответствующих значений на границе устойчивости, например $P=P_0^{(n)}(1+\mu^{(n)})$ или $g_1=g_{10}^{(n)}+\delta g^{(n)}$. При этом в точке бифуркации $P=P_0^{(n)}$, $g_1=g_{10}^{(n)}$, $\mu^{(n)}=0$, $\delta g^{(n)}=0$. Показатели устойчивости и добавки к частотам удобно выражать через $\delta g^{(n)}$. Решая уравнения (7) вблизи каждой точки бифуркации, найдем соответствующие характеристики устойчивости p_n и добавки к частотам $\delta\omega_n$ ($\omega=\omega_n+\delta\omega_n$):

$$p_n=\delta g^{(n)}\frac{\cos(\omega_n t_{\text{з}})}{t_{\text{р}}+t_{\text{з}}},\quad \delta\omega_n=-\delta g^{(n)}\frac{\sin(\omega_n t_{\text{з}})}{t_{\text{р}}+t_{\text{з}}}. \quad (9)$$

Знак p_n определяется знаком $\delta g^{(n)}$, так как $\cos(\omega_n t_з)<0$ для нечетных n (8). Конкретные расчеты для функции пропускания (2) показывают, что возрастанию интенсивности P отвечает отрицательный сдвиг ($\delta g^{(n)}<0$) от точки бифуркации, при уменьшении P сдвиг положительный ($\delta g^{(n)}<0$). То есть согласно (9) стационарный режим теряет устойчивость по отношению к возбуждению данного типа колебаний при переходе через $g_{10}^{(n)}$ с увеличением интенсивности внешнего сигнала. Граница устойчивости стационарного режима определяется экстремальным значением g_{10} из множества $g_{10}^{(n)}$.

Найдем вид периодического во времени решения, рожденного в окрестности бифуркационной точки. Анализ уравнения с запаздывающим аргументом (3) аналогичен применяемому для исследования бифуркации Андронова—Хопфа [13, 14]. Перенормируем время в (3) так, чтобы по новому t' решение было бы периодическим с $T=2\pi/\omega_1$:

$$t'=\frac{\omega}{\omega_1}t=\frac{t}{1+\mu h_1+\mu^2 h_2+\dots}, \tag{10}$$

h_1, h_2 — постоянные, определяемые из условия периодичности. Индекс моды линеаризованной задачи в дальнейшем опускается.

Ищем решение (3) в виде

$$\Phi=\mu\Phi_1+\mu^2\Phi_2+\mu^3\Phi_3+\dots; \tag{11}$$

$$g_1=g_{10}+\mu^2\sigma,\quad \delta g=\mu^2\sigma,\quad \sigma=\mathrm{sign}(\delta g), \tag{12}$$

где Φ_i — периодические функции.

Подставляя (11) в (3), в первом порядке по μ определяем Φ_1:

$$\Phi_1=M\cos(\omega_1 t'), \tag{13}$$

Тогда во втором порядке

$$\Phi_2(t')=M^2[K_2+C_2\cos(2\omega_1 t')+S_2\sin(2\omega_1 t')]. \tag{14}$$

При коэффициенте пропускания $T(x)$, определяемом согласно (2), имеем

$$K_2=g_2/2(1-g_{10}),$$

$$C_2=\frac{g_2}{2}\,\frac{\cos(2\omega_1 t'_з)+2\omega_1 t'_р\sin(2\omega_1 t'_з)+1}{[1+\cos(2\omega_1 t'_з)]^2+[2\omega_1 t'_р-\sin(2\omega_1 t'_з)]^2}, \tag{15}$$

$$S_2=\frac{g_2\,\omega_1 t'_р\cos(2\omega_1 t'_з)}{[1+\cos(2\omega_1 t'_з)]^2+[2\omega_1 t'_р-\sin(2\omega_1 t'_з)]^2}.$$

Из условия периодичности следует $h_1=0$. Амплитуда колебаний M и изменение периода h_2 определяются в третьем приближении по μ:

$$M^2=-\frac{\mu^2\sigma\sin(\omega_1 t'_з)}{g_2S_2(\cos\omega_1 t'_з-g_{10})+\sin\omega_1 t'_з\,[g_2(2K_2+C_2)+(3g_3/4)]}; \tag{16а}$$

$$h_2=-g_2S_2M^2/\sin(\omega_1 t'_з). \tag{16б}$$

Условием существования периодического решения ($M^2\geqslant 0$), расположенного в малой окрестности границы устойчивости стационарного решения, является противоположность знаков σ и знаменателя (16а) ($\sin\omega_1 t'_з>0$ для нечетных мод).

Результаты для других мод линеаризованной задачи получаются при замене ω_1 на ω_n, g_{10} на $g_{10}^{(n)}$.

Конкретизируем приведенные выше общие соотношения в двух предельных случаях.

При малых временах релаксации $t_р/t_з \ll 1$ приближенный вид характеристических частот следующий:

$$\omega_n t_з = \pi n(1-(t_р/t_з)), \quad n = 1, 3, 5, \ldots \tag{17}$$

Тогда для точек бифуркаций — границ рождения решений с фундаментальной частотой ω_1 (периодом $T_0=2t_з$) — и ее гармоник $\omega_3=3\omega_1$, $\omega_5=5\omega_1, \ldots$ (им отвечают дробные периоды $T_0/3$, $T_0/5, \ldots$) получим

$$g_{10}^{(n)} = -\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{\pi n t_р}{t_з}\right)^2\right]. \tag{18}$$

Их амплитуда и изменение периода согласно (16) равны

$$M^2 = -\frac{4\mu^2\sigma}{3(g_2^2+g_3)}, \quad h_2 = \frac{g_2^2\sigma\mu^2}{3(g_2^2+g_3)}. \tag{19}$$

Знаменатель правой части M^2 положительный и не меняет знака на границе, значит условие существования периодических режимов ($\delta g=\mu^2\sigma<0$) противоположно условию устойчивости стационарного режима.

В другом предельном случае $t_з/t_р \ll 1$ характеристические частоты и соответствующие им бифуркационные точки примут вид

$$\begin{gathered}\omega_n t_з = \frac{\pi}{2}(2n-1)\left[1+\frac{t_з}{t_р}\frac{1}{[(\pi/2)(2n-1)]^2}\right], \quad n=1,3,5,\ldots, \\ g_{10}^{(n)} = -\frac{(\pi/2)(2n-1)}{t_з/t_р}.\end{gathered} \tag{20}$$

Как следует из сравнения (17) и (20), частота ω_1 с увеличением параметра $t_р/t_з$ плавно меняется от $\pi/t_з$ до $\pi/2t_з$. Соответственно потеря устойчивости стационарным режимом в БОУ с малым запаздыванием сопровождается появлением режима с периодом $T_0=4t_з$. Амплитуды колебаний и поправки к периоду T_0 и его гармоникам в этом случае имеют значения

$$M^2 = -\frac{\sigma\mu^2}{(3/4)g_3+(g_2^2/5)}, \quad h_2 = -\frac{g_2^2(t_р/t_з)\sigma\mu^2}{(5/2)\pi(2n-1)[(3/4)g_3+(g_2^2/5)]}. \tag{21}$$

Анализ показывает, что и в этом случае условие существования периодических режимов противоположно условию устойчивости стационарного режима. По-видимому, этот вывод справедлив и при любых промежуточных соотношениях $t_р$ и $t_з$.

Поскольку найденные периодические решения рождаются из стационарного режима, то их устойчивость в нулевом приближении по μ определяется показателем устойчивости стационарного решения в окрестности бифуркационных точек. Учитывая, что бифуркационные точки гармоник фундаментальной частоты лежат в области неустойчивости стационарного решения ($p>0$, $g>g_{10}^{(1)}$), получим, что соответствующие периодические решения неустойчивы. Для фундаментальной частоты в низшем по μ приближении $p=0$ ($g=g_{10}^{(1)}$), поэтому для исследования устойчивости решения с периодом T_0 требуется дополнительный анализ. В соответствии с [13, 15, 16] представляется естественным считать устойчивость решения с фундаментальной частотой противоположной устойчивости стационарного решения.

При удалении от бифуркационных точек, согласно проведенному нами численному эксперименту, показатель устойчивости гармоник с дробными периодами меняется в широком диапазоне. Так, время жизни пятой гармоники при увеличении интенсивности P от 1,8 до 1,96 возрастает от ≈ 900 $t_з$ до $\approx 10^4$ $t_з$, после чего система возвращается к устойчивому в этой области режиму с фундаментальной частотой. «Метастабильность» гармоник, по-видимому, послужила причиной проявления их при сканировании параметра P в экспериментах [17], а также в вычислительном эксперименте [9].

Нетрудно показать, что возбуждение гармоник можно осуществить с помощью модуляции интенсивности внешнего сигнала соответствующей частоты. Для этого представим правую часть (1) в виде

$$t_р(dx/dt)+x(t)=P(1+s(t))T(x(t-t_з)), \quad s=2a\cos(\omega_n t). \qquad (22)$$

Запишем решение (22):

$$x(t)=x_{ст}+\Delta x(t), \quad \Delta x/x_{ст}\ll 1. \qquad (23)$$

Подставив (23) в (22), после перехода к фурье-образу $\Delta x(\omega)$ получим компоненту энергетического спектра амплитудных флуктуаций на частоте

$$|\Delta x(\omega)|^2=a^2P^2T^2(x_{ст})\{[\cos\omega_n t_з-t_р\omega_n\sin\omega_n t_з-P\sin 2(\varphi+x_{ст})]^2+ \\ +(t_р\omega_n\cos\omega_n t_з+\sin\omega_n t_з)^2\}^{-1}. \qquad (24)$$

При $\omega=\omega_n$ выражение в круглых скобках (24) обращается в нуль, выражение в квадратных скобках представляет собой на основании (7) характеристику отклонения внешнего параметра от бифуркационной точки $\delta g^2=[g_{10}^{(n)}-P\sin 2(\varphi+x_{ст})]^2$. Таким образом, $|\Delta x|^2$ имеет резонансный характер вблизи собственных частот линеаризованной задачи. В окрестности зарождения гармоники ее легко возбудить даже слабым внешним сигналом. Более полный анализ с учетом нелинейных членов приводит к пороговому характеру возбуждения внешней силой. Учет нелинейных членов необходим вблизи ω_1, так как устойчивое периодическое решение с этой частотой возникает и в отсутствие модуляции.

Аналогичные результаты получаются, если модуляция внешнего сигнала носит шумовой характер.

Ввиду малого затухания гармоник фундаментальной частоты шумы могут служить причиной появления пиков в спектре интенсивности излучения гибридного БОУ на частотах, определяемых (8).

Введем в (22) δ-коррелированный источник шума с интенсивностью C: $\langle s(t)s(t-t')\rangle=C\delta(t')$. Тогда соответствующий случайной величине $\Delta x(t)$ (23) энергетический спектр амплитудных флуктуаций можно представить в виде

$$|\Delta x(\omega)|^2= \\ =\frac{P^2T^2(x_{ст})C}{\xi(\omega_n)}\left[(\omega-\bar\omega_n)^2+\frac{\delta g^2}{\xi(\omega_n)}\left(1-\frac{t_р^2\sin^2\omega_n t_з}{\xi(\omega_n)}\right)\right]^{-1},$$

$$\bar\omega_n=\omega_n-\frac{\delta g\, t_р\sin\omega_n t_з}{\xi(\omega_n)}, \qquad (25)$$

$$\xi(\omega_n)=t_р^2+2t_р t_з g_{10}^{(n)}\cos(\omega_n t_з)+t_з^2(g_{10}^{(n)})^2.$$

Легко видеть, что спектр имеет максимумы на частотах, приблизительно равных ω_n, с шириной (в случае $t_р/t_з\ll 1$), определяемой соотношением

$$\Delta\omega=2\delta g\left(1-\frac{t_р}{t_з}g_{10}^{(n)}\cos\omega_n t_з\right)(t_з g_{10}^{(n)})^{-1}. \qquad (26)$$

Оценим значение интенсивности шума C, необходимое для наблюдения сигнала на частоте $3\omega_1$, такой же величины, как в работе [10]. Пусть $t_р/t_з=0{,}025$; тогда $\delta g=7\cdot 10^{-2}$ и $C\approx 10^{-9}$. Таким образом, шумы со сравнительно низким уровнем интенсивности в системе могут служить причиной появления пиков в спектре интенсивности выходного излучения в окрестности характеристических частот.

ЛИТЕРАТУРА

1. Розанов Н. Н. — Письма в ЖТФ, 1980, **6**, № 3, с. 173.
2. Мурина Т. А., Розанов Н. Н. — Квантовая электроника, 1981, **8**, № 6, с. 1186.
3. Gibbs H. M., Hopf F. A., Kaplan D. L, Shoemaker R. L. — Phys. Rev. Lett., 1981, **46**, № 7, p. 471.
4. Фейгенбаум М. — УФН, 1983, **141**, № 2, с. 343.
5. Lorenz E. N In:Nonlinear Dynamics/Ed. Helleman R. H. C. — N. Y.: Academy of Sciences, 1980.
6. Derstine M. W., Gibbs H. M., Hopf F. A., Kaplan D. L. — Phys. Rev., 1980, **A 26**, № 6, p. 3720.
7. Ikeda K. — Opt. Commun., 1979, **30**, № 2, p. 257.
8. Ikeda K., Akimoto O. — Phys. Rev. Lett., 1982, **48**, № 9, p. 617.
9. Ikeda K., Kondo K., Akimoto O. — Phys. Rev. Lett., 1982, **49**, № 20, p. 1467.
10. Gao J. Y., Narducci L. M., Schulman L. C., Squiccirini M., Yuan J. M. — Phys. Rev., 1983, **A 28**, № 2, p. 2910.
11. Garmire E., Marburger J. H., Allen S. D. — Appl. Phys. Lett., 1978, **32**, № 5, p. 320.
12. Okada M., Takizawa K. — IEEE, 1981, **QE-17**, № 10, p. 2135.
13. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. — М.: Наука, 1981.
14. Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. — М.: Мир, 1980.
15. Розанов Н. Н. — Изв. вузов — Радиофизика, 1972, **15**, № 1, с. 43.
16. Гудков Ю. П., Розанов Н. Н. — Опт. и спектр., 1973, **35**, № 3, с. 736. с. 736.
17. Hopf E. A., Kaplan D. L., Gibbs H. M., Shoemaker R. L. — Phys. Rev., 1982, **A 25**, № 4, p. 2172.

Поступила в редакцию
12 декабря 1984 г.

ON PERIODIC FRACTIONAL FREQUENCY REGIMES IN HYBRID BISTABLE DEVICES

T. A. Murina, N. N. Rozanov

Nonstationary regimes of bistable optical hybrid devices under stationary incident light have been considered. The characteristics of regimes which periods are multiple by half of feedback delay time are investigated both analitically and numerically and their instability is established. The sensitivity of output signal to the periodic and noise effects located near definite resonance frequencies is shown to be high.