

УДК 533.922

ДИСКРЕТНЫЙ ХАРАКТЕР САМОСОГЛАСОВАННЫХ РАВНОВЕСНЫХ СОСТОЯНИЙ ЭЛЕКТРОННОГО ПОТОКА В ПРОДОЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

C. V. Никонов, A. C. Чихачев

При помощи модельной функции распределения, квадратичным образом зависящей от углового канонического импульса, изучаются самосогласованные равновесные состояния электронного пучка в продольном магнитном поле B . Показан множественный характер равновесия при некоторых ограниченных значениях B (в частности, при $B=0$).

При изучении равновесных состояний сильноточного релятивистского электронного пучка обычно предполагается, что при определенных граничных условиях возможно получение конфигураций, описываемых заданной функцией распределения (см. [1-3]). В связи с этим приобретает интерес вопрос об однозначности состояний с определенной функцией распределения во внешнем магнитном поле. Отметим, например, двухзначный характер равновесия в заданном поле с распределением, описанным в [3]. В настоящей работе на примере пучка, описываемого модельной функцией распределения, будет показана возможность существования двух и более различных равновесных состояний при одном и том же значении внешнего поля. Заряд пучка предполагается полностью скомпенсированным вторичными ионами.

Будем описывать стационарный пучок в цилиндрической системе координат r, θ, z функцией распределения, зависящей от трех интегралов движения: энергии $H = c\sqrt{(mc)^2 + p^2}$, момента $M = r(p_\theta - (e/c)A_\theta)$, обобщенного продольного импульса $P_z = p_z - (e/c)A_z$. Здесь p — импульс электрона, $-e$ — заряд и масса, A_θ, A_z — компоненты векторного потенциала, c — скорость света.

Произвольная функция интегралов движения удовлетворяет бесстолкновительному кинетическому уравнению. Выбор функций распределения, однако, существенно ограничен необходимостью получения достаточно быстро убывающих по радиусу плотности частиц пучка и, следовательно, плотностей продольного $j_z(r)$ и азимутального $j_\theta(r)$ токов. Этому требованию удовлетворяет выбор экспоненциальных зависимостей от H и P_z (см. ниже).

Особо следует обсудить характер зависимости функции распределения от момента M . Весьма часто используются функции, не зависящие от M . Это приводит к тому, что изучаемое равновесное состояние не зависит от внешнего поля (см. [2]). В работе [3] исследованы состояния, характеризующиеся зависимостью $f \sim \delta(M)$. Отметим также зависящее от момента равновесие типа «жесткого ротора» (см. [1]). Изучавшееся в работе [2] «квазибеннетовское» распределение характеризуется степенной зависимостью от M . В отсутствие продольного поля это приводит к модели, в которой уравнение для $A_z(r)$ имеет простое аналитическое решение.

Для описания возможных экспериментальных ситуаций интересен класс функций, разложимых по моменту. При этом для изучения диамагнитных свойств наиболее важно рассмотрение поправки низшего порядка.

Положительность функции распределения при любых значениях аргументов предопределяет выбор поправки $\sim M^2$.

Следуя [2], запишем функцию распределения электронов пучка в виде

$$f = \kappa M^2 \exp(-H/T + P_z/p_0). \quad (1)$$

Здесь T , p_0 — произвольные константы размерности энергии и импульса, κ — нормировочная постоянная.

Выражая компоненты плотности тока $j_z = -ec^2 \int \frac{p_z}{H} f d\mathbf{p}$ и $j_\theta = -ec^2 \int \frac{p_\theta}{H} f d\mathbf{p}$ через A_z и A_θ , можно, аналогично работе [2], получить систему уравнений для безразмерных потенциалов

$$u = \frac{eA_z}{cp_0}, \quad v = \frac{r}{r_1} \frac{eA_\theta}{c p_0} \sqrt{\frac{J_2}{V8J_1}},$$

представляющую запись уравнения Максвелла $\text{rot } \text{rot } \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} j$:

$$\left(s \frac{d}{ds} \right)^2 u = 8s(s+v^2)e^{-u}, \quad \frac{d^2 v}{ds^2} = -\xi^2 v e^{-u}. \quad (2)$$

Здесь $r_1 = (2\pi^2 e^2 \kappa p_0 / c)^{-1/4}$, $s = (r/r_1)^2 \sqrt{J_1/8}$, $\xi^2 = 16J_2/J_1$, J_1 и J_2 — константы (см. [2]).*

В связи с использованием кинетического описания отметим следующее обстоятельство. Если система описывается обычной беннетовской функцией распределения $f = \kappa \exp(-H/T + P_z/p_0)$, то, как нетрудно убедиться, тензор давления $Q_{ik} = \int (p_i - \bar{p}_i)(v_i - \bar{v}_i) f d\mathbf{p}$ (\bar{v}_i , \bar{p}_i — средние значения компонент скорости и импульса) является диагональным, $Q_{ik} = Q \cdot \delta_{ik}$, причем $Q = nT$. Кроме того, средняя гидродинамическая скорость частиц $v_z(r) = T/p_0 = \text{const}$. Неудивительно поэтому, что использование уравнений гидродинамики с дополнительными условиями $Q = nT$ ($T = \text{const}$) и $v_z(r) = \text{const}$ приводит к такому же уравнению для поля, что и кинетическое рассмотрение. Существенно более сложная ситуация возникает для системы, описываемой (1). Тензор давления недиагонален, причем связь компонент тензора с плотностью является далеко не столь простой (такая связь содержит функцию $A_\theta(r)$). Это обстоятельство делает громоздким эквивалентное гидродинамическое описание изучаемой системы.

Отрицательный знак во втором уравнении системы (2) указывает на необычные диамагнитные свойства изучаемого потока: $v'(s)$ (т. е. продольное магнитное поле) не является растущей функцией, а убывает или имеет колебательный характер. Этот факт связан с квадратичной зависимостью от момента изучаемой модельной функции распределения.

Параметр ξ определяется, в конечном счете, параметрами $\tau = T/cp_0$ и $\alpha = mc/p_0$. Графики зависимостей $\xi(\tau)$ при $\alpha = 0,1$ и $\alpha = 0,3$ приведены на рис. 1. Зависимость $\xi(\tau)$ является убывающей; при этом ξ определена лишь при $\tau < 1$, так как в противном случае интегралы J_1 и J_2 , определяющие ξ , расходятся.

В изучаемом равновесном состоянии присутствуют обратные частицы, т. е. частицы с импульсами $p_z < 0$. Число таких частиц экспоненциально мало при $\tau \rightarrow 1$; при $\tau \approx 0,5$, например, число обратных частиц может достигать десяти процентов от полного числа частиц пучка.

Для определения состояния пучка система (4) должна решаться с краевыми условиями $u(0) = u'(0) = 0$, $v(0) = 0$, $v'(s)|_{s \rightarrow \infty} = v'_\infty$, где $v'_\infty = (er_1 H_z^{(0)} / 2cp_0) \sqrt{J_2 V 8/J_1^{3/2}}$, $H_z^{(0)}$ — внешнее магнитное поле. Первые три условия следуют из регулярности решения на оси, четвер-

* Отметим, что между введенными в [2] константами J_3 и J_2 существует связь $J_3 = 2J_2$, что следует из приведенных там выражений.

тое означает, что внешнее поле задано. Далее мы увидим, что сформулированная таким образом задача не всегда имеет единственное решение, поэтому вместо четвертого условия будем считать заданной величину $v'_0 = dv/ds|_{s=0}$. С точностью до постоянного множителя v'_0 представляется собой продольное поле на оси пучка.

Таким образом, мы имеем задачу Коши, решение которой единственно. Результаты точного численного решения этой системы, т. е. зависимость v' от $x \equiv s/\sqrt{J_1/8} = 5,5 \cdot 10^2 \cdot s$, при значениях параметров $\alpha = 0,3$ и $\tau = 0,1$ ($J_1 = 2,74 \cdot 10^{-5}$, $J_2 = 4,56 \cdot 10^{-4}$, $\xi = 16,3$) и при различных величинах v'_0 приведены на рис. 2. При увеличении v'_0 продольное поле быстрее выходит на константу, т. е. поперечный размер пучка уменьшается. Значение тока в единицах $c^2 p_0/e$ изменяется от четырех единиц в слабом внешнем поле до шести в сильном, что находится в согласии с результатами работы [2].

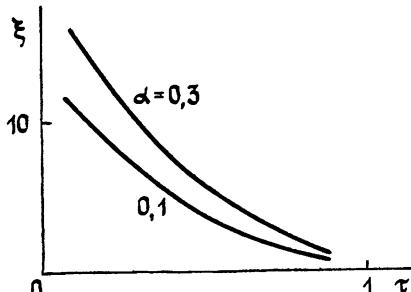


Рис. 1.

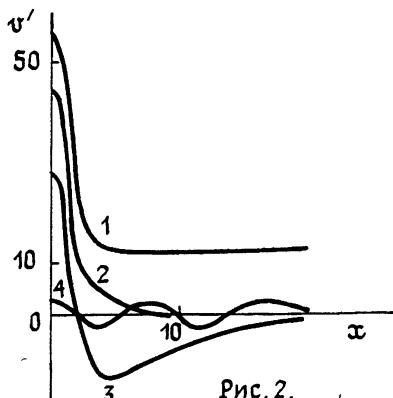


Рис. 2.

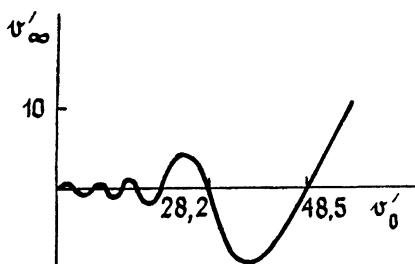


Рис. 3.

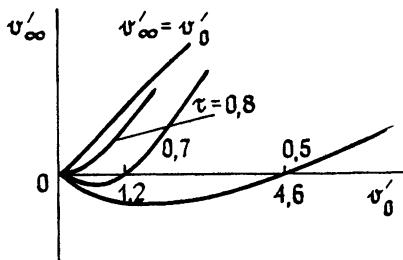


Рис. 4.

На рис. 3 представлена зависимость внешнего поля v'_∞ от осевого v'_0 при тех же значениях α , τ . Функция $v'_\infty(v'_0)$ нечетная, поэтому приведена лишь область $v'_0 > 0$. При $|v'_\infty|$, меньших некоторого критического значения, возможны несколько равновесных состояний. Эти состояния различаются, в частности, током и поперечным размером пучка. На рис. 4 представлены зависимости $v'_\infty(v'_0)$ при $\alpha = 0,1$ и $\tau = 0,5$; 0,7 и 0,8 (соответственно $J_1 = 1,66$, $J_2 = 2,36$, $\xi = 3,8$; $J_1 = 14,4$, $J_2 = 11,4$, $\xi = 2$; $J_1 = 49,9$, $J_2 = 35,9$, $\xi = 1,5$).

При $\xi = 3,8$ и 2,0 возможны два различных состояния при $v'_\infty < 0$, при $\xi = 1,5$ зависимость $v'_\infty(v'_0)$ становится строго монотонной. Многозначность равновесия в заданном внешнем поле слабо связана с характером зависимости функции распределения от энергии и от продольного импульса и объясняется наличием множителя M^2 .

Результаты, полученные с помощью численного счета, могут быть удовлетворительно объяснены с помощью качественного решения системы (2).

Преимущество решениями u и v этой системы существует связь вида

$$v^2 = A e^{u/2}. \quad (3)$$

Тогда из первого уравнения системы (2) для регулярного на оси решения имеем

$$u = 2 \ln(1 + 4As + (1 + 4A^2)s^2),$$

а из второго —

$$v = (v'_0/\xi_0) \sin [\xi_0 \operatorname{arctg}(s/(1 + 4As))] \sqrt{1 + 4As + (1 + 4A^2)s^2}, \quad (4)$$

где $\xi_0^2 = \xi^2 + 1$. Из этих соотношений следует, что (3) выполняется для средних по осцилляциям значений. При $A \ll 1$ в области $2As < 1$ имеем

$$\bar{v}^2 = (v'_0/2\xi_0^2)(1 + 4As + (1 + 4A^2)s^2).$$

Отсюда следует, что $A = v'_0^2/2\xi_0^2$.

Масштаб изменения $u \sim 1/A$, характерный масштаб изменения $v \sim 1/\xi_0$. Для корректности решения должно быть выполнено соотношение $1/A \gg 1/\xi_0$, т. е. $v'_0 \ll \xi_0^{3/2}$.

По-видимому, однако, решение (4) справедливо в существенно более широкой области параметров, что подтверждается сопоставлением его с результатами численного счета.

Соотношение (4) можно представить в виде

$$v = (v'_0/\xi_0) \sin \left(\xi_0 \operatorname{arctg} \frac{s}{1 + v_0^2 s / \xi_0^2} \right) \sqrt{1 + 2v_0^2 s / \xi_0^2 + (1 + v_0'^2 / \xi_0^4) s^2}. \quad (5)$$

Например, для кривой 1 на рис. 2 $v'_0 = 56,4$, $v'_0/\xi_0 = 3,5$, $v'_\infty = (v'_0/\xi_0)^3 \sin(\xi_0^3/v'_0) = 10,7$, что удовлетворительно согласуется с точным численным значением $v'_\infty = 12,5$. Кроме того, соотношение (7) описывает монотонное решение $v'(s)$, что видно также и из точного численного решения.

Решение (5) позволяет дать качественную формулу для функции $v'_\infty(v'_0)$.

При $s \rightarrow \infty$ из (5) следует

$$v'_\infty = (v'_0/\xi_0) \sqrt{1 + v'_0'^2 / \xi_0^4} \sin \xi_0 \operatorname{arctg} (\xi_0^2 / v'_0'^2). \quad (6)$$

При $\xi_0 = 16,3$ (6) хорошо описывает кривую на рис. 3.

Таблица 1

| K | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
|-----------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| λ | 1,02 | 0,99 | 0,99 | 0,98 | 0,97 | 0,95 | 0,92 | 0,77 |

Из соотношения (6) следует, что при $\xi_0 = 16,3$ существует восемь различных состояний при нулевом внешнем магнитном поле. Если $v'_\infty = 0$, то можно получить

$$v'_{0k} = \xi_0 \sqrt{\operatorname{tg}(k\pi/\xi_0)}, \quad (7)$$

где k — целое число, $k > 0$. Различные значения v_{0k} (в порядке убывания) соответствуют значениям $k = 1, 2, \dots, 8$.

В табл. 1 приведены величины отношений λ решения, даваемого (7) к точному численному решению. Точность решения ухудшается с ростом v'_{0k} , однако при весьма больших v'_0 , таких, что $\xi_0^3/v'_0 \ll 1$, из

(6) следует $v'_\infty \approx v'_0$, что является точным решением системы (4) в достаточно сильном продольном поле.

Соотношение (7) показывает дискретный, множественный характер состояний равновесия пучка, описываемых заданной модельной функцией распределения.

Для выяснения различия состояний при $v'_\infty = 0$ приведем результаты вычисления величин погонного числа частиц

$$N = \frac{c p_0}{e^2} \int_0^\infty dy \int_0^\infty dx \int_{-1}^1 d\mu [yx^2(1 - \mu^2)/2 + \\ + v^2 \sqrt{8J_1/J_2}] \exp \left(-\frac{\sqrt{x^2 + \alpha^2}}{\tau} + \mu x - u \right),$$

погонной кинетической энергии частиц пучка

$$H = \frac{c p_0}{e^2} \int_0^\infty dy \int_0^\infty dx \int_{-1}^1 d\mu [yx^2(1 - \mu^2)/2 + v^2 \sqrt{8J_1/J_2}] \times \\ \times \sqrt{x^2 + \alpha^2} \exp \left(-\frac{\sqrt{x^2 + \alpha^2}}{\tau} + \mu x - u \right),$$

среднего квадрата механического момента

$$\bar{M}_{\text{мех}}^2 = \frac{c p_0^3 r_1}{e^2} \int_0^\infty dy \int_0^\infty dx \int_{-1}^1 d\mu \left[\frac{3}{8} y^2 x^4 (1 - \mu^2)^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} yx^2 (1 - \mu^2) v^2 \sqrt{8J_1/J_2} \right] \exp \left(-\frac{\sqrt{x^2 + \alpha^2}}{\tau} + \mu x - u \right)$$

и среднего квадрата полного момента

$$\bar{M}_{\text{полн}}^2 = \frac{c p_0^3 r_1}{e^2} \int_0^\infty dy \int_0^\infty dx \int_{-1}^1 d\mu \left[\frac{3}{8} y^2 x^4 (1 - \mu^2)^2 + \right. \\ \left. + 3 yx^2 (1 - \mu^2) v^2 \sqrt{8J_1/J_2} + v^4 8J_1/J_2^2 \right] \exp \left(-\frac{\sqrt{x^2 + \alpha^2}}{\tau} + \mu x - u \right)$$

в различных состояниях с нулевым внешним полем.

Таблица 2

| v'_0 | $N \frac{e^2}{cp_0}$ | $H \left(\frac{e}{cp_0} \right)^2$ | $\bar{M}_{\text{мех}}^2 \frac{e^2}{c^2 p_0^3 r_1^2}$ | $\bar{M}_{\text{полн}}^2 \frac{e^2}{c^2 p_0^3 r_1^2}$ |
|--------|----------------------|-------------------------------------|--|---|
| 0 | 55 | $1,28 \cdot 10^3$ | $5,041 \cdot 10^3$ | $5,041 \cdot 10^3$ |
| 2,95 | 63 | $1,21 \cdot 10^3$ | $5,044 \cdot 10^3$ | $6,42 \cdot 10^3$ |
| 7,5 | 104 | $8,87 \cdot 10^2$ | $4,94 \cdot 10^3$ | $2,0 \cdot 10^4$ |
| 11 | 136 | $6,34 \cdot 10^2$ | $4,55 \cdot 10^3$ | $4,27 \cdot 10^4$ |
| 14 | 161 | $4,01 \cdot 10^2$ | $3,89 \cdot 10^3$ | $6,85 \cdot 10^4$ |
| 17,2 | 181 | $2,8 \cdot 10^2$ | $2,99 \cdot 10^3$ | $9,04 \cdot 10^4$ |
| 21,2 | 195 | $1,64 \cdot 10^2$ | $1,99 \cdot 10^3$ | $1,07 \cdot 10^5$ |
| 28,2 | 210 | $8,42 \cdot 10$ | $8,93 \cdot 10^2$ | $1,05 \cdot 10^5$ |
| 48,5 | 211 | $3,83 \cdot 10$ | $2,0 \cdot 10^2$ | $7,04 \cdot 10^4$ |

Результаты вычислений сведены в табл. 2, из которой видно, что погонная плотность пучка растет с ростом v'_{0k} , когда кинетическая

Энергия и механический момент убывают. Полный момент (т. е. сумма моментов частиц и поля) растёт, но в двух последних точках начинает убывать. Таким образом, состояния с одним и тем же (в данном случае нулевым) значением внешнего поля весьма существенно отличаются по вышеприведенным характеристикам.

Изучавшееся до сих пор состояние пучка имеет парамагнитный характер: $v'_\infty < v'_0$ (см. соотношение (6)), что, как уже отмечалось, является следствием квадратичной зависимости функции распределения от момента.

Рассмотрим состояния, описываемые следующей функцией распределения:

$$f = \kappa(M + M_0)^2 \exp(-H/T + P_z/p_0), \quad (8)$$

где M_0 — постоянная, имеющая размерность момента.

Вместо системы (2) получим уравнения

$$\left(s \frac{d}{ds}\right)^2 u = 8s(s + (v - v_*)^2)e^{-u}, \quad \frac{d^2 v}{ds^2} = -\xi^2(v - v_*)e^{-u}. \quad (9)$$

Здесь v_* — константа, линейным образом зависящая от M_0 . Во втором уравнении системы (9) при $v < v_*$ возможно получение растущих с ростом s значений v' , что при достаточно быстром убывании множителя e^{-u} может привести к зависимости $v'_\infty (v'_0)$ диамагнитного типа, т. е. $v'_\infty > v'_0$. Это соображение подтверждается качественным решением (9).

Пренебрегая в (9) $(v - v_*)^2$ в сравнении с s (это возможно при $v_* < 1$), при $v'_0 = 0$ можно получить

$$v'_\infty \approx v_* \sin\left(\frac{\pi \xi_0}{2} - \frac{\pi}{4}\right). \quad (10)$$

При небольших значениях ξ_0 ($\frac{1}{2} < \xi_0 < \frac{5}{2}$) продольное поле изменяется монотонно, так что (10) описывает обычный диамагнитный пучок.

Таким образом, модель, описываемая функцией распределения (8), иллюстрирует тот факт, что обычные диамагнитные свойства пучка могут описываться распределением, содержащим слагаемые с нечетными степенями обобщенного момента.

Авторы выражают благодарность В. Н. Цытовичу за помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

- Дэвидсон Р. Теория заряженной плазмы. — М.: Мир, 1978. — 216 с.
- Чихачев А. С. — Физика плазмы, 1980, 6, № 5, с. 1012.
- Агафонов А. В., Воронин В. С., Лебедев А. Н., Пазин К. Н. — ЖТФ; 1974, 49, № 9, с. 1909.

Всесоюзный электротехнический
институт им. В. И. Ленина

Поступила в редакцию
26 марта 1984 г.,
после переработки
8 октября 1984 г.

DISCRETE CHARACTER OF THE ELECTRON BEAM SELF-CONSISTENT EQUILIBRIUM STATES WITH THE LONGITUDINAL MAGNETIC FIELD

S. V. Nikonov, A. S. Chikhachev

Self-consistent equilibrium states of the electron beam placed into the longitudinal magnetic field B are studied with the help of a simulated distribution function which is proportional to the square of angular canonical momentum. It is shown that with some bounded values of B (specifically when $B=0$) the plural character of the equilibrium occurs.