

УДК 621 396 677

О ВЕТВЛЕНИИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ СИНТЕЗА ИЗЛУЧАЮЩИХ СИСТЕМ С ПЛОСКИМ РАСКРЫВОМ ПО ЗАДАННОЙ АМПЛИТУДНОЙ ДИАГРАММЕ

П. А. Савенко

Задача синтеза плоского раскрыва в вариационной постановке сводится к нелинейному интегральному уравнению относительно оптимальной диаграммы. Приводится анализ количества и свойств решений для прямоугольного и кругового раскрывов в зависимости от величины их электрических размеров и свойств заданной амплитудной диаграммы. Обсуждаются результаты численных расчетов.

1. Постановка задачи. Основное уравнение задачи синтеза. При проектировании многих антенных систем в качестве одного из технических условий задается, как правило, амплитудная диаграмма направленности (ДН). В то же время к фазовой диаграмме никаких требований не предъявляется. Отсюда следует возможность использовать свободу выбора фазовой диаграммы для лучшего приближения амплитуды синтезируемой ДН к заданной. Такой подход к решению задач синтеза линейных антенн и решеток был рассмотрен, в частности, в работах [1-3]. Развитая там методика обобщается ниже на синтез антенн с двумерным раскрывом.

Известно [4], что ДН плоского раскрыва D с линейно поляризованным вдоль одной из координатных осей распределением поля* $U(Q)$ определяется с точностью до постоянного множителя формулой

$$f(M) = \iint_D U(Q) e^{-jk \langle Q, M \rangle} dQ, \quad (1)$$

где M — точка наблюдения в дальней зоне, имеющая обобщенные угловые координаты $\hat{\xi}_1 = \sin \vartheta \cos \varphi$, $\hat{\xi}_2 = \sin \vartheta \sin \varphi$, точка $Q \in D$ с координатами \hat{x}_1 , \hat{x}_2 , k — волновое число; $\langle Q, M \rangle = \hat{x}_1 \hat{\xi}_1 + \hat{x}_2 \hat{\xi}_2$. Предположим, что требуемая амплитудная диаграмма $F(M)$ задана в некоторой области Ω и равна нулю за ее пределами. Требуется найти такое амплитудно-фазовое распределение поля $U(Q)$, чтобы создаваемая им ДН $f(M)$ как можно лучше приближалась по модулю к $F(M)$. В качестве критерия оптимизации будем рассматривать функционал

$$\sigma = \iint_{\Omega} [F(M) - |f(M)|]^2 p(M) dM + \iint_{R_2/\Omega} |f(M)|^2 dM, \quad (2)$$

где R_2/Ω — дополнение области до всего пространства R_2 , $p(M)$ — весовая функция, позволяющая регулировать точность приближения в различных угловых направлениях.

Приравнивая к нулю первую вариацию функционала (2) и используя равенство Парсевала

* Задача синтеза плоского раскрыва с произвольной поляризацией излучения в [4] сводится к решению двух независимых задач синтеза плоских систем с линейно поляризованными полями.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(M)|^2 dM = \left(\frac{2\pi}{k}\right)^2 \int_D \int |U(Q)|^2 dQ, \quad (3)$$

получим выражение для оптимального распределения поля в раскрыве:

$$U(Q) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 \int_{\Omega} \{F(M)p(M) + |f(M)|[1-p(M)]\} \times \\ \times \exp \{j[\arg f(M) + k\langle Q, M \rangle]\} dM. \quad (4)$$

Подстановка (4) в (1) приводит к нелинейному интегральному уравнению типа Гаммерштейна относительно оптимальной ДН:

$$f(M) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 \int_{\Omega} \{F(M')p(M') + |f(M')|[1-p(M')]\} \times \\ \times K(M, M', k) e^{j\arg f(M')} dM', \quad (5)$$

где

$$K(M, M', k) = \iint_D e^{jk\langle Q, M-M' \rangle} dQ \quad (6)$$

— ядро, зависящее от формы раскрыва. По решению уравнения (5) оптимальное распределение поля в раскрыве определяется формулой (4). Уравнение (5) имеет не единственное решение. Количество и характерные свойства решений оказываются зависимыми от электрических размеров раскрыва и вида заданной амплитудной ДН. В дальнейшем исследуем эти свойства для некоторых, наиболее важных для практики, типов областей D и Ω при $p(M) \equiv 1$.

2. Прямоугольный раскрыв. Рассмотрим излучающую систему с прямоугольным раскрывом $D: \{|\hat{x}_1| \leq a_1, |\hat{x}_2| \leq a_2\}$, геометрический центр которого совпадает с началом координат, а стороны параллельны осям координат $0\hat{x}_1, 0\hat{x}_2$. Предположим, что амплитудная ДН задана также в некотором «прямоугольнике» $\Omega: \{|\hat{\xi}_1| \leq b_1, |\hat{\xi}_2| \leq b_2\}$, стороны которого параллельны координатным осям. Обозначим соответственно через α_1 и α_2 интервалы изменения угла φ (в которых задана $F(\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2)$) при $\varphi=0$ и $\varphi=\pi/2$ и сделаем замену переменных $\xi_1 = \hat{\xi}_1/\sin \alpha_1$, $\xi_2 = \hat{\xi}_2/\sin \alpha_2$; $x_1 = \hat{x}_1/a_1$, $x_2 = \hat{x}_2/a_2$. Тогда ядро (6) в новых обозначениях примет вид

$$K(M, M', k) = K(\xi_1, \xi_2, \xi'_1, \xi'_2, c_1, c_2) = \frac{\sin c_1(\xi_1 - \xi'_1)}{c_1(\xi_1 - \xi'_1)} \frac{\sin c_2(\xi_2 - \xi'_2)}{c_2(\xi_2 - \xi'_2)}, \quad (7)$$

где

$$c_1 = ka_1 \sin \alpha_1, \quad c_2 = ka_2 \sin \alpha_2 \quad (8)$$

— два основных параметра задачи, характеризующих электрические размеры раскрыва и угол Ω , в котором задана ДН F .

Вначале рассмотрим простейший случай, когда заданную ДН можно представить в виде

$$F(\xi_1, \xi_2) = F_1(\xi_1)F_2(\xi_2). \quad (9)$$

При этом искомое распределение поля также представляется как произведение двух функций:

$$U(x_1, x_2) = U_1(x_1)U_2(x_2). \quad (10)$$

С учетом (9), (10) для решений уравнения (5) выполняется равенство

$$f(\xi_1, \xi_2) = f_1(\xi_1)f_2(\xi_2), \quad (11)$$

а само уравнение распадается на два независимых уравнения линейной антенны [2]:

$$f_i(\xi_i) = \int_{-1}^1 F(\xi_i) \frac{\sin c_i(\xi_i - \xi'_i)}{\pi(\xi_i - \xi'_i)} e^{j \arg f_i(\xi_i)} d\xi'_i \quad (i = 1, 2). \quad (12)$$

Для фазовых диаграмм справедливо равенство

$$\arg f(\xi_1, \xi_2) = \arg f_1(\xi_1) + \arg f_2(\xi_2). \quad (13)$$

Решения уравнений (12) можно исследовать при помощи теории ветвления решений нелинейных уравнений [5]. В [2] показано, что для $c_i > 0$ существует решение вида

$$f_i(\xi_i) = \int_{-1}^1 F_i(\xi_i) \frac{\sin c_i(\xi_i - \xi'_i)}{\pi(\xi_i - \xi'_i)} d\xi'_i, \quad (14)$$

принадлежащее классу синфазных диаграмм ($\arg f_i(\xi_i) \equiv 0$), которое в дальнейшем будем называть тривиальным. Оно доставляет минимум функционалу σ лишь при малых значениях c_i . С ростом параметра c_i от (14) ответвляются другие решения, доставляющие минимум функционалу σ , а тривиальное — остается лишь стационарной точкой типа «седловой».

Для четных $F_i(\xi_i)$ существуют точки ветвления двух типов $c_i^{(1)}$ и $c_i^{(2)}$. В первой из них от (14) ответвляются два комплексно-сопряженных между собой решения, имеющие нечетную фазовую диаграмму и соответствующее ей вещественное, но несимметричное относительно центра антенны распределение поля. Во второй точке $c_i^{(2)}$ от тривиального ответвляются четыре решения двух типов. Два из них имеют те же свойства, что и в первой точке ветвления, а два других имеют четную фазовую диаграмму и, соответственно, симметричное, но уже комплексное распределение поля. При этом распределения полей обоих типов создают одну и ту же амплитудную ДН, а функционал σ на них принимает одно и то же значение.

Если $F_i(\xi_i)$ не является четной функцией, то существуют лишь точки ветвления первого типа, в которых ответвляются два комплексно-сопряженных между собой решения с несимметричным распределением поля.

Таким образом, согласно формуле (11), свойства решений уравнения (5) будут описываться совокупностью свойств решений двух независимых задач синтеза линейной антенны, как описано выше. Это дает возможность оценить количество и качественные характеристики решений уравнения (5) в зависимости от функций $F(\xi_1, \xi_2)$ при различных соотношениях параметров c_1, c_2 . При этом область изменения параметров c_1, c_2 можно соответствующим образом разбить на подобласти, в которых уравнение (5) имеет одинаковое число решений. Пример такого разбиения для случая, когда $F_1(-\xi_1) = F(\xi_1)$ и $F_2(-\xi_2) = F_2(\xi_2)$, приведен на рис. 1. Число решений в каждой подобласти (оно

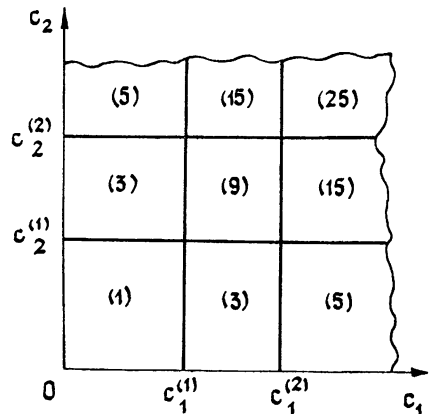


Рис. 1.

указано в скобках) равно произведению числа решений уравнений (12) при соответствующих значениях параметров c_1 и c_2 .

В общем случае, когда заданная ДН не допускает разделения переменных, т. е. $F(\xi_1, \xi_2) \neq F_1(\xi_1)F_2(\xi_2)$, характерные свойства решений можно определить из свойств интегрального оператора, находящегося в правой части (5). В частности, из формулы (4) (при $\rho(M) \equiv 1$) видно, что характер распределения поля в раскрыве определяет фазовая ДН, которую обозначим через $\Psi(\xi_1, \xi_2)$. Если $F(\xi_1, \xi_2)$ — четная функция обоих аргументов, то интегральный оператор в (5) переводит четную по какому-либо аргументу фазовую диаграмму в четную, а нечетную — в нечетную. В этом легко убедиться непосредственной проверкой, если в (5) выделить действительную и мнимую части. Другими словами, оператор (5), действуя на подпространство функций, обладающих определенным типом четности фазовых ДН, преобразует его в это же подпространство. В этой связи в рассматриваемом подпространстве возможно существование неподвижной точки — решения уравнения (5). Таким образом, свойство интегрального оператора в (5) сохранять определенный тип четности для $\Psi(\xi_1, \xi_2)$ дает возможность предположить, что количество решений уравнения (5) в общем случае (когда $F(\xi_1, \xi_2) \neq F_1(\xi_1)F_2(\xi_2)$) не меньше, чем для рассмотренного выше частного случая, допускающего разделение переменных. Это, в частности, подтверждается численными экспериментами.

Уравнение (5) численно решается методом последовательных приближений*. Так как тип решения определяется фазовой ДН, то для получения решения с теми или иными свойствами необходимо соответствующим образом задать начальное приближение $\Psi_0(\xi_1, \xi_2)$.

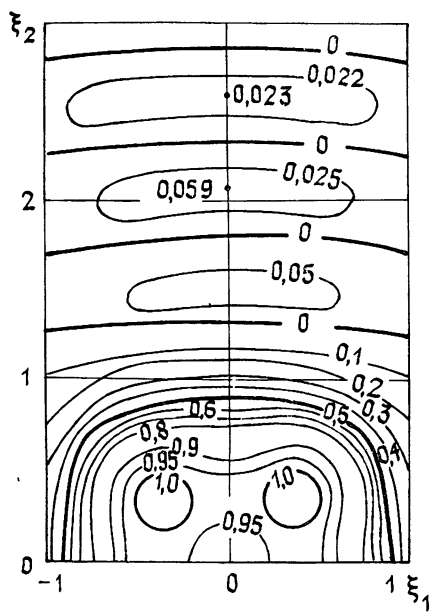


Рис. 2.

для получения решения с теми или иными свойствами необходимо соответствующим образом задать начальное приближение $\Psi_0(\xi_1, \xi_2)$.

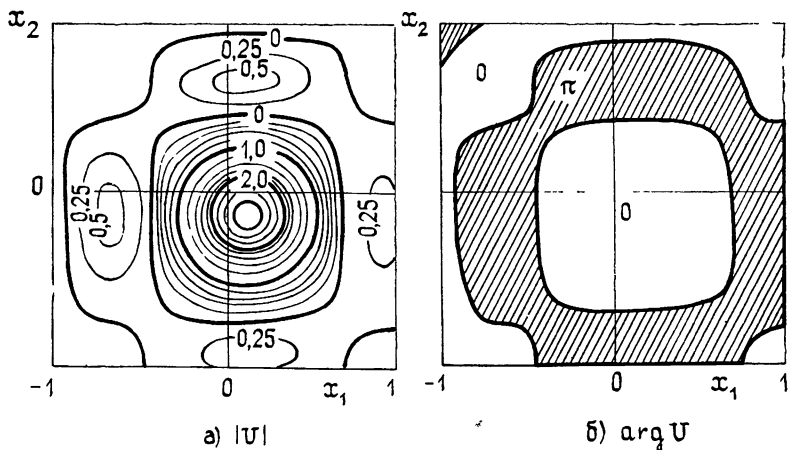


Рис. 3.

* Отметим, что применение метода последовательных приближений к уравнению (5) эквивалентно непосредственной минимизации функционала σ методом наискорейшего спуска.

В качестве численного примера на рис. 2 приведена оптимальная амплитудная ДН $|f(\xi_1, \xi_2)|$ для заданной $F(\xi_1, \xi_2) = 1 - 0,5(\xi_1^2 + \xi_2^2)$ и значениях параметров $c_1 = c_2 = 5$. Создающее ее амплитудное распределение поля в раскрыве (рис. 3) соответствует решению с нечетной фазовой ДН по ξ_1 и ξ_2 и является вещественным, но не симметричным относительно центра раскрыва. Из рисунка видно, что распределение поля в раскрыве смещено относительно начала системы координат в первый квадрант. Такие же смещения возможны в другие квадранты, что будет соответствовать другому типу нечетности фазовой ДН, т. е. существует четыре одинаковых по эффективности решения этого типа.

Задачу синтеза прямоугольного раскрыва можно численно решать и для более общих областей задания амплитудной ДН. Для этого достаточно вокруг Ω описать соответствующий прямоугольник, а функцию $F(\xi_1, \xi_2)$ необходимо считать равной нулю, если точка $(\xi_1, \xi_2) \in \Omega$.

3. Круговой раскрыв. Рассмотрим круговой раскрыв радиуса a с центром в начале координат. Для простоты будем считать, что амплитудная ДН F задана в конусе $\Omega: \{|\sin \theta| \leq \sin \alpha, \varphi \in [0, 2\pi]\}$. Сделаем в (1), (2) переход к полярным координатам и предположим, что распределение поля в раскрыве является функцией, зависящей только от радиуса, т. е. $U(\rho', \varphi') = U(\rho')$ *. Такие распределения создают осесимметричные ДН, которые широко используются на практике и характерны относительной простотой реализации. При этом диаграмма направленности преобразуется к виду

$$f(\xi) = 2\pi \int_0^1 U(\rho) J_0(c\xi\rho) \rho d\rho, \quad (15)$$

где $c = ka \sin \alpha$, $\rho = \rho'/a$, $\xi = \sin \theta / \sin \alpha$. В этом случае задача синтеза сводится к минимизации функционала

$$\sigma = \int_0^1 [F(\xi) - |f(\xi)|]^2 \xi d\xi + \int_1^\infty |f(\xi)|^2 \xi d\xi. \quad (16)$$

Условие стационарности σ приводит к нелинейному интегральному уравнению вида

$$f(\xi) = (c/2\pi)^2 \int_0^1 F(\xi') K(\xi, \xi', c) e^{j \arg f(\xi')} \xi' d\xi', \quad (17)$$

где

$$K(\xi, \xi', c) = \frac{\xi J_0(c\xi') J_1(c\xi) - \xi' J_0(c\xi) J_1(c\xi')}{c[\xi^2 - (\xi')^2]}, \quad (18)$$

J_0 и J_1 — соответственно функции Бесселя первого рода.

Уравнение (17) аналогично [3] можно исследовать при помощи теории ветвления решений нелинейных уравнений. При всех $c > 0$ существует решение в классе синфазных диаграмм вида

$$f_0(\xi) = \int_0^1 F(\xi') K(\xi, \xi', c) \xi' d\xi'. \quad (19)$$

С ростом параметра c происходит разветвление решений.

Точки ветвления суть такие значения параметра $c = c_i$, при которых единица является собственным значением линейного однородного интегрального уравнения

* Разумеется, такое ограничение в постановке задачи исключает несимметричные распределения поля.

$$\omega(\xi) = \int_0^1 F(\xi') K(\xi, \xi', c) \frac{\omega(\xi')}{f_0(\xi')} d\xi', \quad (20)$$

полученного из (17) путем соответствующей линейризации. Собственные функции этого уравнения в точках ветвления имеют вид

$$\omega_0(\xi) = f_0(\xi), \quad \omega_1(\xi) = f_0(\xi)/(1 + \eta\xi^2), \quad (21)$$

где η — некоторый параметр, зависящий от F . Учитывая вид функций (21), из (20) несложно получить систему трансцендентных уравнений для определения точек ветвления и параметра:

$$\int_0^1 \frac{F(\xi) J_0(c\xi)}{1 + \eta\xi^2} \xi d\xi = 0, \quad \int_0^1 \frac{F(\xi) J_1(c\xi)}{1 + \eta\xi^2} \xi^2 d\xi = 0. \quad (22)$$

Аналогичные [2, 3] преобразования показывают, что в точках c_i от решения (19) ответвляются два комплексно-сопряженных между собой решения, которые в окрестности точки ветвления, т. е. при $c = c_i + \mu$,

где μ — малое положительное число, можно представить в виде

$$u(\xi, c) = f_0(\xi, c_i) + [\alpha(\xi, c_i) + \beta(\xi, c_i)h^2]\mu + o(\mu), \quad (23)$$

$$v(\xi, c) = \pm \omega_1(\xi, c_i) h \mu^{1/2} + o(\mu^{1/2}).$$

Здесь $u(\xi, c) + jv(\xi, c) = f(\xi, c)$, h — соответствующий коэффициент, зависящий от ω_1 и F , а функции $\alpha(\xi, c_i)$, $\beta(\xi, c_i)$ определяются соответствующим образом через коэффициенты разложения подынтегрального выражения в (17) в степенные ряды по функциям u и v .

Пример численного синтеза кругового раскрыва приведен на рис. 4 при $F(\xi) = 1$, $c = 6$. Сплошными линиями показано оптимальное решение, а пунктирными — тривиальное.

Для более общего случая, когда $U(\rho, \varphi) \neq U(\rho)$, остаются справедливыми свойства четности интегрального оператора в уравнении (5).

В этом легко убедиться, рассматривая (5) в декартовой системе координат. Аналогично п. 2 можно сделать некоторые предположения о количестве и характере решений.

4. Рассмотренный выше подход к решению задачи синтеза двумерного раскрыва основан на анализе и численном решении нелинейного интегрального уравнения относительно оптимальной диаграммы. Это уравнение имеет не единственное решение, так как заданной является только амплитудная ДН. Количество решений зависит от свойств заданной ДН и электрических размеров раскрыва, которые характеризуются двумя параметрами c_1, c_2 . С ростом этих параметров происходит разветвление решений. При этом ответвляются от тривиального решения являются более эффективными, поскольку они лучше (в смысле (2)) приближают заданную ДН. Как показывают численные эксперименты, значение функционала на ответвляющихся ре-

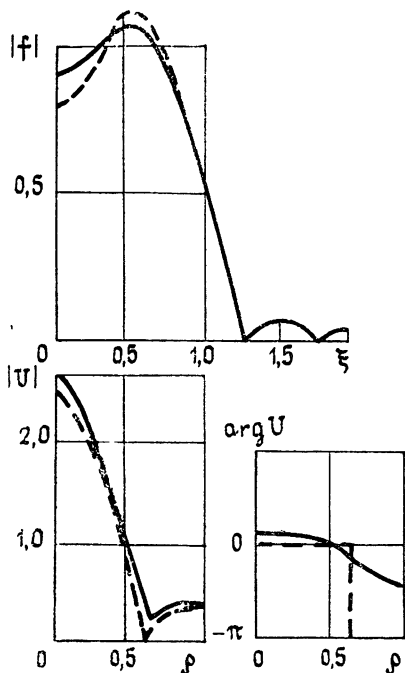


Рис. 4.

шениях примерно на 20—80 процентов меньше, чем на тривиальном решении. Наиболее явно эффективность нетривиальных решений проявляется при синтезе воронкообразных и разностных диаграмм.

Знание количества и качественных характеристик решений позволяет эффективно решать уравнение методом последовательных приближений; более того, это позволяет находить глобальный экстремум функционала (2) в той области пространства реализуемых диаграмм, которая содержит тривиальное решение. При этом радиус области определяется радиусом равномерной сходимости степенных рядов, в которые разлагаются подынтегральные выражения в (5).

Наряду с уравнением (5) можно получить также уравнение для оптимального распределения поля. Для этого достаточно (1) подставить в (4). Однако полученное при этом уравнение намного сложнее, поскольку оно содержит интеграл в экспоненте. С этой стороны уравнение (5) проще, так как для прямоугольного и кругового раскрывов ядро (6) интегрируется в явном виде.

Обсуждаемый метод легко обобщается также на случай синтеза плоских антенных решеток.

ЛИТЕРАТУРА

1. Войтович Н. Н., Савенко П. А. — Радиотехника и электроника, 1973, 18, № 9, с. 1794.
2. Войтович Н. Н., Савенко П. А. — Радиотехника и электроника, 1976, 21, № 4, с. 723.
3. Савенко П. А. — Изв вузов — Радиофизика, 1979, 22, № 12, с. 1498
4. Зелкин Е. Г., Соколов В. Г. Методы синтеза антенн: фазированные антенные решетки и антенны с непрерывным раскрывом. — М: Сов. радио, 1980.
5. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений — М Наука, 1969

Вычислительный центр
Института прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редакцию
6 июля 1984 г.,
после доработки
20 марта 1985 г.

ON THE BRANCHING OF SOLUTIONS FOR PLANAR APERTURE RADIATING SYSTEMS SYNTHESIS ACCORDING TO A GIVEN AMPLITUDE PATTERN

P. A. Savenko

The problem of the synthesis of a planar aperture formulated variationally is reduced to a nonlinear integrational equation as regards the optimum pattern. The quantity and properties of solutions for square and circular apertures are analysed dependent on the electrical dimensions of the aperture and on the properties of the given amplitude pattern. Numerical evaluation results are discussed.
