

УДК 534.0:517.9

РОЛЬ АСИММЕТРИИ ПРИ ФОРМИРОВАНИИ СТРАННЫХ АТТРАКТОРОВ В ПРОСТОЙ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЕ

А. С. Дмитриев, С. О. Старков

На примере простой автоколебательной системы исследуется роль асимметрии при возникновении и развитии странных аттракторов (СА). Показано существование двух пороговых значений параметра асимметрии: одно связано со стохастизацией колебаний при возникновении асимметрии, второе отделяет область с превалированием хаотических колебаний от области многотактных циклов. Результаты теоретического анализа и численного моделирования качественно подтверждены данными, полученными в физическом эксперименте.

Значительная часть исследовавшихся в последние годы диссипативных систем со стохастическим поведением обладает той или иной формой симметрии. Так, уравнения системы Лоренца инвариантны относительно замены знака координат X, Y [1], симметрией относительно замены знака координат плюс сдвига фазы внешней силы на полпериода обладают неавтономное уравнение Дюффинга [2,3], параметрически возбуждаемый осциллятор [4], неавтономные маятник [5] и автоколебательная система [6]. Инвариантностью относительно замены знака координат обладает также динамическая модель пространственного развития турбулентности [7], а семимодовая аппроксимация уравнения Навье — Стокса для несжимаемой жидкости на торе наряду с этой симметрией обладает инвариантностью относительно замены знака у части координат [8].

Симметрия таких моделей порождается, как правило, исходной физической задачей. Однако как с физической, так и с математической точек зрения они представляют собой вырожденный случай и часто возмущениям. Другими словами, не принадлежат к однопараметрическим семействам общего положения [9]. О важной роли асимметрии в системах со странными аттракторами свидетельствует и то обстоятельство, что один из основных механизмов перехода к хаосу — переход через последовательность бифуркаций удвоения периода колебаний — реализуется только для асимметричных решений [10,11].

Таким образом, можно ожидать, что асимметрия и ее величина во многом определяют динамические свойства автоколебательных систем, в том числе возникновение и развитие стохастических режимов.

В данной работе влияние асимметрии на динамику рассматривается на примере простой автоколебательной системы с полутора степенями свободы.

1. Модель системы. Анализ особенностей, связанных с асимметрией характеристики нелинейного усилителя. Рассмотрим колебательную систему, представляющую собой замкнутые в кольцо: нелинейный усилитель, RLC - и RC -фильтры низких частот. При соответствующей нормировке ее модель описывается уравнениями [12]

$$T\dot{X} + X = F(Z), \quad \dot{Y} = X - Z, \quad \dot{Z} = Y - Z/Q, \quad (1)$$

где $F(Z)$ — характеристика нелинейного усилителя, имеющая падающие участки, Q — добротность RLC -фильтра, T — постоянная времени RC -фильтра. Далее везде полагается $Q=10, T=2$.

Для определенности будем рассматривать характеристику, описываемую выражением

$$F(Z) = MZ \exp(-(Z-\beta)^2), \quad (2)$$

где M — коэффициент усиления, β — параметр асимметрии. Степень асимметрии характеристики растет с увеличением β ; значение $\beta=0$ отвечает симметричному случаю (рис. 1).

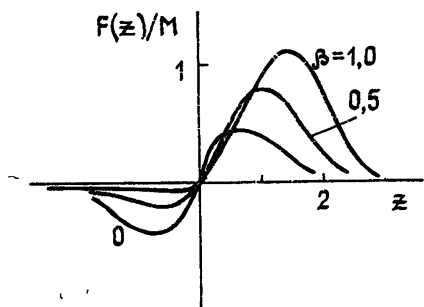


Рис. 1.

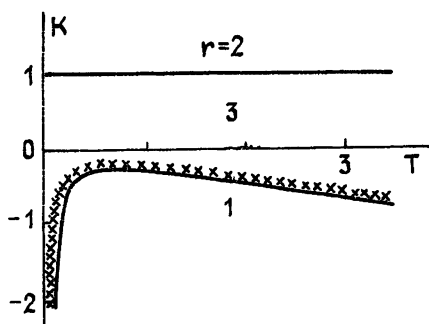


Рис. 2.

Исследуем условия устойчивости точек равновесия и возбуждения автоколебаний в системе (1). Нахождение ее точек равновесия после исключения переменных X, Y сводится к решению уравнения

$$M^{-1}Z - Z \exp(-(Z-\beta)^2) = 0. \quad (3)$$

Для $M < 1$ система (1) имеет единственную точку равновесия, расположенную в начале координат,

$$(X, Y, Z)_1 = (0, 0, 0). \quad (4)$$

При $M=1$ возникают две новые точки равновесия

$$(X, Y, Z)_{2,3} = (\beta \mp \sqrt{\ln M}) (1, 1/Q, 1). \quad (5)$$

Из (5) следует, что линия $M=1$ в плоскости параметров M, β (рис. 3) представляет собой множество вырожденных точек коразмерности один, а точка $(M, \beta) = (1, 0)$ — вырожденная точка коразмерности два, поскольку в ней происходит «расщепление» единственной точки равновесия на три — бифуркация, не типичная для однопараметрических семейств общего положения [9].

Условия устойчивости i -точки равновесия определяются характеристическим уравнением системы (1), линеаризованной в окрестности этой точки:

$$(T\lambda + 1)(\lambda^2 + \lambda/Q + 1) = K_i, \quad (6)$$

$$K_1 = M \exp(-\beta^2), \quad K_{2,3} = 1 \pm 2\sqrt{\ln M} (\beta \mp \sqrt{\ln M}).$$

Анализ устойчивости положений равновесия с помощью D -разбиения для уравнения (6) по паре параметров (T, K) дает связь между T и K в виде

$$K = -(1/Q^2) - (T/Q) - TQ$$

с особыми прямыми $T=0$ и $K=1$. Структура D -разбиения показана на рис. 2, где r — число устойчивых корней. При переходе через границу между областями с $r=3$ и $r=2$ плоскости D -разбиения одно из собственных значений характеристического уравнения (6) меняет знак, точка равновесия теряет устойчивость и становится седловой, а при переходе через границу между областями с $r=3$ и $r=1$ возбуждаются автоколебания. Для $M > 0$ автоколебания могут возбуждаться только вокруг точек, связанных с падающими участками характеристики.

При $\beta \neq 0$ условия потери устойчивости и возбуждения автоколебаний для точек 2 и 3 различны в силу асимметрии.

На рис. 3 граница между областями II и III является линией, на которой происходит возбуждение автоколебаний в точке 3 для $\beta > 0$ и в точке 2 для $\beta < 0$. На границе между областями III и IV возбуждаются автоколебания в окрестностях точек 2 и 3 соответственно.

Отметим, что в области II система имеет две устойчивые точки равновесия при любом β .

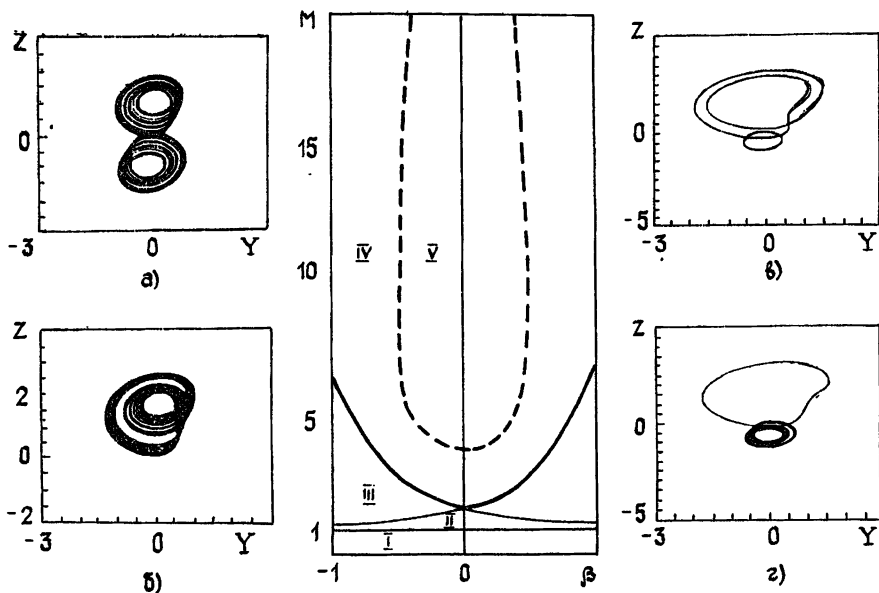


Рис. 3.

2. Хаос в симметричной системе. Для идентификации стохастических режимов будем использовать дробную часть ляпуновской размерности, которая одновременно позволяет судить о выполнении критерия Израйлева—Рабиновича—Угодникова [13].

Модель (1) обладает постоянной отрицательной дивергенцией, поэтому первый ляпуновский показатель λ_1 и дробная часть ляпуновской размерности d_L связаны простым алгебраическим соотношением

$$d_L = \lambda_1 (1/T + 1/Q + \lambda_1)^{-1}.$$

Зависимость $d_L(M)$ показана на рис. 4. Стохастические режимы наблюдаются в области значений M , для которых $d_L > 0$. Интервалы значений M , в которых $d_L \approx 0$, соответствуют регулярным колебаниям. Целая часть ляпуновской размерности равна единице для регулярных колебаний и двум для хаотических режимов.

Рассмотрим развитие колебательного процесса в симметричной системе с увеличением M .

При нарушении условий устойчивости точек равновесия 2 и 3 в системе возбуждается несимметричная мода. При этом фазовая траектория находится в окрестности одной из ненулевых точек равновесия. Спектр несимметричной моды содержит два ярко выраженных максимума: на частоте генерации и в области низких частот. Реализация процесса имеет форму, близкую к синусоидальной, и сдвинута вверх относительно оси времени. С увеличением M мода теряет устойчивость и происходит бифуркация удвоения периода колебаний. Затем наблюдаются вторая и третья бифуркации удвоения. В процессе эволюции колебаний фазовая траектория системы продолжает находиться вблизи от одной из ненулевых точек равновесия. Далее спектр становится сплошным и возникает асимметричный СА. Одновременно в силу симметрии системы существует второй асимметричный СА (рис. 3а).

Первая устойчивая симметричная мода возникает при $M \approx 4,0$ после, по меньшей мере, двух бифуркаций, каждая из которых приводит к уменьшению периода колебаний в два раза (бифуркаций, обратных бифуркациям удвоения периода). Форма колебаний для этой моды имеет довольно сложный вид, спектр колебаний линейчатый, а частота первой гармоники примерно в шесть раз ниже основной частоты первой несимметричной моды.

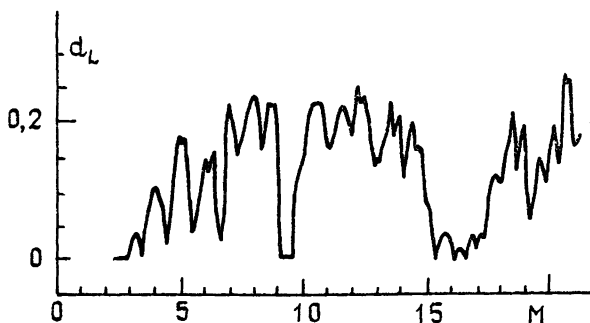


Рис. 4.

При $M \approx 4,15$ происходит бифуркация потери симметрии решения, заключающаяся в том, что симметричная мода перестает быть устойчивой и от нее ответвляются две устойчивые несимметричные моды. После этого каждая из несимметричных мод испытывает бифуркацию удвоения периода и бифуркацию, обратную бифуркации удвоения периода. Затем происходит слияние двух устойчивых несимметричных мод с неустойчивой симметричной модой, в результате которой последняя становится устойчивой (бифуркация восстановления симметрии решения). Далее происходит жесткий переход от симметричной устойчивой регулярной моды к стохастическому режиму. Значение $M = 4,246$, соответствующее этому переходу, служит границей между областями IV и V на оси $\beta = 0$ (рис. 3). Эта граница условно отделяет область V, где взаимодействие аттракторов приводит к появлению стохастических режимов с дробной частью ляпуновской размерности $\geq 0,15$, от области IV, где существуют многотактные циклы и СА с малой величиной d_L ($d_L < 0,1$).

При последующем увеличении M возникают как симметричные, так и несимметричные моды, имеющие свои области устойчивости, а между этими областями реализуются стохастические режимы.

3. Динамика системы при сильной асимметрии характеристики нелинейного элемента. При больших значениях параметра асимметрии ($\beta \geq 0,5$) условия устойчивости точек равновесия и автоколебательных режимов для двух ветвей характеристики нелинейного элемента резко различаются. Так, например, для $\beta = 1,0$ условия возбуждения автоколебаний в окрестности точки 3 выполняются при $M \geq 1,2$, а для точки 2 при $M \geq 7,0$ (рис. 3). Это приводит к тому, что уже в области III, где аттрактором, связанным с одной из ветвей характеристики, является точка, на второй ветви может существовать СА (рис. 3б).

Будем называть аттрактор, связанный с правой ветвью асимметричной характеристики, правым аттрактором (ПА), а с левой — левым аттрактором (ЛА) и рассмотрим детали характера эволюции колебаний с ростом M при фиксированном $\beta = 0,5$.

Двухтактный цикл на ПА возникает при $M = 2,3$, четырехтактный — при $M \approx 2,5$. В интервале $2,53 < M < 2,59$ наблюдается область слабого зашумления, затем при $M \approx 2,60$ снова возникает четырехтактный цикл, при $M \approx 2,65$ — восьмитактный. Он сменяется четырехтактным ($M \approx 2,70$), а затем — двухтактным циклом ($M \approx 2,9$).

Левый аттрактор для $1 < M < 3$ представляет собой устойчивую точку, потом рождается устойчивый предельный цикл (рис. 3в), кото-

рый теряет устойчивость через бифуркацию удвоения в окрестности $M=6,0$. Вслед за этим возникает слабо зашумленный СА. В этот момент ПА представляет собой предельный цикл (рис. 3г).

При $M \approx 7,0$ множество фазовых траекторий, связанное с ЛА, перестает быть притягивающим, и в системе остается единственный аттрактор — предельный цикл с ярко выраженной асимметрией, который с дальнейшим увеличением коэффициента усиления испытывает две бифуркации удвоения периода, а затем — две бифуркации, обратные бифуркациям удвоения. При $M > 20$ снова наблюдается предельный цикл.

Численный анализ показывает, что характер эволюции колебаний с ростом коэффициента усиления при $\beta=0,5$ является типичным для области IV.

Таким образом, для систем с сильной асимметрией характерно наличие СА, связанных как с правой, так и с левой ветвями характеристики. При этом для $\beta > 0$ СА, связанные с правой ветвью, реализуются в области III (до возбуждения автоколебаний на левой ветви), а на левой — в области IV, в зоне, где множество фазовых траекторий, связанных с ЛА, является притягивающим. Выше этой зоны при больших коэффициентах асимметрии существуют многотактные циклы, но СА отсутствуют.

Отметим, что СА, возникающим при больших значениях параметра асимметрии, свойственны малые значения дробной части ляпуновской размерности ($d_L < 0,1$).

4. Эволюция колебаний с ростом асимметрии. Наиболее «активное» взаимодействие аттракторов, связанных с обеими ветвями характеристики нелинейного элемента, имеет место в области V (рис. 3). В ней происходят перестройки колебаний, характерные для малых значений параметра асимметрии, и реализуются СА с дробной частью ляпуновской размерности $d_L \approx 0,15$.

Выясним, как появление и рост асимметрии влияют на динамические режимы. С этой целью исследуем эволюцию колебаний с увеличением параметра асимметрии, взяв в качестве исходного режим симметричной регулярной моды при $\beta=0$.

Выше было показано, что первая симметричная мода в системе (1) возникает при $M \approx 4,0$ и, с ростом M , жестким образом переходит в СА. Поскольку она лежит вблизи границы, разделяющей области IV и V, ее эволюция с ростом β может оказаться нетипичной для симметричных мод из области V. Поэтому ниже анализируется эволюция симметричной моды, возникающей при $M \approx 9,35$. Для $\beta=0$ переход к хаосу от этой моды с ростом M происходит через перемежаемость.

Характер колебаний при появлении и увеличении асимметрии меняется следующим образом. Уже при $\beta=0,012$ симметричная мода теряет устойчивость и начинается переход к хаосу через перемежаемость (рис. 5а). Таким образом, порог значения параметра асимметрии, за которым система демонстрирует поведение, качественно отличное от поведения симметричной системы, очень низок. Дальнейшая эволюция колебаний при фиксированных начальных данных приводит к развитому стохастическому режиму (рис. 5б). Зона хаотических колебаний, фазовый портрет которых становится все более асимметричным, простирается до $\beta \approx 0,2$ (рис. 5в). При $\beta=0,21$ в системе возникает несимметричная регулярная мода (рис. 5г).

Анализ колебаний в интервале значений $\beta \in (0,10; 0,24)$ показывает, что в системе одновременно существуют как минимум два аттрактора. Например, при $\beta=0,15$ одновременно существует СА и устойчивая регулярная мода, близкая по форме к симметричной, реализующейся при $\beta=0$. Поэтому переходы с увеличением β от одного режима к другому могут свидетельствовать как о потере устойчивости одного из режимов, так и о том, что при изменении β перемещается сепаратрисная поверхность между областями притяжения аттракторов и тра-

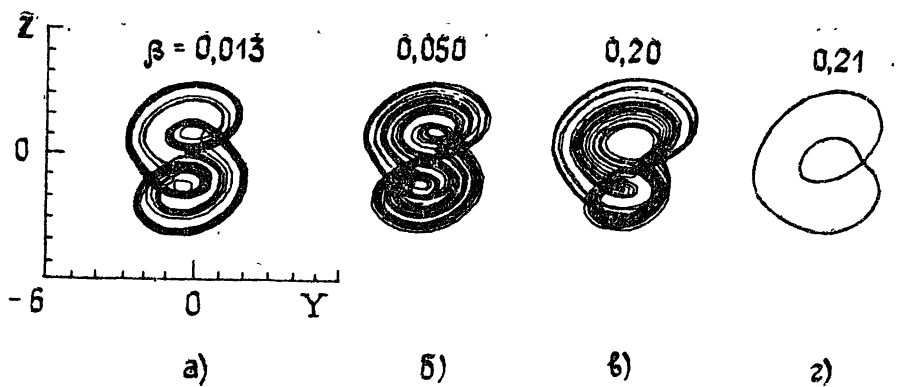


Рис. 5.

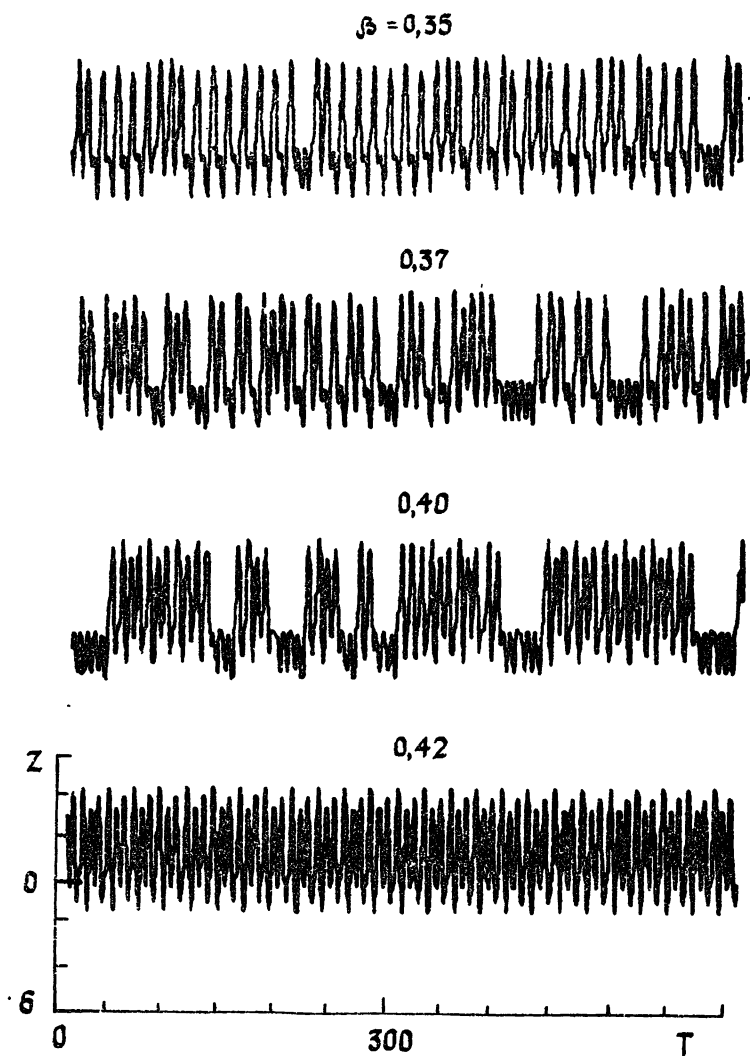


Рис. 6.

ектория системы при фиксированных начальных условиях попадает из области притяжения одного аттрактора в область притяжения другого.

Несимметричная мода (рис. 5г) сохраняет устойчивость до $\beta \approx 0,24$, после чего происходит переход через перемежаемость к асимметричному СА. В диапазоне значений $\beta \in (0,25; 0,5)$ преобладает перемежающийся хаос с узкими зонами регулярных многотактных циклов. Фиксировались трех- и пятитактные циклы, а также циклы более высоких порядков. Переход от асимметричной моды через перемежаемость к трехтактному циклу показан на рис. 6.

При $\beta > 0,5$ имеют место только регулярные колебания. Поэтому значение параметра асимметрии $\beta \approx 0,5$, так же как и значение $\beta = 0,012$, можно считать пороговым значением, разделяющим области с качественно различной динамикой. Оказывается, что существование таких порогов характерно для системы при больших коэффициентах усиления ($5 < M < 20$). Таким образом, в системе существуют два типа порога асимметрии: первый, связанный со стохастизацией колебаний при возникновении асимметрии, и второй, отделяющий область, в которой преобладают хаотические колебания, от области многотактных циклов.

5. Экспериментальное исследование системы с асимметричной характеристикой нелинейного элемента. Экспериментальная проверка теоретических и численных результатов была проведена для случая автоколебательной системы, содержащей нелинейный элемент с сильной асимметрией характеристики.

Исследовавшаяся система представляла собой замкнутые в кольцо: RLC -фильтр низких частот, RC -фильтр низких частот и нелинейный усилитель, состоящий из нелинейного элемента (НЭ) и линейного усилителя (ЛУ) (рис. 7а). Для реализации падающего участка на характеристике нелинейного элемента использовался транзисторный эквивалент $p-n-p-n$ -структуры [14]. Характеристики нелинейного элемента при различных значениях управляющего напряжения приведены на рис. 7б.

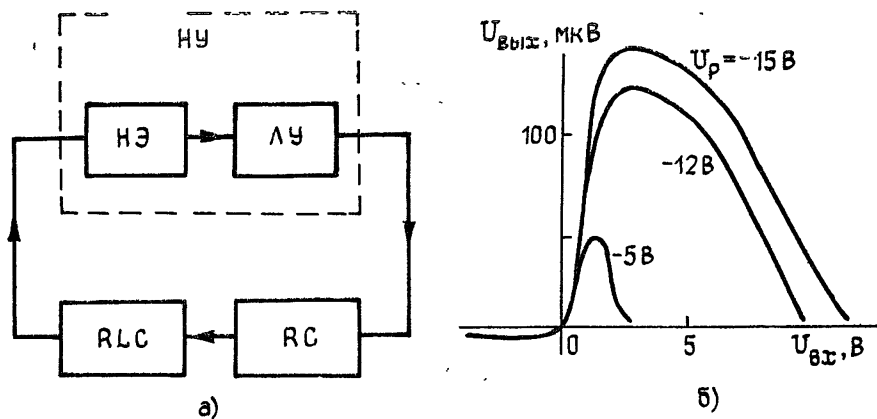


Рис. 7.

Методика эксперимента позволяла фиксировать реализации мгновенных значений, фазовые портреты, спектры мощности. Перестройка режимов в автоколебательной системе осуществлялась непрерывно по двум параметрам: постоянной времени RC -фильтра и положению рабочей точки на падающем участке характеристики U_p . Кроме того дискретно менялся коэффициент усиления линейного усилителя. Погрешность измерения постоянной времени τ и U_p не превышала 2%.

Эксперименты качественно подтвердили установленные для больших значений параметра асимметрии закономерности развития дина-

мики системы. Детальный анализ динамических режимов, реализуемых в экспериментальной системе, так же как и их подробное сравнение с расчетными результатами, выходит за рамки данной работы. Для иллюстрации качественного соответствия динамики теоретической модели (1) и экспериментальной системы на рис. 8, 9 приведены результаты, относящиеся к двум характерным режимам, наблюдавшимся в физическом эксперименте.

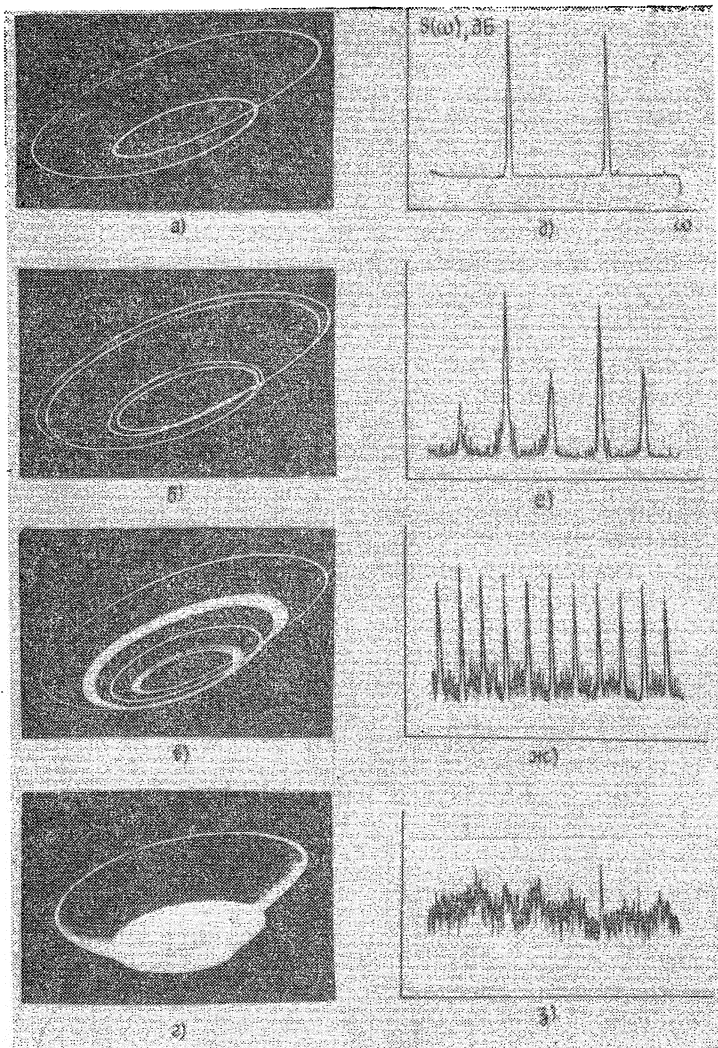


Рис. 8.

Первый режим — возникновение СА на одной ветви характеристики нелинейного элемента (рис. 9). Как и в численных экспериментах, переход от предельного цикла к СА происходит через бифуркации удвоения с характерным «замазыванием» некоторых межвитковых областей (рис. 8в). В спектре сигнала при этом наблюдаются явно выраженные линии, соответствующие гармоникам и субгармоникам основной частоты с шумовым пьедесталом между ними (рис. 8д—з). Отметим, что такая структура спектра и фазовых портретов при переходе к хаосу типична и для других систем с сильной асимметрией, в частности для аттрактора Рёсслера [15] и автогенератора с инерционной нелинейностью [16]. Описанный переход к СА реализуется при относительно небольших коэффициентах усиления ЛУ.

При больших коэффициентах усиления наблюдаются многочисленные режимы с перемежающейся стохастичностью. Две проекции фазового портрета одного из них приведены на рис. 9.

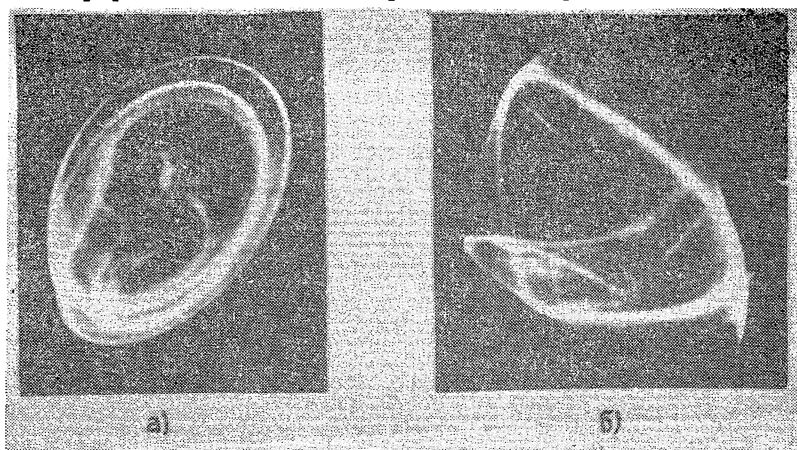


Рис. 9.

В заключение отметим, что вид характеристики нелинейного элемента (рис. 7б), использовавшегося в экспериментальной системе, лишь качественно подобен характеристике типа (2) при больших β (рис. 1). Поэтому сходность закономерностей развития динамики в численных и натуральных экспериментах свидетельствует о грубости свойств системы, связанных с асимметрией.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lorenz E. — J. Atm Sci., 1963, 20, № 1, p. 130.
2. Holms P. — Phyl. Trans., Roy. Soc., 1979, A 292, p. 419.
3. Ueda Y. — J. Stat. Phys., 1979, 20, № 2, p. 181.
4. Leven K. W., Koch B.-P. — Phys. Lett., 1979, 86A, № 2, p. 71.
5. D'Humieres D., Beasley M. R., Huberman B. A., Libchaber A. — Phys. Rev. A., 1982, 26, p. 3660.
6. Дмитриев А. С. — Изв. вузов — Радиофизика, 1983, 26, № 9, с. 1081.
7. Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И., Старобинец И. М. — Письма в ЖЭТФ, 1984, 39, вып. 12, с. 561.
8. Franceschini V. — Physica D, 1983, 6, № 3, p. 285.
9. Арнольд В. И. Дополнительные главы обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978, с. 200.
10. Robbins K. A. — SIAM J. Appl. Math., 1979, 36, p. 457.
11. Swift J. W., Wiesenfeld K. — Phys. Rev. Lett., 1984, 52, № 9, p. 705.
12. Кислов В. Я., Дмитриев А. С. В кн.: Проблемы современной радиотехники и электроники. — М.: ИРЭ АН СССР, 1983, с. 193.
13. Израйлев Ф. М., Рабинович М. И., Угодников А. Д. Препринт ИПФ АН СССР № 17. — Горький, 1981.
14. Арефьев А. А., Баскаков Е. Н., Степанова Л. Н. Радиотехнические устройства на транзисторных эквивалентах $p-n-p-n$ -структуры. — М.: Радио и связь, 1982.
15. Rössler O. E. — Phys. Lett., 1976, 57A, p. 397.
16. Анищенко В. С., Астахов В. В., Летчфорд Т. Е., Сафонова М. А. — Изв. вузов — Радиофизика, 1983, 26, № 7, с. 832.

Институт радиотехники и электроники
АН СССР

Поступила в редакцию
8 октября 1984 г.

ROLE OF ASYMMETRY IN FORMING STRANGE ATTRACTORS IN RING SELF-OSCILLATING SYSTEM

A. S. Dmitriev, S. O. Starkov

The role of asymmetry in origin and development of strange attractors (SA) has been investigated by an example of a ring self-oscillating system. A number of regularities which is peculiar for SA in systems with different level of asymmetry has been established. It is shown that two types of threshold exist for the value of asymmetry parameter: the former type is connected with the transition to chaos when asymmetry is arising, the latter one separates the region where the prevalence of chaotic oscillations takes place from the region of complicated cycles.

Results of theoretical analysis and calculations has been confirmed by physical experiment.