ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXIX, № 3 РАДИОФИЗИКА 1986

УДК 537.87 535 24

ГАУССОВЫ ПУЧКИ НА БОЛЬШИХ ДАЛЬНОСТЯХ

В. Э. Грикуров, А. П. Киселев

Исследуются причины непригодности классических формул для гауссовых пучков на больших дальностях Строятся новые представления для пучков, сводящиеся в однородной среде к сферическим волнам с узкими диаграммами направленности.

Гауссовы пучки, или сосредоточенные вблизи лучей колебания, привлекают внимание не только в связи с их значением в теории лазерного излучения [1], но и ввиду появления метода суммирования пучков для расчетов волновых полей различной природы [2, 3]. Настоящая статья посвящена анализу области применимости по дальности известных формул для гауссовых пучков и модернизации этих формул для больших расстояний.

Традиционные формулы для пучков можно получить методом параболического уравнения [1, 4], основанным на отделении множителя e^{ikz} (для однородной среды); другие подходы [5, 6] приводят лишь ко второстепенным отличиям в высших приближениях. Однако указанный быстроосциллирующий множитель отвечает плоской волне и не учитывает кривизну фронта, что неизбежно должно приводить к неприменимости полученных таким образом формул на больших дальностях*. Оказывается, что условием пригодности гауссова пучка является условие ближней зоны. Этот результат может быть установлен путем анализа высших приближений в методе параболического уравнения, в то время как известный критерий $|W_{zz}| \ll |2_{ik}W_z|$ не приводит к содержательным оценкам.

На больших дальностях в однородной среде естественным является отделение множителя, отвечающего сферической волне. Гауссов пучок в этом случае представляется сферической волной с узкой диаграммой направленности. Это представление, непригодное при ограниченных z, «сшивается» с традиционным в промежуточной области.

Указанные построения для однородной среды выполнены в разд. 1 с вынесением некоторых деталей в Приложение.

Разд. 2 посвящен построению нового класса сосредоточенных решений уравнения Гельмгольца в трехмерно-неоднородной среде. Эти решения обобщают построения разд. 1 для гауссовых пучков на больших дальностях и тесно связаны с параболическим уравнением в лучевых координатах, появившемся вне связи с пучками в важной работе [9].

1. Гауссовы пучки для однородной среды. Начнем для простоты со случая двух пространственных переменных.

Построение сосредоточенных асимптотических решений уравнения

* Это явление отчетливо проявляется при численной реализации метода суммирования гауссовых пучков (см., например, [7]),

$$u_{xx}+u_{zz}+k^2u=0 \tag{1.1}$$

методом параболического уравнения состоит в отделении быстроосциллирующего множителя

$$u=e^{ikz}W$$

и предположении

$$|W_{zz}| \ll 2k|W_z|. \tag{1.2}$$

Возникающее в результате приближенное параболическое уравнение $W_{xx}+2ikW_z=0$ имеет частное решение вида $W^{(0)}=(a/s)^{1/2}\exp[ikx^2(2s)^{-1}]$, $s=z-ia$, где $a>0$ — произвольная фиксированная константа.

Гауссовым пучком с образующим лучом $x=0$ (точнее, нулевой модой) называется выражение

$$U=e^{ikz}W^{(0)}=(\zeta-i)^{-1/2}\exp\left[i\varkappa\left(\zeta+\frac{\xi^2}{2(\zeta-i)}\right)\right], \qquad \xi=x/a, \quad \zeta=z/a, \quad \varkappa=ka, \tag{1.3}$$

экспоненциально убывающее при $|\xi|\to\infty$ в каждом сечении $\zeta=\text{const}$.

Под областью пригодности выражения (1.3) для пучка мы будем понимать множество точек (x, z), где (1.3) не только является асимптотическим при

$$\varkappa=ka\to\infty \tag{1.4}$$

решением (1.1), но и сосредоточенным решением. Это значит, что при всяком ζ из области пригодности величина

$$P(\xi,\zeta;\varkappa)=\operatorname{Re}\left(\frac{i\varkappa}{2}\frac{\xi^2}{\zeta-i}\right)=-\frac{\varkappa}{2}\frac{\xi^2}{\zeta^2+1}, \tag{1.5}$$

определяющая поперечное спадание амплитуды пучка, принимает как конечные, так и большие значения. Иными словами,

$$P(\xi,\zeta;\varkappa)=O(\varkappa^\gamma), \quad \gamma>0. \tag{1.6}$$

Оценим область пригодности (1.3), исходя из неравенства (1.2). Замечая, что дифференцирование по z эквивалентно умножению на $a^{-1}(\zeta_*^{-1}+\varkappa\xi^2\zeta_*^{-2})$, $\zeta_*=\zeta-i$, легко получить, что (1.2) эквивалентно условию параксиальности $|\xi|/|\zeta_*|\ll 1$, которое не накладывает ограничений на величину $|\zeta|$.

Рассмотрим область пригодности (1.3), исходя из анализа, в рамках метода параболического уравнения, высших приближений. Положим

$$u=e^{i\varkappa\zeta}\sum_{j=0}^{\infty}W^{(j)}(\sqrt{\varkappa}\xi,\zeta)\varkappa^{-j}, \tag{1.7}$$

причем $W^{(j)}$ имеют ту же скорость экспоненциального спадания при $|\xi|\to\infty$, что и (1.3). Подстановка (1.7) в (1.1) и приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях $\varkappa$ приводит к рекуррентным уравнениям

$$W^{(j+1)}_{\Xi\Xi}+2iW^{(j+1)}_{\zeta}=-W^{(j)}_{\zeta\zeta}, \quad j=0,1,\ldots, \quad \Xi=\sqrt{\varkappa}\xi,$$

которые легко решить явно. В частности,

$$W^{(1)}=(-2i)^{-1}(\zeta W^{(0)})_{\zeta\zeta}+\text{const}\,W^{(0)}. \tag{1.8}$$

Ряд (1.7) имеет асимптотический характер, если

$$|W^{(j+1)}|\ll\varkappa|W^{(j)}|, \tag{1.9}$$

Неравенство (1.9) для $j=0$, выражающее относительную малость первой поправки к (1.3), с учетом (1.8) принимает вид критерия применимости френелевского приближения

$$\varkappa\xi^4|\zeta_*|^{-3}\ll 1. \tag{1.10}$$

Условие (1.10) обеспечивает, как можно показать, и выполнение соотношений (1.9) для всех j.

Из (1.5), (1.6) и (1.10) следует оценка для дальности z в области пригодности ряда (1.6)

$$|z|\ll ka^2. \tag{1.11}$$

Эта оценка будет уточнена в Приложении.

Для $z\to\pm\infty$ изложенный выше метод параболического уравнения естественно модифицировать, заменив выделяемый быстроосциллирующий множитель на $e^{\pm ikr}$, $r=\sqrt{x^2+z^2}$. Это приводит к представлению поля цилиндрическими волнами

$$u\sim\frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{f_m^+(\psi,\varkappa)}{(ikr)^m}+\frac{e^{-ikr}}{\sqrt{kr}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{f_m^-(\psi,\varkappa)}{(-ikr)^m}. \tag{1.12}$$

Здесь ψ — угол с положительным направлением оси z, а функции $f_m^\pm$, $m\geqslant 1$, выражаются через диаграммы направленности $f_0^\pm$:

$$f_{m+1}^\pm=\frac{1}{2(m+1)}\left(\frac{\partial^2}{\partial\psi^2}+m(m+1)+\frac{1}{4}\right)f_m^\pm,\quad m=0,1,\ldots \tag{1.13}$$

Для определения $f_0^\pm(\psi,\varkappa)$ сошьем в старшем порядке разложения (1.7) и (1.12). Очевидно, фаза выражения (1.3) допускает при $\zeta\to\infty$ и $|\psi|\ll 1$ преобразование

$$i\varkappa\left(\zeta+\frac{1}{2}\frac{\xi^2}{\zeta-i}\right)\sim i\varkappa\left(\zeta+\frac{1}{2}\frac{\xi^2}{\zeta^2}\right)-\frac{\varkappa}{2}\frac{\xi^2}{\zeta^2}=ikr-$$
$$-\frac{\varkappa}{2}\psi^2+O\left(\varkappa\frac{\xi^4}{\zeta^3}\right). \tag{1.14}$$

Заметим, что требование малости отбрасываемых членов в правой части (1.14) эквивалентно френелевскому условию (1.10). Пользуясь (1.10) и замечая, что $\sqrt{\zeta-i}\sim\sqrt{r/a}$, находим, что $f_0^-(\psi,\varkappa)=0$,

$$f_0^+(\psi,\varkappa)=\sqrt{\varkappa}\exp\left(-\frac{\varkappa}{2}\psi^2\right). \tag{1.15}$$

В окрестности направления $\zeta\to-\infty$ аналогично $f_0^+(\psi,\varkappa)=0$

$$f_0^-(\psi,\varkappa)=-i\sqrt{\varkappa}\exp\left(-\frac{\varkappa}{2}(\pi-\psi)^2\right). \tag{1.16}$$

Выбрав согласно (1.15) и (1.16) главные члены в (1.12), можно оценить область, в которой это разложение имеет асимптотический при $\varkappa\to\infty$ характер, и показать, что она пересекается с областью пригодности (1.7) (см. Приложение). Сшивание высших приближений можно осуществить посредством стандартной процедуры [8].

В трехмерном случае нулевая мода гауссова пучка

$$U=\sqrt{ab}(z-ia)^{-1/2}(z-ib)^{-1/2}\times$$

$$\times \exp\left[ik\left(z+\frac{1}{2}\,\frac{x^2}{z-ia}+\frac{1}{2}\,\frac{y^2}{z-ib}\right)\right], \tag{1.17}$$

определяемая двумя постоянными $a>0$, $b>0$, при $|z|\to\infty$ переходит в

$$\frac{e^{ikR}}{kR}\,F_0^+(ka, kb, \varphi, \psi)+\frac{e^{-ikR}}{kR}\,F_0^-(ka, kb, \varphi, \psi). \tag{1.18}$$

Здесь $R=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, φ и ψ — угловые координаты ($\psi=\pi/2$ совпадает с положительным направлением оси z, φ — угол в ортогональной плоскости), а функции $F_0^\pm$ в окрестности направлений $\psi=\pm\pi/2$ имеют соответственно вид

$$\begin{gathered}F_0^\pm(ka, kb, \varphi, \psi)=\pm\sqrt{ka}\sqrt{kb}\,\times\\ \times\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\psi\mp\frac{\pi}{2}\right)^2(ka\cos^2\varphi+kb\sin^2\varphi)\right]\end{gathered} \tag{1.19}$$

и гладко продолжены нулем вне этих окрестностей.

Формулы для высших мод получаются дифференцированием по параметрам a, b.

2. Гауссовы пучки в лучевых координатах для неоднородной среды. Зададимся в трехмерном пространстве семейством лучей, отвечающих гладкой скорости $c(x, y, z)>0$. Пусть τ, $\boldsymbol{\alpha}=\{\alpha_1, \alpha_2\}$ — соответствующие лучевые координаты [4] (τ — время пробега вдоль луча, α_1, α_2 — координаты, задающие луч). Будем искать высокочастотное асимптотическое решение уравнения колебаний

$$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}+\omega^2c^{-2}(x, y, z)\,u=0 \tag{2.1}$$

в виде лучевого ряда

$$u=Ae^{i\omega\vartheta},\quad A=\sum_{j=0}^{\infty}A_j(\tau, \boldsymbol{\alpha})\,(-i\omega)^{-j}, \tag{2.2}$$

где $\vartheta(\tau,\boldsymbol{\alpha})$ и $A_j(\tau,\boldsymbol{\alpha})$ — комплекснозначные функции, причем $\operatorname{Im}\vartheta\geqslant 0$ и ϑ вещественна только на фиксированном образующем луче $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}^0$.

Будем строить функции ϑ и A_j, удовлетворяющие вследствие (2.1) и (2.2) уравнениям эйконала и переноса [4], в виде рядов не по степеням нормали к образующему лучу [2, 4, 6, 7], а по степеням $\boldsymbol{\alpha}'=\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}^0$. Благодаря этому старший член разложения фазы ϑ на образующем луче будет учитывать кривизну лучевого фронта.

Итак, ищем $\vartheta(\tau,\boldsymbol{\alpha})$ и $A_0(\tau,\boldsymbol{\alpha})$ в виде

$$\vartheta(\tau, \boldsymbol{\alpha})=\vartheta^0(\tau)+\frac{1}{2}(\Gamma(\tau)\,\boldsymbol{\alpha}', \boldsymbol{\alpha}')+O(|\boldsymbol{\alpha}'|^3); \tag{2.3}$$

$$A_0(\tau, \boldsymbol{\alpha})=A^0(\tau)+O(|\boldsymbol{\alpha}'|), \tag{2.4}$$

где $\Gamma(\tau)$ — симметричная матрица 2×2. Для определения $\vartheta^0(\tau)$ и $\Gamma(\tau)$ подставим (2.3) в уравнение эйконала и приравняем нулю коэффициенты при одинаковых степенях α'_m, $m=1, 2$. Получим $\vartheta^0=\tau$,

$$\dot\Gamma+\Gamma(G^0)^{-2}\Gamma=0, \tag{2.5}$$

где точка означает дифференцирование по τ,

$$G^0=\frac{1}{c_0}\begin{pmatrix}h_1^0 & 0\\ 0 & h_2^0\end{pmatrix}, \tag{2.6}$$

$c_0(\tau)$, $h_1^0(\tau)$, $h_2^0(\tau)$ — коэффициенты Ламе лучевых координат τ, α_1, α_2, вычисленные при $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}^0$.

Матричное уравнение (2.5) линеаризуется подстановкой $\Gamma = (G^0)^2 \dot{Q} Q^{-1}$. Уравнение для матрицы Q вида $\ddot{Q} + 2(G^0)^{-1}\dot{G}^0\dot{Q} = 0$ решается явно. В результате

$$\Gamma = Y\left[E + \int^{\tau} (G^0)^{-2} d\tau Y\right]^{-1}, \tag{2.7}$$

где E — единичная матрица, Y — матричная постоянная интегрирования (возможно, зависящая от $\boldsymbol{\alpha}^0$). Для сосредоточенности решения вблизи образующего луча потребуем $\operatorname{Im} Y > 0$.

Подстановка (2.4) в уравнение переноса [4] приводит в старшем порядке к соотношению

$$\frac{d}{d\tau}\left\{(A^0)^2 \det G^0 \exp\left[\int^{\tau} \operatorname{Spur}(\Gamma (G^0)^{-2})\, d\tau\right]\right\} = 0. \tag{2.8}$$

Применение теоремы Лиувилля [11] к (2.5), рассматриваемому как линейное уравнение относительно Γ с матричным коэффициентом $\Gamma(G^0)^{-2}$, позволяет заменить экспоненту в (2.8) на $(\det \Gamma)^{-1}$. В результате $A^0(\tau) = (\det \Gamma / \det G^0)^{1/2}$.

Таким образом, построенное решение имеет вид*

$$U = \text{const} \sqrt{\frac{\det \Gamma}{\det G^0}} \exp\left\{i\omega\left[\tau + \frac{1}{2}(\Gamma(\tau)\,\boldsymbol{\alpha}', \boldsymbol{\alpha}')\right]\right\}. \tag{2.9}$$

Решение (2.9) сосредоточено в окрестности $|\boldsymbol{\alpha}'| = O(\omega^{-1/2+\varepsilon})$, $1/2 > \varepsilon > 0$, образующего луча и удовлетворяет уравнению (2.1) с невязкой такого же порядка. Отметим, что формула (2.9) имеет смысл при условии однозначности координат $\tau, \boldsymbol{\alpha}$, т. е. в отсутствие каустик.

Если среда такова, что коэффициенты матрицы G^0 растут при $\tau \to \infty$ со скоростью $\tau^{1/2+\delta}$, $\delta > 0$, то $\operatorname{Im} \Gamma \to \operatorname{Im} Y$ (см. (2.7)) и (2.9) принимает вид геометрооптической волны с узкой диаграммой направленности.

Покажем, что на расстояниях $O(\omega^{-1/2+\varepsilon})$ от образующего луча решение (2.9) совпадает с известными формулами для гауссовых пучков [4]. Введем нормальные координаты $s, \boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2)$ (s — расстояние вдоль образующего луча до точки пересечения его с нормальной плоскостью, проходящей через точку наблюдения, ν_1, ν_2 — координаты на этой плоскости). Обозначим $J^0 = \|\partial \nu_i / \partial \alpha_k\| \,|_{\alpha = \alpha^0}$. В области регулярности лучевых координат $\det J^0 \neq 0$ и

$$\begin{gathered} \tau = \sigma(s) + \frac{1}{2}(\dot{J}^0 (J^0)^{-1} \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu})(c_0)^{-1} + O(|\boldsymbol{\nu}|^2), \\ \boldsymbol{\alpha}' = (J^0)^{-1}\boldsymbol{\nu} + O(|\boldsymbol{\nu}|), \end{gathered} \tag{2.10}$$

где $\sigma(s) = \int^{s} ds / c_0$ (см. [10]).

Подставим (2.10) в (2.9). Фаза получившегося выражения с погрешностью $O(|\boldsymbol{\nu}|^2)$ представляет собой квадратичную форму по переменным $\boldsymbol{\nu}$. Матрица этой квадратичной формы с учетом соотношения $(J^0)^{-1} \dot{J}^0 = (c_0 G O)^2$ приводится к виду

$$S(\tau) = (\dot{J}^0 + \dot{\tilde{J}}^0 Y)(J^0 + \tilde{J}^0 Y)^{-1}, \tag{2.11}$$

---

* Выражение (2.9) удовлетворяет параболическому уравнению в лучевых координатах [9], если коэффициенты этого уравнения разложить по степеням α_1', α_2'.

где $\tilde{\tilde{J}}^0 = J^0 \int^{\tau} (G^0)^{-2} d\tau$. После тождественного преобразования предэкспоненты в (2.9) и замены с погрешностью $O(|\nu|^2)$ τ на s в аргументах матриц $J^0, \tilde{J}^0, S$ получим

$$U = \mathrm{const} \sqrt{\frac{c_0(s)}{\det(J^0(s) + \tilde{J}^0(s) Y)}} \times \tag{2.12}$$
$$\times \exp\left\{i\omega\left[\sigma(s) + \frac{1}{2}(S\nu, \nu)\right]\right\}(1 + O(\omega|\nu|^2)).$$

Последнее совпадает с известным выражением для пучка [4].

В заключение выпишем выражение (2.9) для случая однородной среды, $c = c_0 = \mathrm{const}$. Положим $\alpha_1 = \psi \cos\varphi$, $\alpha_2 = \psi \sin\varphi$ и зафиксируем образующий луч равенствами $\alpha_1^0 = \pm\pi/2\cos\varphi$, $\alpha_2^0 = \pm\pi/2 \sin\varphi$. Тогда $h_1^0 = h_2^0 = R$, $\omega\tau = \pm kR$, и пусть

$$Y = \frac{i}{c}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

Из (2.7) находим

$$\Gamma = \frac{i}{c}\begin{pmatrix} aR(R - ia)^{-1} & 0 \\ 0 & bR(R - ib)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Формула (2.9) в однородной среде принимает вид

$$U \approx \pm\, \mathrm{const} \sqrt{\frac{ab}{(R - ia)(R - ib)}} \times \tag{2.13}$$
$$\times \exp\left[\pm ikR - \frac{k}{2c}\left(\psi \mp \frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{aR}{R - ia}\cos^2\varphi + \frac{bR}{R - ib}\sin^2\varphi\right)\right].$$

При $R \to \infty$ (2.13) с точностью до константы совпадает с (1.18), (1.19).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Проанализируем более детально области пригодности неравномерных по z выражений для пучка, рассмотренных в разд. 1. Подобный анализ многих дифракционных формул проделан в [8].

Рассмотрим сначала разложение (1.7). Зададимся в (1.6) числом $\gamma > 0$, определяющим ширину пучка. Пусть

$$\zeta = O(\varkappa^h), \quad h > 0. \tag{П.1}$$

Из (1.6) и (1.10) следует оценка дальности в области пригодности (1.7):

$$h < 1 - 2\gamma. \tag{П.2}$$

Положительность h (т. е. пригодность (1.7) для больших, если $\varkappa \to \infty$, дальностей) накладывает на γ ограничение

$$\gamma < 1/2. \tag{П.3}$$

Неравенства (П.1) — (П.3) уточняют (1.11).

Условие асимптотичности представления (1.12) при $z \to +\infty$ записывается с учетом (1.13) и (1.15) в виде

$$kr \to \infty, \quad \varkappa\psi^2 (kr)^{-1} \to 0. \tag{П.4}$$

Сшивание разложений (1.7) и (1.12) требует добавления к (П.4) неравенств (П.2) и(П.3), из которых вытекает, что $r \sim z$, так что (П.4) принимает вид $\varkappa\psi^2\zeta^{-1}$, т. е.

$$h < \gamma. \tag{П.5}$$

Последнее совместимо с (П.2), если

$$0 < \gamma < 1/3. \tag{П.6}$$

При этом оба разложения пригодны для

$$\varkappa^{\gamma} < \zeta < \varkappa^{1-2\gamma}. \tag{П.7}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Вайнштейн Л. А. Открытые резонаторы и открытые волноводы. — М.: Сов. радио, 1966.
2. Попов М. М. — Записки научн. сем. Лен. отд. Математического ин-та АН СССР, 1981, **104**, с. 195.
3. Еременко В. А., Черкашин Ю. Н. — Труды VIII Всесоюзного симпозиума по дифракции и распространению волн. — Львов, 1981, т. 2, с. 257.
4. Бабич В. М., Булдырев В. С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн — Л.: Наука, 1970.
5. Маслов В. П. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. — М.: Наука, 1977.
6. Бабич В. М., Улин В. В. — Записки научн. сем. Лен. отд. Математического ин-та АН СССР, 1981, **104**, с. 6.
7. Grikurov V. E., Popov M. M. — Wave Motion, 1983, **5**, p. 255.
8. Бабич В. М., Кирпичникова Н. Я. Метод пограничного слоя в задачах дифракции. — Л: Гос. ун-т, 1974.
9. Попов А. В, Хозиоский С. А. — ЖВММФ, 1977, **17**, № 2, с. 527.
10. Попов М. М, Тюриков Л. Г. Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн — Л.: Наука, 1980, **20**, с. 61.
11. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1979.

Научно-производственное объединение
«Рудгеофизика»

Поступила в редакцию
10 мая 1984 г.,
после доработки
25 февраля 1985 г.

GAUSSIAN BEAMS AT LARGE DISTANCES

V. E. Grikurov, A P. Kiselev

The cause of non-uniformity of the classic formulae for beams is revealed. A new representation for beams, which reduces, in a homogeneous media to spherical waves with a narrow directivity diagram, is constructed.