

УДК 533.932

## О ДВИЖЕНИИ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ОГРАНИЧЕННЫХ СИСТЕМАХ СО СТОЛКНОВЕНИЯМИ

*А. Г. Загородний, А. С. Усенко, И. П. Якименко*

На основе вероятностного подхода исследовано влияние отражающих свойств границы на характер движения заряженных частиц в ограниченных системах со столкновениями. Найдены вероятности перехода частиц в фазовом пространстве при наличии зеркально отражающей и случайно рассеивающей плоских границ. Рассчитаны среднее и среднеквадратичное смещение броуновской частицы в полуограниченных системах.

При разработке последовательной теории электромагнитных флуктуаций в ограниченных многочастичных системах возникает проблема расчета корреляционных функций источников случайных полей при учете взаимодействия частиц с границами раздела [1]. Такие расчеты можно предельно упростить, если учесть, что в случае систем заряженных частиц в качестве ланжевеновских источников выступают индивидуально-частичные флуктуации в системе частиц с выключенным электромагнитным взаимодействием [2, 3]. Искомая корреляционная функция при этом выражается через плотность одночастичной вероятности перехода в фазовом пространстве [4–6], которая удовлетворяет достаточно простому дифференциальному (либо интегродифференциальному) уравнению. Что касается самого уравнения, то оно может быть получено либо путем расцепления в заданном приближении цепочки уравнений для моментов микроскопической фазовой плотности частиц [2, 7], либо сформулировано на основе феноменологического учета особенностей динамики частиц в конкретной системе.

В общем случае уравнение для вероятности перехода представляет собой одночастичное уравнение Лиувилля, в правой части которого фигурирует интеграл столкновений Больцмановского типа, учитывающий влияние столкновений на движение выделенной частицы. Поскольку решение таких уравнений представляется весьма затруднительным даже в случае неограниченных систем, то при наличии границ для описания столкновений, как правило, используют те или иные модельные интегралы столкновений. Одной из наиболее распространенных моделей такого рода является модель Бхатнагара—Гросса—Крука (БГК) [8]. На ее основе исследовались различные кинетические и электромагнитные процессы в неограниченной слабоионизованной плазме (см., например, [9]).

Весьма плодотворным оказалось использование модели БГК и при решении ряда задач теории электромагнитных флуктуаций и диффузии в слабоионизованной плазме [7, 10–12], в том числе при построении корреляционной теории ограниченной слабоионизированной плазмы при наличии зеркально отражающих частицы плоскопараллельных границ раздела [13, 14].

Следует заметить, что расчеты вероятностей перехода частиц в ограниченных системах со столкновениями, помимо их использования для вычисления корреляционных функций ланжевеновских источников, могут представлять и самостоятельный интерес. В частности, исследование асимптотического поведения вероятности перехода на временах, значительно превышающих время свободного пробега частицы, позво-

ляет сделать вывод о характере диффузии в ограниченных системах. С другой стороны, на ее основе нетрудно рассчитать вероятность перехода в конфигурационном пространстве, временная асимптотика этой вероятности описывает случайные блуждания частицы. Тем самым, открывается возможность исследовать влияние границ на броуновское движение в ограниченных системах.

Заметим, наконец, что вероятность перехода однозначно определяет линейный отклик системы на внешнее электромагнитное возмущение. Это позволяет сформулировать корреляционную теорию ограниченных многочастичных систем, привлекая для рассмотрения лишь один достаточно простой объект — вероятность перехода в системе частиц с выключенным самосогласованным взаимодействием [4–6].

Особенностью расчета вероятностей перехода в ограниченных системах является необходимость введения граничных условий для искомых вероятностей. Такие условия могут быть записаны по аналогии с граничными условиями для функций распределения, которые обычно задают феноменологически, моделируя тем самым рассеивающие свойства конкретных границ.

Представляет интерес исследовать влияние моделей границы на вероятности перехода частиц в системах со столкновениями, что и является целью настоящей работы.

Расчеты вероятностей перехода выполнялись на основе уравнений, соответствующих кинетическому уравнению БГК [8] (разд. 1). При этом были рассмотрены три типа граничных условий, моделирующих случайное рассеяние плоской границей раздела при учете различных законов сохранения, а также случай зеркально отражающей и поглощающей границ. В разд. 2 на основе полученных соотношений найдены корреляционные функции ланжевеновских источников и тензоры диэлектрических восприимчивостей для полуограниченной плазмы.

Третий раздел посвящен вычислениям вероятностей перехода в координатном пространстве и исследованию их асимптотического поведения на временах, значительно превышающих время свободного пробега частицы. Здесь же исследовано влияние рассматриваемых моделей границы на количественные характеристики броуновского движения в полуограниченной среде.

## 1. ВЕРОЯТНОСТЬ ПЕРЕХОДА ЧАСТИЦЫ В ОГРАНИЧЕННЫХ СИСТЕМАХ ПРИ УЧЕТЕ СТОЛКНОВЕНИЙ

Учет столкновений частиц на основе простой модели БГК приводит к следующему уравнению для функции плотности вероятности  $W_\sigma(X, X'; \tau)$ , описывающей переход частицы сорта  $\sigma$  из точки фазового пространства  $X' \equiv (\mathbf{r}', \mathbf{v}')$  в точку  $X \equiv (\mathbf{r}, \mathbf{v})$  за время  $\tau = t - t'$  [7, 13]:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) W_\sigma(X, X'; \tau) = L_\sigma^{\text{ct}} W_\sigma(X, X'; \tau), \quad (1)$$

где

$$L_\sigma^{\text{ct}} W_\sigma(X, X'; \tau) = -v_\sigma [W_\sigma(X, X'; \tau) - f_{n\sigma}(\mathbf{v}) \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{v}' W_\sigma(X, X'; \tau)],$$

$$f_{n\sigma}(\mathbf{v}) = (m_\sigma / 2\pi T_{n\sigma})^{3/2} \exp(-m_\sigma^2 v^2 / 2T_{n\sigma}),$$

$$T_{n\sigma} = (m_n T_\sigma + m_\sigma T_n) / (m_n + m_\sigma),$$

$v_\sigma$ ,  $m_\sigma$ ,  $T_\sigma$  — эффективная частота соударений, масса и температура частиц сорта  $\sigma$ ,  $m_n$  и  $T_n$  — масса и температура частиц, с которыми сталкиваются частицы сорта  $\sigma$ .

Уравнение (1) следует дополнить начальным условием

$$W_\sigma(X, X'; 0) = \delta(X - X') \quad (2)$$

и граничными условиями, моделирующими взаимодействие частиц с границей раздела. В настоящей работе мы будем использовать следующие четыре типа таких условий:

$$W_\sigma(X, X'; \tau) = p_\sigma \underset{(nv > 0)}{W_\sigma}(X, X'; \tau)'_S; \quad (3)$$

$$\begin{aligned} W_\sigma(X, X'; \tau) = p_\sigma \underset{(nv > 0)}{W_\sigma}(X, X'; \tau) + (1 - p_\sigma) W_\sigma^{(1)}(\mathbf{v}) \times \\ \times \int_{(nv' < 0)} d\mathbf{v}' W_\sigma(X'', X'; \tau)|_S; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} (nv) W_\sigma(X, X'; \tau) = - p_\sigma (nv) \underset{(nv < 0)}{W_\sigma}(X, X'; \tau) - \\ - (1 - p_\sigma) W_\sigma^{(2)}(\mathbf{v}) \int_{(nv' < 0)} d\mathbf{v}' (nv') W_\sigma(X'', X'; \tau)|_S \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} v^2 W_\sigma(X, X'; \tau) = p_\sigma v^2 \underset{(nv < 0)}{W_\sigma}(X, X'; \tau) + \\ + (1 - p_\sigma) W_\sigma^{(3)}(\mathbf{v}) \int_{(nv' < 0)} d\mathbf{v}' v'^2 W_\sigma(X'', X'; \tau)|_S, \end{aligned} \quad (9)$$

где использованы обозначения

$$W_\sigma^{(1)}(\mathbf{v}) = f_{0\sigma}(\mathbf{v}) / \int_{(nv < 0)} d\mathbf{v} f_{0\sigma}(\mathbf{v}), \quad W_\sigma^{(2)}(\mathbf{v}) = -(nv) f_{0\sigma}(\mathbf{v}) / \int_{(nv < 0)} d\mathbf{v} (nv) f_{0\sigma}(\mathbf{v}), \quad (7)$$

$$W_\sigma^{(3)}(\mathbf{v}) = v^2 f_{0\sigma}(\mathbf{v}) / \int_{(nv < 0)} d\mathbf{v} v^2 f_{0\sigma}(\mathbf{v}),$$

$0 < p_\sigma \leq 1$ ,  $X'' \equiv (r, \mathbf{v}'')$ ,  $S$  — поверхность системы,  $\mathbf{n}$  — нормаль к поверхности, направленная внутрь системы,  $f_{0\sigma}(\mathbf{v})$  — невозмущенная функция распределения частиц сорта  $\sigma$ .

Первое из приведенных граничных условий соответствует хорошо известному условию Фукса [15, 16] для функций распределения с коэффициентом зеркальности  $p_\sigma$  и фактически моделирует ситуацию, когда при соударении с границей частица либо отражается зеркально (с вероятностью  $p_\sigma$ ), либо поглощается границей (с вероятностью  $1 - p_\sigma$ ). Остальные условия представляют собой аналоги граничных условий для функций распределения из теории разреженных газов [17–19] и соответствуют границам, рассеивающим (с вероятностью  $1 - p_\sigma$ ) падающие частицы случайным образом и сохраняющим, соответственно, плотности, нормальные составляющие потока и кинетическую энергию падающих и рассеянных границей частиц. В случае  $p_\sigma = 1$  все четыре условия сводятся к условию зеркального отражения частиц. При  $p_\sigma = 0$  условие (3) моделирует полное поглощение частиц, а условия (4)–(6) соответствуют случайно рассеивающим границам, удовлетворяющим соответствующим законам сохранения.

Следует отметить также, что в тех случаях, когда  $W_\sigma(X, X'; \tau) = \underset{(nv > 0)}{f_{0\sigma}(\mathbf{v})} \int d\mathbf{v} W_\sigma(X, X'; \tau)$  (в частности, для максвеллизованных частиц), условия (4)–(6) оказываются эквивалентными друг другу, в то время как условие Фукса (3), не принадлежащее к классу условий, описывающих непоглощающие границы, отличается от условий (4)–(6). Эквивалентность условий (4)–(6) свидетельствует о том, что в таком случае при рассеянии частиц границей имеют место все три закона сохранения.

Для полуограниченной системы, занимающей полупространство ( $z > 0$ ), точное решение уравнения (1) с начальным условием (2) и граничными условиями (3)–(6) может быть получено лишь в случае  $p_\sigma = 1$  и  $p_\sigma = 0$ .

В случае  $p_\sigma=1$  такое решение имеет вид [13, 14, 20]

$$W_\sigma(X, X'; \tau) = \frac{1}{(2\pi)^5} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dk'_z \int_{-\infty+i0}^{\infty+i0} d\omega \exp [i(k_\perp R_\perp + k_z z - k'_z z' - \omega \tau)] W_{\sigma k \omega}(v, k'_z, v'), \quad (8)$$

где

$$W_{\sigma k \omega}(v, k'_z, v') = \left[ \frac{i\delta(v - v')}{\omega - k v + iv_\sigma} - \frac{v_\sigma f_{n\sigma}(v) \alpha_\sigma^{-1}(k, \omega)}{(\omega - k v + iv_\sigma)(\omega - k' v' + iv_\sigma)} \right] \times \times 2\pi [\delta(k_z - k'_z) + \delta(k_z + k'_z)],$$

$$\alpha_\sigma(k, \omega) = 1 - iv_\sigma \int_{-\infty}^{\infty} dv \frac{f_{n\sigma}(v)}{\omega - k v + iv_\sigma} = \frac{\omega + iv_\sigma W(z_{n\sigma})}{\omega + iv_\sigma}, \quad (9)$$

$$R_\perp \equiv (x - x', y - y'), \quad k' \equiv (k_x, k_y, k_z),$$

$$W(z) = 1 - z \exp(-z^2/2) \left[ \int_0^z dy \exp(y^2/2) - i(\pi/2)^{1/2} \right],$$

$$z_{n\sigma} = (\omega + iv_\sigma)/ks_{n\sigma}, \quad s_{n\sigma} = (T_{n\sigma}/m_\sigma)^{1/2}.$$

Сравнивая (8) с соответствующим результатом для неограниченной системы [7], видим, что наличие границы приводит к появлению дополнительного слагаемого (во втором сомножителе выражения (9)), учитывающего отражение частиц от границы раздела.

В случае  $p_\sigma=0$  вместо (9) следует использовать величину [20]

$$W_{\sigma k \omega}(v, k'_z, v') = \frac{i}{\omega - k v + iv_\sigma} \left\{ 2\pi\delta(v - v') \delta(k_z - k'_z) - \right. \\ - \frac{v_\sigma}{\omega - k' v' + iv_\sigma} \left[ \frac{f_{n\sigma}(v)}{k'_z - k_z + i0} \frac{\xi_\sigma^-(k, \omega)}{\xi_\sigma^+(k', \omega)} + \frac{1}{B_\sigma^{(\alpha)}(k_\perp, \omega)} \times \right. \\ \times \left( C_\sigma^{(\alpha)}(k', \omega) - \frac{1}{s_\sigma^{(\alpha)}(v')} \right) \left( f_{n\sigma}(v) \xi_\sigma^-(k, \omega) A_\sigma^{(\alpha)}(k, \omega) + \right. \\ \left. \left. + \frac{(-1)^\alpha}{iv_\sigma} v_z \bar{s}_\sigma^{(\alpha)}(v) W_\sigma^{(\alpha)}(v) \right) \right\}, \quad (10)$$

где

$$\xi_\sigma^\pm(k, \omega) = [\alpha_\sigma(k, \omega)]^{\pm 1/2} \exp \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk'_z}{k'_z - k_z} \ln \alpha_\sigma(k', \omega) \right],$$

$$A_\sigma^{(\alpha)}(k, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk'_z}{k'_z - k_z + i0} \frac{\tilde{F}_\sigma^{(\alpha)}(k', \omega)}{\xi_\sigma^+(k', \omega)},$$

$$B_\sigma^{(\alpha)}(k_\perp, \omega) = 1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z F_\sigma^{(\alpha)}(k, \omega) \xi_\sigma^-(k, \omega) A_\sigma^{(\alpha)}(k, \omega),$$

$$C_{\sigma}^{(\alpha)}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\xi_{\sigma}^{+}(\mathbf{k}, \omega)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_z'}{k_z' - k_z - i0} F_{\sigma}^{(\alpha)}(k', \omega) \xi_{\sigma}^{-}(k', \omega),$$

$$F_{\sigma}^{(\alpha)}(\mathbf{k}, \omega) = -iv_{\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} dv \frac{f_{n\sigma}(v)}{\bar{S}_{\sigma}^{(\alpha)}(v)} \frac{1}{\omega - kv + iv_{\sigma}} =$$

$$= \frac{iv_{\sigma}}{\omega + iv_{\sigma}} \begin{cases} W(z_{n\sigma}) - 1, & \alpha = 1 \\ (k_z/k) z_{\sigma} W(z_{n\sigma}), & \alpha = 2 \\ ((2 + z_{n\sigma}^2) W(z_{n\sigma}) - 2) T_{n\sigma}/T_{\sigma}, & \alpha = 3 \end{cases}$$

$$\tilde{F}_{\sigma}^{(\alpha)}(\mathbf{k}, \omega) = i(-1)^{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} dv \frac{v_z \bar{S}_{\sigma}^{(\alpha)}(v) W_{\sigma}^{(\alpha)}(v)}{\omega - kv + iv_{\sigma}},$$

$$W_{\sigma}^{(\alpha)}(v) = 2 \frac{f_{0\sigma}(v)}{\bar{S}_{\sigma}^{(\alpha)}(v)} \begin{cases} 0, & \alpha = 0 \\ 1, & \alpha = 1 \\ C_{\sigma}^{(2)} (\pi/2)^{1/2}, & \alpha = 2 \\ C_{\sigma}^{(3)}/3, & \alpha = 3 \end{cases}, \quad (11)$$

$$\bar{S}_{\sigma}^{(\alpha)}(v) = \begin{cases} 1, & \alpha = 1 \\ s_{\sigma}/v_z, & \alpha = 2 \\ s_{\sigma}^2/v^2, & \alpha = 3 \end{cases},$$

$$C_{\sigma}^{(2)} = -(2\pi)^{-1/2} S_{\sigma} \left[ \int_{(v_z < 0)} dv v_z f_{0\sigma}(v) \right]^{-1},$$

$$C_{\sigma}^{(3)} = \frac{3s_{\sigma}^2}{2} \left[ \int_{(v_z < 0)} dv v^2 f_{0\sigma}(v) \right]^{-1},$$

$$z_{\sigma} = (\omega + iv_{\sigma})/ks_{\sigma}, \quad s_{\sigma} = (T_{\sigma}/m_{\sigma})^{1/2}.$$

При  $\alpha=0$  эти соотношения соответствуют граничному условию Фукса, а при  $\alpha=1, 2, 3$  — граничным условиям (4) — (6).

Из полученных соотношений следует, что при учете столкновений в рамках модели БГК вероятность перехода в полуограниченной системе с поглощающей границей ( $\alpha=0$ ) зависит от границы существенно более сложным образом, чем в случае бесстолкновительных систем, либо при учете столкновений в  $\tau$ -приближении ( $L_{\sigma}^{\text{cr}} = -v_{\sigma}$ ) [21].

Если предположить, что невозмущенные функции распределения являются максвелловскими и, кроме того,  $T_n = T_{\sigma}$ , то величины  $A_{\sigma}^{(\alpha)}(\mathbf{k}, \omega)$ ,  $B_{\sigma}^{(\alpha)}(\mathbf{k}_{\perp}, \omega)$  и  $C_{\sigma}^{(\alpha)}(\mathbf{k}, \omega)$  можно вычислить явно, что дает

$$A_{\sigma}^{(\alpha)}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{\omega + iv_{\sigma}}{iv_{\sigma}} \left[ \frac{k_z}{k^2} \frac{2}{\xi_{\sigma}^{-}(\mathbf{k}, \omega)} - \frac{\xi_{\sigma}(\mathbf{k}_{\perp}, \omega)}{k_z + ik_{\perp}} - \frac{\omega}{\omega + iv_{\sigma}} \times \right. \\ \left. \times \frac{\xi_{\sigma}^{-1}(\mathbf{k}_{\perp}, \omega)}{k_z - ik_{\perp}} \right] \begin{cases} 0, & \alpha = 0 \\ 1, & \alpha = 1 \\ -(\pi/2)^{1/2}, & \alpha = 2 \\ 1/3, & \alpha = 3 \end{cases}$$

$$B_{\sigma}^{(\alpha)}(\mathbf{k}_{\perp}, \omega) =$$

$$= \begin{cases} 1, & \alpha = 0 \\ \xi_{\sigma}(\mathbf{k}_{\perp}, \omega) - \frac{\omega}{iv_{\sigma}} [1 - \xi_{\sigma}(\mathbf{k}_{\perp}, \omega)] [1 - \xi_{\sigma}^{-1}(\mathbf{k}_{\perp}, \omega)], & \alpha = 1 \\ 1 - (\pi/8)^{1/2} \frac{\omega}{k_{\perp} s_{\sigma}} \left[ \frac{(\omega + iv_{\sigma})^2}{2\omega v_{\sigma}} \xi_{\sigma}^2(\mathbf{k}_{\perp}, \omega) - \frac{\omega}{2v_{\sigma}} \xi_{\sigma}^{-2}(\mathbf{k}_{\perp}, \omega) - \right. \\ \left. - i2 \frac{k_{\perp}}{k_{\sigma}} \lambda_{\sigma}(\mathbf{k}_{\perp}, \omega) + \frac{\omega + iv_{\sigma}}{v_{\sigma}} a_{\sigma}(\mathbf{k}_{\perp}, \omega) \right], & \alpha = 2 \\ 1 - \frac{2}{3} \left\{ \frac{\omega}{iv_{\sigma}} \left[ 1 - \xi_{\sigma}^{-1}(\mathbf{k}_{\perp}, \omega) \right] - \frac{\omega + iv_{\sigma}}{\omega} [1 - \xi_{\sigma}(\mathbf{k}_{\perp}, \omega)] + \right. \\ \left. + \frac{\omega^2(\omega + iv_{\sigma})}{8k_{\perp}^2 s_{\sigma}^2 iv_{\sigma}} \left[ 2 \frac{\omega + iv_{\sigma}}{\omega} (1 - a_{\sigma}(\mathbf{k}_{\perp}, \omega)) - \right. \right. \\ \left. \left. - \xi_{\sigma}^{-2}(\mathbf{k}_{\perp}, \omega) - \frac{(\omega + iv_{\sigma})^2}{\omega^2} \xi_{\sigma}^2(\mathbf{k}_{\perp}, \omega) \right] \right\}, & \alpha = 3 \end{cases}, \quad (12)$$

$$C_{\sigma}^{(\alpha)}(\mathbf{k}, \omega) =$$

$$= \begin{cases} 0, & \alpha = 0 \\ 1 - 1/\xi_{\sigma}^{+}(\mathbf{k}, \omega), & \alpha = 1 \\ z_{\sigma} \left\{ \frac{k_z}{k} - \frac{1}{2k\xi_{\sigma}^{+}(\mathbf{k}, \omega)} \left[ \frac{\omega}{\omega + iv_{\sigma}} (k_z - ik_{\perp}) \xi_{\sigma}^{-1}(\mathbf{k}_{\perp}, \omega) + \right. \right. \\ \left. \left. + (k_z + ik_{\perp}) \xi_{\sigma}(\mathbf{k}_{\perp}, \omega) \right] \right\}, & \alpha = 2 \\ z_{\sigma}^2 \left\{ 1 - \frac{i}{2k_{\perp}\xi_{\sigma}^{+}(\mathbf{k}, \omega)} \left[ \frac{\omega}{\omega + iv_{\sigma}} (k_z - ik_{\perp}) \xi_{\sigma}^{-1}(\mathbf{k}_{\perp}, \omega) - \right. \right. \\ \left. \left. - (k_z + ik_{\perp}) \xi_{\sigma}(\mathbf{k}_{\perp}, \omega) \right] \right\} - 2C_{\sigma}^{(1)}(\mathbf{k}, \omega), & \alpha = 3 \end{cases}.$$

Здесь

$$\xi_{\sigma}(\mathbf{k}_{\perp}, \omega) \equiv \xi_{\sigma}(\mathbf{k}, \omega)|_{k_z=ik_{\perp}} = \exp \left[ \frac{k_{\perp}}{\pi} \int_0^{\infty} dk_z \frac{\ln a_{\sigma}(\mathbf{k}, \omega)}{k^2} \right],$$

$$\lambda_{\sigma}(\mathbf{k}_{\perp}, \omega) = \frac{\omega + iv_{\sigma}}{\omega} \frac{2k_{\sigma}}{\pi} \int_0^{\infty} dk_z \frac{k_z^4}{k^4} W(z_{\sigma}),$$

$$a_{\sigma}(\mathbf{k}_{\perp}, \omega) = \frac{2k_{\perp}}{\pi} \int_0^{\infty} dk_z \left( 1 - 2 \frac{k_z^2}{k^2} \right) \frac{\ln a_{\sigma}(\mathbf{k}, \omega)}{k^2},$$

$$k_{\sigma}^2 = 4\pi e_{\sigma}^2 n_{\sigma} / T_{\sigma}.$$

Эти соотношения будут использованы ниже при анализе вероятностей перехода в координатном пространстве.

## 2. ЛИНЕЙНЫЙ ОТКЛИК СИСТЕМЫ И КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ИСТОЧНИКОВ

Для расчета линейного отклика рассматриваемых систем воспользуемся тем обстоятельством, что вероятность перехода  $W_{\sigma}(X, X'; \tau)$  является функцией Грина соответствующего кинетического уравнения,

учитывающего самосогласованное электромагнитное взаимодействие [4–6]. В соответствии с этим индуцированный ток в системе может быть представлен в виде

$$J_i^{\sigma \text{ind}}(\mathbf{r}, t) = -\frac{e_\sigma^2 n_\sigma}{m_\sigma} \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{r}'_\perp \int_0^\infty dz' \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{v} \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{v}' v_l W_\sigma(X, X'; \tau) \times \\ \times \frac{\partial f_{0\sigma}(\mathbf{v}')}{\partial \mathbf{v}'} \left[ \mathbf{E}(\mathbf{r}', t') + \frac{\mathbf{v}'}{c} \mathbf{B}(\mathbf{r}', t') \right], \quad (13)$$

где  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  и  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  — самосогласованные поля в системе,  $e_\sigma$  и  $n_\sigma$  — заряд и средняя плотность частиц сорта  $\sigma$ .

Знание вероятности перехода достаточно также для расчета корреляционных функций источников флюктуаций [4–6]

$$\langle J_i^e(\mathbf{r}, t) J_j^e(\mathbf{r}', t') \rangle = \sum_\sigma \langle J_i^\sigma(\mathbf{r}, t) J_j^\sigma(\mathbf{r}', t') \rangle^\sigma = \\ = \sum_\sigma e_\sigma^2 n_\sigma \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{v} \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{v}' v_l v'_j [f_{0\sigma}(\mathbf{v}') W_\sigma(X, X'; \tau) + f_{0\sigma}(\mathbf{v}) W_\sigma(X' X; -\tau)]. \quad (14)$$

Для того чтобы установить связь функций линейного отклика со спектральными свойствами источников флюктуаций, выполним преобразование Фурье соотношений (13) и (14) по пространственно-временным переменным, предварительно продолжив специальным образом фигурирующие там величины в область  $z < 0$ .

В случае  $p_\sigma = 1$  токи  $J^e(\mathbf{r}, t)$  и  $J^{\sigma \text{ind}}(\mathbf{r}, t)$  следует продолжать на область  $z < 0$  зеркальным образом. При этом

$$J_i^{\sigma \text{ind}}(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{i\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z' x_{ij}^\sigma(k_z, k_z', \mathbf{k}_\perp, \omega) E_j(\mathbf{k}', \omega); \quad (15)$$

$$\langle J_i^\sigma(\mathbf{k}, \omega) J_j^{*\sigma}(\mathbf{k}', \omega') \rangle^\sigma = (2\pi)^3 \delta(\omega - \omega') \delta(\mathbf{k}_\perp - \mathbf{k}'_\perp) \times \\ \times \langle J_i^\sigma(k_z) J_j^{*\sigma}(k_z') \rangle_{k_\perp}^\sigma, \quad (16)$$

где

$$E(\mathbf{k}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{r}_\perp \int_0^\infty dz \exp(i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})) E(\mathbf{r}, t),$$

$$x_{ij}^\sigma(k_z, k_z', \mathbf{k}_\perp, \omega) = -\frac{i}{4\pi} \frac{\omega_{p\sigma}^2}{\omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{v} \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{v}' W_{\sigma \mathbf{k} \omega}(\mathbf{v}, k_z', \mathbf{v}') v_l \times \\ \times \frac{\partial f_{0\sigma}(\mathbf{v}')}{\partial v_l} [\delta_{lj}(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}') + k_l v'_j], \quad \omega_{p\sigma}^2 = 4\pi e_\sigma^2 n_\sigma / m_\sigma \quad (17)$$

$$\text{и} \quad \langle J_i^\sigma(k_z) J_j^{*\sigma}(k_z') \rangle_{k_\perp}^\sigma = I_{ij}^\sigma(k_z, k_z', \mathbf{k}_\perp, \omega) + I_{ji}^{*\sigma}(k_z', k_z, \mathbf{k}_\perp, \omega), \quad (18)$$

$$I_{ij}^\sigma(k_z, k_z', \mathbf{k}_\perp, \omega) = e_\sigma^2 n_\sigma \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{v} \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{v}' v_l v'_j f_{0\sigma}(\mathbf{v}') W_{\sigma \mathbf{k} \omega}(\mathbf{v}, k_z', \mathbf{v}').$$

При  $p_\sigma = 0$  индуцированный ток (15) и корреляционный тензор (14) доопределим в области  $z < 0$  на основе аналитического продолже-

ния  $\tilde{W}_\sigma(X, X'; \tau)$ , задаваемого интегральным представлением (8). В этом случае соотношения (15) и (16) по-прежнему остаются в силе, однако в качестве  $W_{\sigma k \omega}(\mathbf{v}, \mathbf{k}', \mathbf{v}')$  теперь фигурирует величина (10).

В практически важном случае полимаксвелловских распределений  $f_{0\sigma}(\mathbf{v}) = (m_\sigma/2\pi T_\sigma)^{3/2} \exp(-m_\sigma v^2/2T_\sigma)$  при  $p_\sigma = 1$ .

$$x_{ij}^\sigma(k_z, k'_z, \mathbf{k}_\perp, \omega) = 2\pi [\delta(k_z - k'_z) + \epsilon_j \delta(k_z + k'_z)] x_{ij}^\sigma(\mathbf{k}, \omega), \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} x_{ij}^\sigma(\mathbf{k}, \omega) &= \frac{k_i k_j}{k^2} x_L^\sigma(\mathbf{k}, \omega) + \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) x_T^\sigma(\mathbf{k}, \omega), \\ x_L^\sigma(\mathbf{k}, \omega) &= \frac{1}{4\pi} \frac{\omega_{p\sigma}^2}{k^2 s_\sigma^2} \frac{(\omega + i\nu_\sigma) W(z_\sigma)}{\omega + i\nu_\sigma W(z_{n\sigma})}, \\ x_T^\sigma(\mathbf{k}, \omega) &= \frac{1}{4\pi} \frac{\omega_{p\sigma}^2}{\omega^2} \frac{\omega}{\omega + i\nu_\sigma} [W(z_\sigma) - 1]. \end{aligned} \quad (20)$$

При  $p_\sigma = 0$

$$\begin{aligned} x_{ij}^\sigma(k_z, k'_z, \mathbf{k}_\perp, \omega) &= 2\pi \delta(k_z - k'_z) \tilde{x}_{ij}^\sigma(\mathbf{k}, \omega) + \frac{\nu_\sigma}{4\pi\omega} \frac{k_i k'_j}{k^2 k'^2} \frac{\xi_\sigma^-(\mathbf{k}, \omega)}{\xi_\sigma^+(\mathbf{k}', \omega)} \times \\ &\times \frac{k_\sigma^2 W(z_{n\sigma}) W(z'_\sigma)}{k'_z - k_z + i0} + i2 \frac{n_i^\sigma(\mathbf{k}, \omega) m_j^{(\alpha)\sigma}(\mathbf{k}', \omega)}{k_\sigma B_\sigma^{(\alpha)}(\mathbf{k}_\perp, \omega)}. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь

$$\begin{aligned} n_i^\sigma(\mathbf{k}, \omega) &= \tilde{x}_{iz}^\sigma(\mathbf{k}, \omega) - \frac{1}{8\pi} \frac{i\nu_\sigma}{\omega} \frac{k_i k_\sigma^2}{k^2} W(z_{n\sigma}) \xi_\sigma^-(\mathbf{k}, \omega) A_\sigma^{(1)}(\mathbf{k}, \omega), \\ m_i^{(\alpha)\sigma}(\mathbf{k}, \omega) &= (-1)^\alpha \frac{k_\sigma}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dv \frac{v_i W_\sigma^{(\alpha)}(\mathbf{v})}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} + i\nu_\sigma} [C_\sigma^{(\alpha)}(\mathbf{k}, \omega) \bar{s}_\sigma^{(\alpha)}(\mathbf{v}) - 1] = \\ &= \begin{cases} 0, & \alpha = 0 \\ -\frac{k_i k_\sigma}{k^2} \frac{W(z_\sigma)}{\xi_\sigma^+(\mathbf{k}, \omega)}, & \alpha = 1 \\ (\pi/2)^{1/2} \left[ 4\pi \frac{\omega}{\omega_{p\sigma}} \tilde{x}_{iz}^\sigma(\mathbf{k}, \omega) - \frac{k_i k_\sigma}{k^2} W(z_\sigma) C_\sigma^{(2)}(\mathbf{k}, \omega) \right], & \alpha = 2 \\ \frac{k_i k_\sigma}{3k^2} [(C_\sigma^{(3)}(\mathbf{k}, \omega) - z_\sigma^2) W(z_\sigma) - 1], & \alpha = 3 \end{cases} \end{aligned} \quad (22)$$

$\tilde{x}_{ij}^\sigma(\mathbf{k}, \omega)$  определяется соотношениями (20) при замене  $x_L^\sigma(\mathbf{k}, \omega)$  на  $\tilde{x}_L^\sigma(\mathbf{k}, \omega) = (1/4\pi) (\omega_{p\sigma}^2/k^2 s_\sigma^2) (1 + i\nu_\sigma/\omega) W(z_\sigma)$ .

Нетрудно рассчитать также спектральные плотности ланжевеновских источников:

$$I_{ij}^\sigma(k_z, k'_z, \mathbf{k}_\perp, \omega) = -i\omega T_\sigma x_{ij}^\sigma(k_z, k'_z, \mathbf{k}_\perp, \omega). \quad (23)$$

В соответствии с этим соотношение (18) приобретает вид флукуационно-диссипативной теоремы:

$$\langle J_i^e(k_z) J_j^{e*}(k'_z) \rangle_{k_\perp \omega} = i\omega T_\sigma \{ x_{jl}^{e*}(k'_z, k_z, \mathbf{k}_\perp, \omega) - x_{ij}^\sigma(k_z, k'_z, \mathbf{k}_\perp, \omega) \}. \quad (24)$$

### 3. ВЕРОЯТНОСТЬ ПЕРЕХОДА В КООРДИНАТНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ДЛЯ СЛУЧАЙНО БЛУЖДАЮЩЕЙ ЧАСТИЦЫ

Зная вероятность перехода  $W_\sigma(X, X'; \tau)$  и задавая распределение частиц по скоростям в начальный момент времени, нетрудно рассчитать вероятность перехода частицы в координатном пространстве. Такая вероятность дается соотношением

$$W_\sigma(r, r'; \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{v} \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{v}' f_{0\sigma}(\mathbf{v}') W_\sigma(X, X'; \tau). \quad (25)$$

Очевидно, что в диффузионном пределе ( $\tau \gg v_\sigma^{-1}$ ,  $R \gg s_\sigma/v_\sigma$ )  $W_\sigma(r, r'; \tau)$  будет описывать случайное блуждание частицы, обусловленное многократными столкновениями.

Подставляя (8) и (9) в (25), приходим к следующему результату для зеркально отражающей границы:

$$\begin{aligned} W_\sigma(r, r'; \tau) &= \frac{i}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty+i0}^{\infty+i0} d\omega \exp [i(k_\perp R_\perp - \omega\tau)] \times \\ &\times [\exp(ik_z(z - z')) + \exp(ik_z(z + z'))] \frac{1 - W(z_\sigma)}{\omega + i\nu_\sigma W(z_{n\sigma})}. \end{aligned} \quad (26)$$

В диффузионном пределе при  $T_\sigma = T_n$  соответственно имеем

$$\begin{aligned} W_\sigma(r, r'; \tau) &= \frac{\exp(-R_\perp^2/4D_\sigma\tau)}{(4\pi D_\sigma\tau)^{3/2}} \{ \exp[-(z - z')^2/4D_\sigma\tau] + \\ &+ \exp[-(z + z')^2/4D_\sigma\tau] \}, \end{aligned} \quad (27)$$

что совпадает с хорошо известным классическим результатом для вероятности перехода броуновской частицы при наличии зеркально отражающей стенки [22, 23]. Здесь  $D_\sigma = s_\sigma^2/v_\sigma$  — коэффициент диффузии для частицы сорта  $\sigma$ .

Анализ полученных общих соотношений (10) показывает, что аналогичный результат можно получить и для случайно рассеивающей непоглощающей границы ( $p_\sigma = 0$ ,  $\alpha \neq 0$ ). Наиболее просто в этом можно убедиться на примере модели, сохраняющей число падающих и рассеянных границей частиц ( $\alpha = 1$ ). Действительно, для моделей (4)–(6) в общем случае

$$\begin{aligned} W_\sigma(r, r'; \tau) &= \frac{1}{i\nu_\sigma} \frac{1}{(2\pi)^5} \int_{-\infty+i0}^{\infty+i0} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dk'_z \exp [i(k_\perp R_\perp + \\ &+ k_z z - k'_z z' - \omega\tau)] \xi_\sigma^-(\mathbf{k}, \omega) \left\{ \left[ \frac{1}{\xi_\sigma^-(\mathbf{k}', \omega)} - \frac{1}{\xi_\sigma^+(\mathbf{k}', \omega)} \right] \times \right. \\ &\times \left. \frac{1}{k'_z - k_z + i0} + \frac{A_\sigma^{(a)}(\mathbf{k}, \omega)}{B_\sigma^{(a)}(\mathbf{k}_\perp, \omega)} [F_\sigma^{(2)}(\mathbf{k}', \omega) C_\sigma^{(a)}(\mathbf{k}', \omega) - F_\sigma^{(a)}(\mathbf{k}', \omega)] \right\}. \end{aligned} \quad (28)$$

Учитывая, что при  $\tau \gg v_\sigma^{-1}$ ,  $R \gg s_\sigma/v_\sigma$  основной вклад в интегралы по переменным  $\omega$  и  $\mathbf{k}$  дают области  $\omega \ll \nu_\sigma$ ,  $k \ll s_\sigma/v_\sigma$ , выражение (28) можно привести к следующему виду в случае  $\alpha = 1$ :

$$W_\sigma(r, r'; \tau) = \frac{v_\sigma^{-1}}{(2\pi)^4} \int_{-\infty+i0}^{\infty+i0} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp(i(k_\perp R_\perp + k_z z - \omega\tau)) \xi_\sigma^-(\mathbf{k}, \omega) \times$$

$$\times \left[ \frac{\exp(-ik_z z')}{\xi_\sigma^+(k, \omega)} + i \left( \frac{i(\omega + iv_\sigma)}{D_\sigma} \right)^{1/2} k_z \frac{\exp(-iv_\sigma z')}{(k_z + ik_\sigma)v_\sigma} \right], \quad (29)$$

где

$$v_\sigma = (k_\perp^2 + \omega/iD_\sigma)^{1/2}, \quad \xi_\sigma^\pm(k, \omega) = \mp \left( \frac{D_\sigma}{i(\omega + iv_\sigma)} \right)^{\pm 1/2} (k_z \pm iv_\sigma)^{\pm 1}, \quad (30)$$

что путем очевидных преобразований приводится к (27).

В то же время граничное условие Фукса ( $\alpha=0$ ) при  $p_\sigma=0$  приводит к существенно иному результату. В этом случае  $A_\sigma^{(0)}(k, \omega)=0$  и вклад в  $W_\sigma(r, r'; \tau)$  дает лишь первое слагаемое в фигурной скобке подынтегрального выражения (28). В этом случае

$$W_\sigma(r, r'; \tau) = \frac{\exp(-R_\perp^2/4D_\sigma \tau)}{(4\pi D_\sigma \tau)^{3/2}} \{ \exp[-(z - z')^2/4D_\sigma \tau] - \exp[-(z + z')^2/4D_\sigma \tau] \}, \quad (31)$$

что совпадает с результатом Смолуховского [23–25] для вероятности перехода броуновской частицы в присутствии поглощающей стенки.

То обстоятельство, что вероятности перехода броуновской частицы в полуограниченной системе с зеркально отражающей и случайно рассеивающей границами совпадают, обусловлено эквивалентностью граничного условия (3) при  $p_\sigma=1$  и граничных условий (4)–(6) при  $p_\sigma=0$  для частиц, имеющих максвелловское распределение по скоростям, каковыми являются случайно блуждающие частицы. Последний факт нетрудно доказать, вычислив вероятность  $W_\sigma(X, r'; \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{v}' f_{0\sigma}(\mathbf{v}') W_\sigma(X, X'; \tau)$  в диффузионном пределе. Наиболее просто

такие вычисления могут быть выполнены для модели зеркально отражающей границы. В этом случае

$$W_\sigma(X, r'; \tau) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int_{-\infty+i0}^{\infty+i0} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{\exp[i(k_\perp R_\perp - \omega\tau)]}{\omega - k\mathbf{v} + iv_\sigma} \times \\ \times \{ \exp[ik_z(z - z')] + \exp[ik_z(z + z')] \} \left\{ f_{0\sigma}(\mathbf{v}) + \frac{iv_\sigma f_{n\sigma}(\mathbf{v})}{\alpha_\sigma(k, \omega)} \times \right. \\ \left. \times \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{v}' f_{0\sigma}(\mathbf{v}') / (\omega - k\mathbf{v}' + iv_\sigma) \right\}. \quad (32)$$

Так как в диффузионном пределе справедлива оценка  $\int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{v} f_{0\sigma}(\mathbf{v}) / (\omega - k\mathbf{v} + iv_\sigma) \simeq 1/v_\sigma$ , то

$$W_\sigma(X, r'; \tau) = f_{n\sigma}(\mathbf{v}) \frac{\exp(-R_\perp^2/4D_{n\sigma}\tau)}{(4\pi D_{n\sigma}\tau)^{3/2}} \{ \exp[-(z - z')^2/4D_{n\sigma}\tau] + \\ + \exp[-(z + z')^2/4D_{n\sigma}\tau] \}, \quad D_{n\sigma} = s_{n\sigma}^2/v_\sigma. \quad (33)$$

Таким образом, вероятность обнаружения частицы с заданной скоростью полностью определяется функцией  $f_{n\sigma}(\mathbf{v})$  (в равновесии  $f_{0\sigma}(\mathbf{v})$ ) и не зависит от начальной скорости частицы, что и позволяет применять полученные результаты для описания броуновского движения.

Необходимо отметить также то обстоятельство, что совпадение результатов расчета вероятностей  $W_\sigma(r, r'; \tau)$  на основе интегрирова-

ния функции  $W_\sigma(X, X'; \tau)$  для отражающей и поглощающей моделей границ (формулы (27) и (31)) с соответствующими решениями уравнения Эйнштейна—Смолуховского [25, 26]

$$\frac{\partial}{\partial t} W_\sigma(r, r'; \tau) = D_\sigma \left( \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 W_\sigma(r, r'; \tau) \quad (34)$$

не является случайным, поскольку последнее уравнение можно трактовать как следствие уравнения БГК. Действительно, домножая уравнение (1) на  $f_{0\sigma}(v')$  и  $v_i f_{0\sigma}(v')$  и выполняя интегрирование по скоростям, получим

$$\frac{\partial}{\partial t} W_\sigma(r, r'; \tau) = - \frac{\partial}{\partial r_i} \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{v} v_i W_\sigma(X, r'; \tau), \quad (35)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + v_\sigma \right) \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{v} v_i W_\sigma(X, r'; \tau) = - \frac{\partial}{\partial r_j} \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{v} v_i v_j W_\sigma(X, r'; \tau).$$

Поскольку в диффузионном пределе ( $\tau \gg v_\sigma^{-1}$ ) вероятность должна слабо меняться за время  $\Delta t \leq v_\sigma^{-1}$ , то

$$\frac{\partial}{\partial t} W_\sigma(r, r'; \tau) = \frac{1}{v_\sigma} \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{v} v_i v_j W_\sigma(X, r'; \tau).$$

Принимая во внимание далее, что для броуновских частиц должно выполняться условие  $W_\sigma(X, r'; \tau) = f_{0\sigma}(v) W_\sigma(r, r'; \tau)$ , приходим к уравнению Эйнштейна—Смолуховского (34) для вероятностей перехода броуновских частиц, если под коэффициентом диффузии понимать величину  $D_\sigma = \langle v^2 \rangle / 3v_\sigma = s_\sigma^2/v_\sigma$ .

Заметим, наконец, что на основе (27) и (31) можно сконструировать приближенную формулу для вероятности перехода в случае частично поглощающей границы (аналог модели Фукса при  $p_\sigma \neq 1$ ), просуммировав дополнительные слагаемые с весом  $p_\sigma$  (для второго слагаемого в (27)) и  $1-p_\sigma$  (для дополнительного слагаемого в (31)). В результате получим

$$W_\sigma(r, r'; \tau) = \frac{\exp(-R_\perp^2/4D_\sigma \tau)}{(4\pi D_\sigma \tau)^{3/2}} \{ \exp[-(z-z')^2/4D_\sigma \tau] + \\ + (2p_\sigma - 1) \exp[-(z+z')^2/4D_\sigma \tau] \}. \quad (36)$$

Из последнего соотношения, в частности, следует, что при  $p_\sigma=1/2$  вероятность (36) совпадает с вероятностью перехода для неограниченной среды [26]:

$$W_\sigma(r, r'; \tau) = \exp(-R_\perp^2/4D_\sigma \tau)/(4\pi D_\sigma \tau)^{3/2}, \quad R^2 = R_\perp^2 + (z-z')^2. \quad (37)$$

Используя (36), нетрудно рассчитать также среднее и среднеквадратичное смещение броуновских частиц от исходной точки за время  $\tau$ . Для среднего смещения получим

$$\langle (r-r') \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dr_\perp \int_0^{\infty} dz (r-r') W_\sigma(r, r'; \tau) \equiv e_z \langle (z-z') \rangle, \\ \langle (z-z') \rangle = 2(D_\sigma \tau/\pi)^{1/2} [p_\sigma e^{-\xi^2} - (2p_\sigma - 1)(\pi)^{1/2} \xi \operatorname{erfc} \xi], \quad (38)$$

что при  $p_\sigma=1$  совпадает с результатом, полученным в [22], а средний квадрат смещения описывается соотношениями

$$\begin{aligned}
\langle(r-r')^2\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{r}_\perp \int_0^{\infty} dz (r-r')^2 W_\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \tau) \equiv \langle(x-x')^2\rangle + \\
&\quad + \langle(y-y')^2\rangle + \langle(z-z')^2\rangle, \\
\langle(x-x')^2\rangle &= \langle(y-y')^2\rangle = 2D_\sigma \tau [p_\sigma + (1-p_\sigma) \operatorname{erf} \xi], \\
\langle(z-z')^2\rangle &= 2D_\sigma \tau [p_\sigma + (1-p_\sigma) \operatorname{erf} \xi + 4(2p_\sigma - 1)\xi^2 \operatorname{erfc} \xi + \\
&\quad + 2(1-3p_\sigma)\xi \exp(-\xi^2)(\pi)^{-1/2}].
\end{aligned} \tag{39}$$

Здесь  $\xi = z'/(4D_\sigma \tau)^{1/2}$ ,  $\operatorname{erf} \xi$  — интеграл вероятности,  $\operatorname{erfc} \xi = 1 - \operatorname{erf} \xi$ .

Таким образом, учет границы приводит не только к появлению первого момента (в неограниченной среде  $\langle(r-r')\rangle = 0$ ), но и к уменьшению (при  $p_\sigma \neq 1$ ) среднеквадратичного смещения в направлениях, параллельных границам раздела (в неограниченной среде  $\langle(x-x')^2\rangle = \langle(y-y')^2\rangle = \langle(z-z')^2\rangle = 2D_\sigma \tau$  [26]). В пределе больших  $\tau$  ( $\xi \ll 1$ ) вместо (38) и (39) будем иметь

$$\begin{aligned}
\langle(z-z')\rangle &\simeq 2(D_\sigma \tau / \pi)^{1/2} [p_\sigma - (2p_\sigma - 1)(\pi)^{1/2}\xi], \\
\langle(x-x')^2\rangle &\simeq 2D_\sigma \tau [p_\sigma + (1-p_\sigma)2(\pi)^{-1/2}\xi], \\
\langle(z-z')^2\rangle &\simeq 2D_\sigma \tau [p_\sigma - (2p_\sigma - 1)4(\pi)^{-1/2}\xi],
\end{aligned} \tag{40}$$

что при  $p_\sigma = 1$  также согласуется с результатами, полученными в работе [22].

Как видно из приведенных соотношений, асимптотическое поведение первого и второго моментов смещения при  $p_\sigma \neq 1$  также отличается от соответствующих результатов для неограниченной среды.

В частности, при  $p_\sigma = 0$  средний квадрат отклонения оказывается пропорциональным корню из  $\tau$ ,

$$\langle(z-z')^2\rangle = 2\langle(x-x')^2\rangle \simeq 4z'(D_\sigma \tau / \pi)^{1/2}, \tag{41}$$

и, кроме того, среднее смещение не зависит от времени  $\langle(z-z')\rangle \simeq z'$ , что отличается от результата для зеркально отражающей границы [22].

$$\langle(z-z')\rangle \simeq 2(D_\sigma \tau / \pi)^{1/2}.$$

Для среднего квадрата смещения при  $p_\sigma = 1$  имеет место результат Смолуховского [22]:

$$\langle(x-x')^2\rangle = \langle(z-z')^2\rangle = 2D_\sigma \tau. \tag{42}$$

Поведение первого и второго моментов смещения при произвольном значении параметра  $p_\sigma$  представлено на рис. 1, 2 (расчеты выполнялись по формулам (38) и (39)).

Данные расчеты свидетельствуют о том, что первый момент смещения, нормированный на величину  $(\pi/4D_\sigma \tau)^{1/2}$ , является монотонной функцией  $\xi$  при  $p_\sigma > 0,5$ , а при  $p_\sigma < 0,5$  характеризуется наличием хорошо выраженного максимума, смещающегося в сторону меньших значений  $\xi$  при увеличении  $p_\sigma$  от нуля до 0,5. Нормированный второй момент также испытывает влияние поглощающих свойств границы, которое оказывается минимальным в случае  $p_\sigma = 1$ , что проявляется в весьма незначительном уменьшении среднего квадрата смещения, достигающего наименьшего значения при  $\xi \simeq 0,43$ . С уменьшением  $p_\sigma$  влияние поглощения становится определяющим и нормированный средний квадрат смещения приобретает вид монотонной функции  $\xi$ , начиная с  $p_\sigma \simeq 0,69$ . Особенностью существенным такое влияние является в области  $\xi \ll 1$ , чем и объясняется тот факт, что при  $p_\sigma = 0$  средний квадрат смещения пропорционален  $(\tau)^{1/2}$ .

В заключение отметим, что, зная вероятность перехода (36), нетрудно рассчитать также поток броуновских частиц, проходящий че-

результатом, что такой поток однозначно определяет число броуновских частиц, поглощаемых единичной площадкой поверхности, а именно

$$N_{\text{abs}}^{\sigma}(\tau) = n_{\sigma} D_{\sigma} \int_0^{\tau} dt \left( \frac{\partial}{\partial z} \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{r}'_{\perp} \int_0^{\infty} dz' W_{\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \tau) \right) \Big|_{z=0} = \\ = (1 - p_{\sigma}) n_{\sigma} 2 (D_{\sigma} \tau / \pi)^{1/2}, \quad (43)$$

что при  $p_{\sigma}=0$  совпадает с результатом Смолуховского [25].

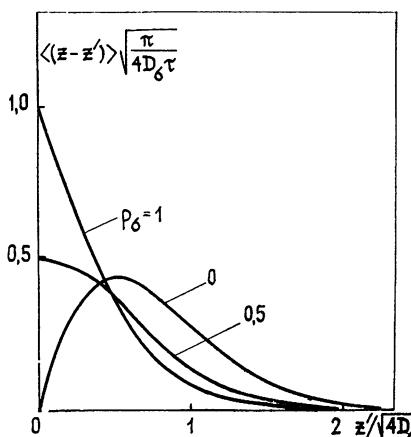


Рис. 1.

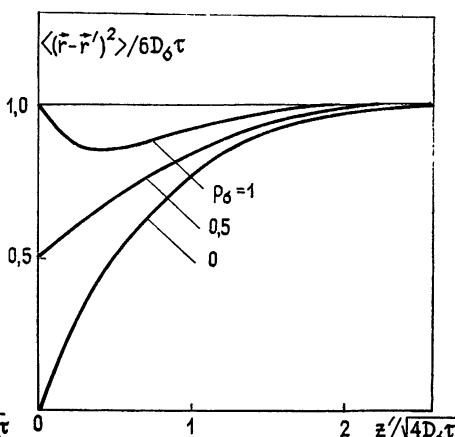


Рис. 2.

Если же броуновские частицы в начальный момент  $t=0$  были сосредоточены в окрестности точки  $\mathbf{r}'$ , то число их, поглощенное границей за время  $\tau$ , будет определяться соотношением

$$N_{\text{abs}}^{\sigma}(\tau) = N_{\sigma} \int_0^{\tau} dt \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{r}'_{\perp} D_{\sigma} \frac{\partial W_{\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \tau)}{\partial z} \Big|_{z=0} = (1 - p_{\sigma}) N_{\sigma} \operatorname{erfc} \xi, \quad (44)$$

что при  $\xi \rightarrow 0$  ( $\tau \rightarrow \infty$ ) приводит к

$$N_{\text{abs}}^{\sigma}(\tau \rightarrow \infty) = (1 - p_{\sigma}) N_{\sigma}. \quad (45)$$

Отсюда следует, что при  $p_{\sigma}=0$  и  $\tau \rightarrow \infty$  все частицы будут поглощены границей, в то время как при  $p_{\sigma} \neq 0$  даже в пределе больших времен имеется возможность обнаружения броуновских частиц.

Выполненные в настоящей работе исследования показывают, что влияние столкновений на динамику отдельных частиц, а следовательно, и на статистические свойства многочастичных систем могут существенным образом зависеть от характера рассеяния частиц границей. Особенно наглядно это проявляется на примере броуновского движения частиц в пограничных областях.

Заметное влияние рассеивающих свойств границы испытывают также функции линейного отклика и корреляционные тензоры микротоков. Очевидно, что оно должно проявиться и в спектральных распределениях флюктуаций различных величин электромагнитной природы (спектры спонтанного излучения и рассеяния, спектры флюктуаций плотности частиц и т. п.). В основу расчетов таких спектров могут быть положены соотношения, полученные в настоящей работе.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Левин М. Л., Рытов С. М. Теория равновесных тепловых флуктуаций в электродинамике.—М.: Наука, 1967, гл. 1, 5.
2. Климонтович Ю. Л. Кинетическая теория электромагнитных процессов.—М.: Наука, 1980.
3. Ситенко А. Г. Флуктуации и нелинейное взаимодействие волн в плазме.—Киев: Наукова думка, 1976.
4. Sitenko A. G., Yakimenko I. P. Advances in Plasma Physics.—N. Y.: Interscience, 1974, p. 22.
5. Ichimaru S., Yakimenko I. P.—Physica Scripta, 1973, 7, № 5, p. 197.
6. Якименко И. П. В кн.: Проблемы теории плазмы.—Киев: Наукова думка, 1976, с. 80.
7. Williams R. H., Chappel W. R.—Phys. Fluids, 1971, 14, № 3, p. 591.
8. Bhatnagar P. L., Gross E. P., Krook M.—Phys. Rev., 1954, 94, № 3, p. 511.
9. Гинзбург В. Л., Рухадзе А. А. Волны в магнитоактивной плазме.—М.: Наука, 1975, § 5.
10. Ситенко А. Г., Гурин А. А.—ЖЭТФ, 1965, 49, вып. 5(11), с. 1591.
11. Генчев Ж. Д.—Докл. Болг. АН, 1979, 52, № 1, с. 11
12. Белый В. В., Климонтович Ю. Л., Наливайко В. П.—Физика плазмы, 1982, 8, вып. 5, с. 1063.
13. Загородний А. Г., Кривцун И. В., Якименко И. П.—УФЖ, 1977, 22, № 9, с. 1533.
14. Загородний А. Г., Якименко И. П.—Физика многочастичных систем, 1982, вып. 1, с. 72.
15. Fuchs K.—Proc. Cambr. Phil. Soc., 1938, 34, № 1, p. 100.
16. Reuter G. E. H., Sondheimer E. H.—Proc. Roy. Soc., 1948, A 195, № 1042, p. 336.
17. Gross E. P., Jackson E. A., Ziering S.—Ann. Phys., 1957, 1, № 1, p. 144.
18. Шидловский В. П. Введение в динамику разреженного газа.—М.: Наука, 1965, с. 27.
19. Коган М. Н. Динамика разреженных газов.—М.: Наука, 1967, § 2.9.
20. Загородний А. Г., Усенко А. С., Якименко И. П. Препринт ИТФ-84-131Р.—Киев, 1984.
21. Usenko A. S., Yakimenko I. P.—Phys. Scripta, 1981, 24, № 4, p. 785.
22. Смолуховский М. В кн.: Брауновское движение А. Эйнштейн, М. Смолуховский./Под ред. Б. И. Давыдова.—Л.: ОНТИ, 1936, с. 205.
23. Чандraseкар С. Статистические проблемы физики и астрофизики.—М.: ИЛ, 1947, гл. 1.
24. Смолуховский М. В кн.: Брауновское движение А. Эйнштейн, М. Смолуховский./Под ред. Б. И. Давыдова.—Л.: ОНТИ, 1935, с. 319.
25. Смолуховский М. В кн.: Брауновское движение. А. Эйнштейн, М. Смолуховский./Под ред. Б. И. Давыдова.—Л.: ОНТИ, 1935, с. 332.
26. Эйнштейн А. Собрание научных трудов./Под ред. И. Е. Тамма, Я. А. Смородинского, Б. Г. Кузнецова.—М.: Наука, 1966, 3, с. 108.

Институт теоретической физики  
АН УССР

Поступила в редакцию  
3 января 1985 г.

## ON THE MOTION OF THE CHARGED PARTICLES IN THE BOUNDED COLLISIONAL SYSTEMS

A. G. Zagorodnij, A. S. Usenko, I. P. Yakimenko

On the basis of transition probability approach the influence of the reflecting properties of the boundary on the motion of the charged particles in the collisional system is investigated. The probabilities of particle transition in the phase space for the systems with specularly reflecting and random scattering boundaries are found. The average and meansquare displacements have been calculated for Brownian particle in semi-bounded systems.