ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXIX, № 3 РАДИОФИЗИКА 1986

УДК 621.396.677

О ВОЗМОЖНОСТИ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ВИНЕРА—ХОПФА В ЗАДАЧЕ ДИФРАКЦИИ НА $2N+1$ ПОЛУПЛОСКОСТЯХ

С. Ю. Коршунков

Указан алгоритм сведения системы двух функциональных уравнений Винера—Хопфа, которые описывают задачу дифракции на $2N+1$ полуплоскостях, к двум бесконечным системам линейных алгебраических уравнений. Показана реализуемость алгоритма для случая четырех волноводов.

В [1] предложен и реализован численный метод решения задачи излучения ТЕМ-волны из двух плоских волноводов, образованных тремя полуплоскостями. Задача решена в строгой постановке, причем показано, что два функциональных уравнения типа Винера—Хопфа приводят к хорошо обусловленной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. В настоящей работе метод решения, изложенный в [1], распространяется на случай произвольного (четного) числа волноводов.

Пусть система из $2N$ плоских волноводов высотой a, образованных $2N+1$ исчезающе тонкими, идеально проводящими полуплоскостями, возбуждается набором ТЕМ-волн с единичной амплитудой и произвольной фазой Φ_n (см. рис. 1). Введем разбиение на области, как указано на рис. 1, и рассмотрим решение волновых уравнений, которым удовлетворяет фурье-преобразование компоненты $H_y(x,z)$ рассеянного поля в каждой из подобластей.

В областях 1 и 3 решения волнового уравнения

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^2} - \gamma^2\right] \varphi^{(1,3)}(x,\alpha) = 0,$$

где $\gamma=\sqrt{\alpha^2-k^2}$, $\mathrm{Re}(\gamma)>0$, k — волновое число, имеют вид

$$\varphi^{(1)}(x,\alpha) = A(\alpha)\, e^{\gamma x}, \quad \varphi^{(3)}(x,\alpha) = B(\alpha)\, e^{-\gamma x}.$$

Дифференцируя эти соотношения по переменной x и исключая неизвестные функции $A(\alpha)$ и $B(\alpha)$, получаем

$$\begin{gathered} \varphi_+^{(1)\prime}(0,a) = \gamma\, [\varphi_+^{(1)}(0,\alpha) + \varphi_-^{(1)}(0,\alpha)], \\ \varphi_+^{(3)\prime}(2Na,\alpha) = -\gamma\, [\varphi_+^{(3)}(2Na,\alpha) + \varphi_-^{(3)}(2Na,\alpha)]. \end{gathered} \tag{1}$$

Здесь введены обозначения

$$\varphi^{(l)}(x,\alpha) = \varphi_+^{(l)}(x,\alpha) + \varphi_-^{(l)}(x,\alpha) = \int\limits_0^\infty H_y^{(l)}(x,z)\, e^{i\alpha z}\, dz + \int\limits_{-\infty}^0 H_y^{(l)}(x,z)\, e^{i\alpha z}\, dz,$$

l — номер подобласти, а знаки «+» и «—» присваиваются функциям, регулярным соответственно в верхней и нижней полуплоскостях комплексной переменной α. При выводе (1) учтено обращение в нуль функции $\varphi'_{-}(na, \alpha)=0$ $(n=0, 1, ..., 2N)$, пропорциональной электрической составляющей поля на полуплоскостях. Для удобства дальнейшего изложения введем новые неизвестные с помощью соотношений

$$S_{+}^{(m,n)}(\alpha)=\varphi_{+}^{(l)}(ma, \alpha)+\varphi_{+}^{(l)}(na, \alpha),$$
$$D_{+}^{(m,n)}(\alpha)=\varphi_{+}^{(l)}(ma, \alpha)-\varphi_{+}^{(l)}(na, \alpha), \tag{2}$$

где $m, n=0, 1, ..., 2N$, а l — номер подобласти, который в данном случае не имеет значения ввиду непрерывности поля на продолжениях полуплоскостей.

Складывая и вычитая уравнения (1), переходим к новым неизвестным

$$S_{+}^{(2N,0)'}(\alpha)=-\gamma\,[D_{+}^{(2N,0)}(\alpha)+V_{-}(\alpha)],$$
$$D_{+}^{(2N,0)'}(\alpha)=-\gamma\,[S_{+}^{(2N,0)}(\alpha)+W_{-}(\alpha)], \tag{3}$$

где

$$V_{-}(\alpha)=-\varphi_{-}^{(3)}(2Na, \alpha)+\varphi_{-}^{(1)}(0, \alpha),$$
$$W_{-}(\alpha)=-\varphi_{-}^{(3)}(2Na, \alpha)-\varphi_{-}^{(1)}(0, \alpha).$$

Согласно [1], следующая система уравнений связи описывает дифрагированное поле в области (2, 1):

$$S_{+}^{(2,0)}(\alpha)=D_{+}^{(2,0)'}(\alpha)\,L_{1}^{(1)}(\alpha)+F_{1}^{(2,0)}(\alpha),$$
$$D_{+}^{(2,0)}(\alpha)=S_{+}^{(2,0)'}(\alpha)L_{2}^{(1)}(\alpha)+F_{2}^{(2,0)}(\alpha), \tag{4}$$

где

$$L_{1}^{(1)}(\alpha)=\frac{1}{\gamma}\,\frac{\operatorname{ch}\gamma a}{\operatorname{sh}\gamma a}, \quad L_{2}^{(1)}(\alpha)=\frac{1}{\gamma}\,\frac{\operatorname{sh}\gamma a}{\operatorname{ch}\gamma a},$$

$$F_{1}^{(2,0)}(\alpha)=\frac{i}{\alpha+k}\,(e^{i\Phi_1}+e^{i\Phi_2})+i\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^{p}\,\frac{A_{p}^{(1)}+A_{p}^{(2)}}{\alpha-\alpha_{p}},$$

$$F_{2}^{(2,0)}(\alpha)=\frac{i}{\alpha+k}\,(e^{i\Phi_1}-e^{i\Phi_2})+i\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^{p}\,\frac{A_{p}^{(1)}-A_{p}^{(2)}}{\alpha-\alpha_{p}}-$$
$$-\frac{i}{\operatorname{ch}\gamma a}\left[\frac{1}{\alpha+k}\,(e^{i\Phi_1}-e^{i\Phi_2})+\sum_{p=0}^{\infty}\frac{A_{p}^{(1)}-A_{p}^{(2)}}{\alpha-\alpha_{p}}\right], \tag{5}$$

где $\alpha_{n}=\sqrt{k^{2}-\pi^{2}n^{2}/a^{2}}$ — постоянные распространения, а $A_{p}^{(j)}$ — коэффициенты в разложении поля внутри j-го волновода по собственным волноводным модам:

$$H_{y}(x, z<0)=e^{i(kz+\Phi_{j})}+\sum_{p=0}^{\infty}A_{p}^{(j)}\cos\frac{\pi px}{a}\,e^{-i\alpha_{p}z}.$$

Заметим, что в области (2, 1) фурье-преобразование компоненты $H_{y}(x, z>0)$ рассеянного поля удовлетворяет следующему волновому уравнению:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^2}-\gamma^2\right]\varphi_+^{(2,1)}(x,\alpha)=\left.\frac{\partial H_y(x,z)}{\partial z}\right|_{z=0}-i\alpha H_y(x,0),$$

причем при выводе (4) использовалась непрерывность фурье-преобразований компонент электрического (E_z) и магнитного (H_y) полей на полуплоскости $x=a$, $z>0$ и отрезке $z=0$, $0<x<2a$. Уравнения (4) совместно с уравнениями (3) при $N=1$ позволяют решить задачу излучения из двух плоских волноводов. Повторим схему ее решения, следуя [1].

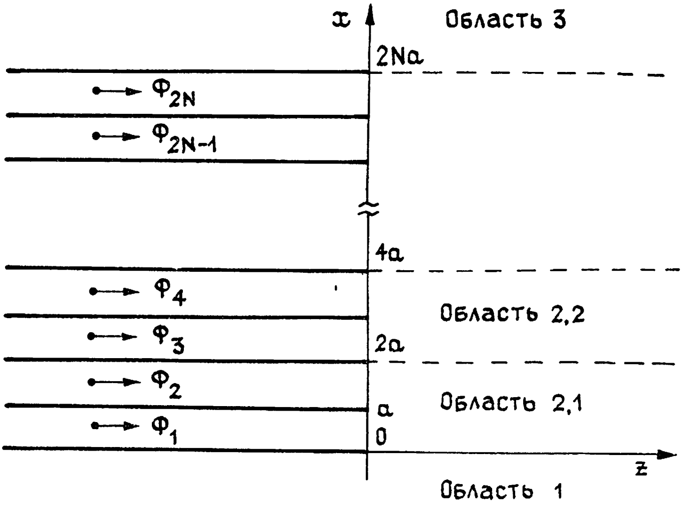

Рис 1.

Исключая из (3) и (4) функции $S_+^{(2,0)}(\alpha)$ и $D_+^{(2,0)}(\alpha)$, приходим к системе двух уравнений Винера — Хопфа, которые допускают независимые решения:

$$D_+^{(2,0)\prime}(\alpha)\left(\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\gamma}\frac{\operatorname{ch}\gamma a}{\operatorname{sh}\gamma a}\right)+F_1^{(2,0)}(\alpha)-V_-(\alpha)=0,$$

$$S_+^{(2,0)\prime}(\alpha)\left(\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\gamma}\frac{\operatorname{sh}\gamma a}{\operatorname{ch}\gamma a}\right)+F_2^{(2,0)}(\alpha)-W_-(\alpha)=0. \qquad (6)$$

Рассмотрим первое уравнение. Функцию в круглых скобках нетрудно факторизовать, т. е. представить в виде

$$\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\gamma}\frac{\operatorname{ch}\gamma a}{\operatorname{sh}\gamma a}=L_{1+}^{(1)}(\alpha)\,L_{1-}^{(1)}(\alpha).$$

Разделив рассматриваемое уравнение на $L_{1-}^{(1)}(\alpha)$ и представив его второй член в виде

$$\frac{F_1^{(2,0)}(\alpha)}{L_{1-}^{(1)}(\alpha)}=f_{1+}^{(2,0)}(\alpha)+f_{1-}^{(2,0)}(\alpha)$$

(что нетрудно сделать, так как $F_1^{(2,0)}(\alpha)$, как видно из (5), — мероморфная функция), приходим к следующему уравнению:

$$D_+^{(2,0)\prime}(\alpha)\,L_{1+}^{(1)}(\alpha)+f_{1+}^{(2,0)}(\alpha)=\frac{V_-(\alpha)}{L_{1-}^{(1)}(\alpha)}-f_{1-}^{(2,0)}(\alpha). \qquad (7)$$

Учитывая асимптотику входящих в уравнение (7) функций, следующую из условия на остром ребре, приходим с помощью теоремы Лиувилля к заключению, что обе части уравнения (7) равны нулю и, таким образом,

$$D_{+}^{(2,0)\prime}(\alpha) = -f_{1+}^{(2,0)}(\alpha)/L_{1+}^{(1)}(\alpha). \tag{8а}$$

Аналогично получаем

$$S_{+}^{(2,0)\prime}(\alpha) = -f_{2+}^{(2,0)}(\alpha)/L_{2+}^{(1)}(\alpha). \tag{8б}$$

Мы получили выражения для неизвестных функций $D_{+}^{(2,0)\prime}(\alpha)$ и $S_{+}^{(2,0)\prime}(\alpha)$ через два набора неизвестных коэффициентов $A_p^{(j)}$, $j=1,2$; $p=0,1,\dots,\infty$. Чтобы получить две системы линейных алгебраических уравнений для этих коэффициентов, воспользуемся уравнениями связи (4), которые отражают тот факт, что дифрагированное поле на продолжении полуплоскостей не имеет дискретного спектра. Ввиду регулярности левых частей этих уравнений в верхней полуплоскости правые части также должны быть регулярны, поэтому сумма вычетов правых частей в точках, соответствующих константам распространения электрических и магнитных волн между параллельными полуплоскостями, должна быть равна нулю. Это дает связь значений неизвестных функций $D_{+}^{(2,0)\prime}(\alpha)$ и $S_{+}^{(2,0)\prime}(\alpha)$ в некоторых точках с неизвестными коэффициентами $A_p^{(j)}$. Подставляя полученные выражения в решения функциональных уравнений (8), получаем искомые бесконечные системы линейных алгебраических уравнений.

Таким образом, используя систему (3), полученную из рассмотрения полей сверху и снизу от волноводов, и систему (4), полученную из рассмотрения полей справа от волноводов, мы нашли решение, сводя задачу к двум бесконечным системам линейных алгебраических уравнений. Если мы покажем теперь, что при рассмотрении полей справа от $2N$ плоских волноводов получаются соотношения

$$D_{+}^{(2N,0)}(\alpha) = S_{+}^{(2N,0)\prime}(\alpha)\, L_1^{(N)}(\alpha) + F_1^{(2N,0)}(\alpha)$$

и (9)

$$S_{+}^{(2N,0)}(\alpha) = D_{+}^{(2N,0)\prime}(\alpha)\, L_2^{(N)}(\alpha) + F_2^{(2N,0)}(\alpha),$$

где

$$L_1^{(N)}(\alpha) = \frac{1}{\gamma}\,\frac{\operatorname{ch} N\gamma a}{\operatorname{sh} N\gamma a}, \quad L_2^{(N)}(\alpha) = \frac{1}{\gamma}\,\frac{\operatorname{sh} N\gamma a}{\operatorname{ch} N\gamma a},$$

а $F_1^{(2N,0)}(\alpha)$ и $F_2^{(2N,0)}(\alpha)$ — мероморфные функции, то, применяя описанную выше процедуру решения и заменяя в ней систему (4) на систему (9), мы получим две бесконечные системы линейных алгебраических уравнений относительно $2N$ наборов неизвестных коэффициентов $A_p^{(j)}$, $j=1,\dots,2N$; $p=0,1,\dots,\infty$, возникающих при разложении полей внутри волноводов в ряды по собственным модам, и, тем самым, найдем решение задачи об излучении ТЕМ-волн из $2N$ плоских волноводов.

Справедливость системы (9) докажем по индукции. Пусть система $2N-2$ волноводов описывается уравнениями

$$\begin{aligned} D_{+}^{(2N-2,0)}(\alpha) &= S_{+}^{(2N-2,0)\prime}(\alpha)\, L_1^{(N-1)}(\alpha) + F_1^{(2N-2,0)}(\alpha), \\ S_{+}^{(2N-2,0)}(\alpha) &= D_{+}^{(2N-2,0)\prime}(\alpha)\, L_2^{(N-1)}(\alpha) + F_2^{(2N-2,0)}(\alpha). \end{aligned} \tag{10}$$

Добавим к ним уравнения, описывающие два примыкающих волновода:

$$\begin{aligned} D_{+}^{(2N,2N-2)}(\alpha) &= S_{+}^{(2N,2N-2)\prime}(\alpha)\, L_1^{(1)}(\alpha) + F_1^{(2N,2N-2)}(\alpha), \\ S_{+}^{(2N,2N-2)}(\alpha) &= D_{+}^{(2N,2N-2)\prime}(\alpha)\, L_2^{(1)}(\alpha) + F_2^{(2N,2N-2)}(\alpha). \end{aligned} \tag{11}$$

Применим теперь к уравнениям (10) и (11) следующее свойство функций, введенных формулами (2): для любых $m>l>n$ имеем

$$S_{+}^{(m,n)}(\alpha)=S_{+}^{(m,l)}(\alpha)-D_{+}^{(l,n)}(\alpha)=D_{+}^{(m,l)}(\alpha)+S_{+}^{(l,n)}(\alpha),$$

$$D_{+}^{(m,n)}(\alpha)=D_{+}^{(m,l)}(\alpha)+D_{+}^{(l,n)}(\alpha)=S_{+}^{(m,l)}(\alpha)-S_{+}^{(l,n)}(\alpha).$$

Тогда мы получим систему (9), в которой

$$L_1^{(N)}(\alpha)=$$

$$=\frac{[L_2^{(N-1)}(\alpha)+L_2^{(1)}(\alpha)]L_1^{(N-1)}(\alpha)L_1^{(1)}(\alpha)+[L_1^{(N-1)}(\alpha)+L_1^{(1)}(\alpha)]L_2^{(N-1)}(\alpha)L_2^{(1)}(\alpha)}{[L_1^{(N-1)}(\alpha)+L_1^{(1)}(\alpha)]\,[L_2^{(N-1)}(\alpha)+L_2^{(1)}(\alpha)]},$$

$$L_2^{(N)}(\alpha)=\frac{[L_1^{(N-1)}(\alpha)+L_1^{(1)}(\alpha)]\,[L_2^{(N-1)}(\alpha)+L_2^{(1)}(\alpha)]}{L_1^{(N-1)}(\alpha)+L_1^{(1)}(\alpha)+L_2^{(N-1)}(\alpha)+L_2^{(1)}(\alpha)},$$

$$F_1^{(2N,0)}(\alpha)=(1/2)\,\{[F_2^{(2N,\,2N-2)}(\alpha)+F_2^{(2N-2,0)}(\alpha)]\,[L_1^{(N-1)}(\alpha)+L_1^{(1)}(\alpha)]+$$

$$+[F_1^{(2N-2,0)}(\alpha)-F_1^{(2N,\,2N-2)}(\alpha)]\,[L_2^{(N-1)}(\alpha)-L_2^{(1)}(\alpha)]\}\,[L_1^{(N-1)}(\alpha)+$$

$$+L_1^{(1)}(\alpha)+L_2^{(N-1)}(\alpha)+L_2^{(1)}(\alpha)]^{-1},\tag{12}$$

$$F_2^{(2N,0)}(\alpha)=\frac{F_1^{(2N,\,2N-2)}(\alpha)\,L_1^{(1)}(\alpha)-F_1^{(2N-2,0)}(\alpha)\,L_1^{(N-1)}(\alpha)}{L_1^{(N-1)}(\alpha)+L_1^{(1)}(\alpha)}+$$

$$+\frac{F_2^{(2N,\,2N-2)}(\alpha)\,L_2^{(1)}(\alpha)+F_2^{(2N-2,0)}(\alpha)\,L_2^{(N-1)}(\alpha)}{L_2^{(N-1)}(\alpha)+L_2^{(1)}(\alpha)}.$$

Выражения для $L_1^{(N)}(\alpha)$ и $L_2^{(N)}(\alpha)$ легко приводятся к виду (9), а функции $F_1^{(2N,0)}(\alpha)$ и $F_2^{(2N,0)}(\alpha)$ являются мероморфными, так как выражаются с помощью арифметических операций через мероморфные функции. Получить прямую зависимость этих функций от N в общем виде не удается, поэтому следует пользоваться рекуррентными формулами (12), позволяющими последовательно получить уравнения связи (т. е. уравнения (9)) для четырех, шести и т. д. волноводов.

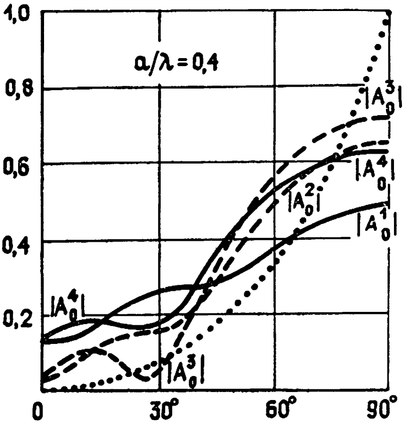

Рис. 2.

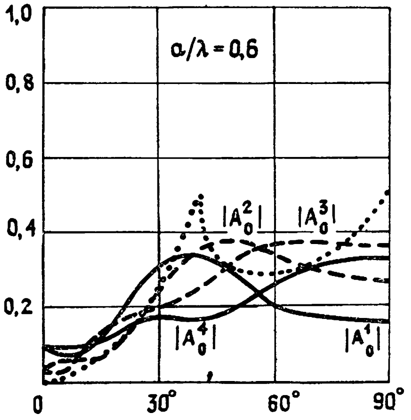

Рис. 3.

Изложенная процедура решения была применена к задаче возбуждения четырех волноводов ТЕМ-волнами с линейным набегом фазы: $\Phi_n=kan\sin\theta$. Численное решение на ЭВМ системы с 60 комплексными неизвестными показало реализуемость алгоритма и возможность достижения точности полученных результатов до 0,1% при высотах каждого волновода до трех длин волн. На рис. 2 и 3 для двух высот волноводов, соответствующих одномодовому и двухмодовому случаю, приведены графики изменения коэффициента отражения каждого волновода от угла θ. Точками изображен коэффициент отражения волновода в составе периодической структуры.

В заключение следует отметить, что возможность получения разрешимой системы функциональных уравнений Винера—Хопфа для четного числа волноводов была высказана С. М. Журавом в 1977 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Журав С М, Коршунков С. Ю. — Изв. вузов — Радиофизика, 1982, **25**, № 8, с. 918.

Поступила в редакцию
15 мая 1984 г.,
после переработки
18 февраля 1985 г.

THE SOLVABILITY OF WINER — HOPF EQUATIONS IN THE PROBLEM OF DIFFRACTION BY $2N+1$ HALFPLANES

S. Yu. Korshunkov

Method of transformation of two Winer — Hopf functional equations, which are formulated in the problem of diffraction by $2N+1$ halfplanes, in two infinite systems of algebraic equations is presented. Realization of the method in question is introduced in the case of four waveguides.

АСТРОНОМИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 1986, т. 61, вып. 4

Полнарев А. Г. Поляризация и анизотропия реликтового излучения, вызванная космологическими гравитационными волнами

Получено приближенное решение уравнения переноса поляризованного излучения в поле слабой гравитационной волны. Показано, что отношение степени поляризации к анизотропии существенным образом зависит от длины волны. Это отношение достигает наибольшего значения (10—20%) для волн короче характерного масштаба немгновенности космологической рекомбинации. При учете немгновенности рекомбинации проявляется специфика гравитационных волн, связанная с тем, что гравитационные волны распространяются со скоростью света и являются поперечными Даны оценки угловых масштабов случайной анизотропии и поляризации в зависимости от характерной длины волны случайных космологических гравитационных волн

Леденев В. Г. Радиоизлучение из ударной волны в солнечном ветре.

Показано, что область повышенной электронной температуры во фронте ударной волны, распространяющейся вдоль магнитного поля на больших расстояниях от Солнца, может быть ограничена резким скачком температуры (бесстолкновительной тепловой электронной волной), ширина которого определяется ионно-звуковой турбулентностью, развивающейся на встречных потоках горячих и холодных электронов. Энергичные электроны, убегающие из фронта тепловой волны, возбуждают плазменные волны, которые затем трансформируются в радиоизлучение.