ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXIX, № 2 *РАДИОФИЗИКА* *1986*

УДК 519.21

ОБОБЩЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ КОЛМОГОРОВА—ФОККЕРА—ПЛАНКА В ТЕОРИИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

С. И. Вайнштейн

Рассмотрены обобщенные уравнения Колмогорова—Фоккера—Планка, описывающие поведение скалярной примеси в турбулентной среде. Получены соответствующие уравнения для одно-, двух- и т. д. точечных функций распределения для лагранжевых жидких частиц.

В ряде задач большое значение имеют кинетические уравнения, описывающие случайные процессы. Для некоторых процессов известны не только уравнения, но и входящие туда параметры (или функции). Последние выражаются через моменты случайных величин. Таким примером может служить марковский процесс, описываемый уравнением Колмогорова—Фоккера—Планка (КФП). Гораздо более широкий класс процессов описывается обобщенными уравнениями КФП (ОУКФП). При этом известна только структура уравнений. Входящие в уравнения параметры, вообще говоря, неизвестны. Они не выражаются через моменты входящих в задачу случайных величин и должны определяться независимо от уравнений (см. [1, 2, 3]). Однако для некоторых задач турбулентности достаточно знать лишь вид уравнений. Кроме того, с помощью ОУКФП можно получить уравнения для корреляционных функций пассивных величин (скалярных и векторных). Наконец, все параметры многоточечных кинетических уравнений (по крайней мере, для рассматриваемых в статье функций распределений) легко получаются из двухточечных.

В настоящей статье получены кинетические уравнения для лагранжевых функций распределения жидких частиц в рамках теории ОУКФП.

1. Общая структура кинетических уравнений. Будем рассматривать функции распределения $p_1(\boldsymbol{x}, t|\boldsymbol{a}, t_0)$, $p_2({}^1\boldsymbol{x}, {}^2\boldsymbol{x}, t|{}^1\boldsymbol{a}, {}^2\boldsymbol{a}, t_0)$ и т. д. — условные вероятности того, что жидкая частица находится в точке $\boldsymbol{x}$ (${}^1\boldsymbol{x}$, ${}^2\boldsymbol{x}$ и т. д.) в момент времени t при условии, что в момент t_0 она находилась в точке $\boldsymbol{a}$ (${}^1\boldsymbol{a}$, ${}^2\boldsymbol{a}$ и т. д.). В настоящем разделе ограничимся одночастичной функцией распределения p_1.

Для использования теорем Павулы [1] (см. также [2, 3]) при выводе ОУКФП конкретно для функции распределения p_1 необходимо преодолеть некоторые трудности. Действительно, Павула исходит из известного в теории вероятности соотношения

$$p(x, t+\Delta t|a, t_0) = \int Q(x, t+\Delta t|y, t, a, t_0)\, p_1(y, t|a, t_0)\, dy, \tag{1}$$

где Q — плотность вероятности попадания частицы в точку x в момент $t+\Delta t$, если в момент t она находилась в точках y, a соответственно. Для упрощения записи здесь рассматривается одномерная задача (аргументы не являются векторами). Правая часть (1) представляется в дифференциальном виде:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \Lambda_n p_1(x, t|a, t_0), \tag{2}$$

$$\Lambda_n = \overline{[x(t+\Delta t) - x(t)]^n} = \int (x-y)^n Q(x, t+\Delta t | y, t, a, t_0) dx.$$

Отсюда следует уравнение

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \tilde{\Lambda}_n p_1, \quad \tilde{\Lambda}_n = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Lambda_n}{\Delta t}. \tag{3}$$

Уравнение КФП, как известно, совпадает с (3), если $\tilde{\Lambda}_n = 0$ при $n > 2$. Это же утверждение справедливо для ОУКФП. Если, однако, непосредственно вычислять $\tilde{\Lambda}_2$ по (2), (3), полагая, что траектория $x(t)$ есть непрерывно дифференцируемая функция, что является обычным для реальных траекторий жидких частиц в турбулентной среде, — то получится, что и $\tilde{\Lambda}_2 = 0$. Убедимся в этом на одном простом примере. Пусть $x(t) = A \sin t + \delta$, A, δ — случайные величины. Тогда очевидно

$$Q = \delta \left\{ x - y - \frac{y - a}{\sin t - \sin t_0} [\sin(t + \Delta t) - \sin t] \right\}.$$

Подставляя это выражение в (2), видим , что при малых Δt $\Lambda_n \sim (\Delta t)^n$, так что согласно (3) $\tilde{\Lambda}_n = 0$ при $n \geqslant 2$. В общем случае

$$Q = \overline{\delta[x - x(t+\Delta t \mid a, t_0)]\, \delta\, [y - x(t \mid a, t_0)]} p_1^{-1} (y, t \mid a, t_0), \tag{4}$$

где $x(t \mid a, t_0)$ — траектория частицы, т. е. ее положение в момент t, если в момент t_0 она находилась в точке a. В числителе (4) — усреднение по траекториям. При малых значениях

$$\Lambda_n = (\Delta t)^n \overline{[\dot{x}(t)]^n \delta\, [y - x(t \mid a, t_0)]} p_1^{-1} (y, t \mid a, t_0), \tag{5}$$

$\dot{x} = \partial x(t)/\partial t$, откуда опять следует, что $\tilde{\Lambda}_n = 0$ при $n \geqslant 2$. Здесь предполагается лишь существование первой производной у траектории (т.е. непрерывность самой функции).

Тем не менее, выражения (1)—(3) можно использовать для получения уравнений для p_1, если представить траекторию дискретной моделью диффузии (см., например, [4]). Разобьем интервал $t - t_0$ на m равных промежутков $\tau_m = (t - t_0)/m$. Введем дискретный процесс $x_m(t)$: на каждом промежутке $k\tau_m < t \leqslant (k+1)\tau_m$ (k — целое) $x_m(t) = x_m^{(k)} = \text{const}$, причем величина $x_m^{(k)}$ меняется скачком при изменении k. Пусть смещения $\Delta x^{(k)} = x_m^{(k)} - x(k\tau_m | a, t_0)$ описываются функцией распределения $f_m^{(k)}(\Delta x)$, причем

$$\lim_{m \to \infty} f_m^{(k)}(\Delta x) = \delta(\Delta x). \tag{6}$$

Последнее условие означает, что при больших m смещения малы и $x_m(t)$ приближается к $x(t \mid a, t_0)$: $\overline{x_m(t) - x(t \mid a, t_0)} \to 0$ при $m \to \infty$.

Перейдем теперь от (1) к (3), предполагая, что функции p_1 и Q соответствуют процессу $x_m(t)$ (m велико). Тогда

$$\tilde{\Lambda}_n(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \overline{[x_m^{(k)} - x_m^{(k+1)}]^n} (\Delta t)^{-1}, \tag{7}$$

причем величина k в (7) соответствует интервалу $k\tau_m < t \leqslant (k+1)\tau_m$. Теперь уже коэффициенты $\tilde{\Lambda}_n$, вообще говоря, не обращаются в нуль. Реальные кинетические коэффициенты $\tilde{\Lambda}_n$ соответствуют (7) при $m \to \infty$. Согласно [1] обращение в нуль какого-либо коэффициента Λ_n (n — четное) влечет за собой $\Lambda_n = 0$ при $n > 2$, т. е. ОУКФП.

Одномерные уравнения (1)—(3) легко обобщаются на трехмерные (см., например, [3]). Что касается двух-, трех- и т. д. частичных функций распределения (p_2, p_3 и т. д.), то здесь имеет место вторая теорема Павулы [1]: если уравнение для p_1 есть ОУКФП, то уравнения для p_2, p_3 и т. д. тоже ОУКФП (т. е. тоже второго порядка по пространственным производным).

2. ОУКФП в асимптотическом режиме. Наряду с условными вероятностями p_1, p_2, введенными в разд. 1, рассмотрим функции $\tilde{p}_1(\boldsymbol{a}, t_0|\boldsymbol{x}, t)$, $\tilde{p}_2({}^1\boldsymbol{a}, {}^2\boldsymbol{a}, t_0|{}^1\boldsymbol{x}, {}^2\boldsymbol{x}, t)$ и т. д. Последние отличаются от p_2, p_1 и т. д. тем, что соответствуют распределению вероятности в прошлый момент времени t_0, $t_0<t$. Если для $\tilde{p}_1$, $\tilde{p}_2$ и т. д. провести процедуру вывода (1)—(3), то получится аналог первого уравнения Колмогорова — для переменных t_0 и $\boldsymbol{a}$. Нас, однако, ниже будут интересовать уравнения, содержащие производные только от «будущих» моментов и координат t и $\boldsymbol{x}$ (как (3)). Для их вывода воспользуемся связью между p_1 и $\tilde{p}_1$:

$$p_1(x, t \mid a, t_0) = \frac{\tilde{p}_1(a, t_0|x, t)\, p(x, t)}{p(a, t_0)}. \tag{8}$$

Ограничимся рассмотрением стационарной среды, для которой вероятность p не зависит от времени. Подставляя p_1 из (8) и (3), получим

$$\frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial t} = -\frac{1}{p}\frac{\partial}{\partial x}\tilde{\Lambda}_1 \tilde{p}_1 p + \frac{1}{2p}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\tilde{\Lambda}_2 \tilde{p}_1 p \tag{9}$$

($\tilde{\Lambda}_n = 0$ при $n>2$). Здесь p зависит только от x. Уравнения (3), (9) допускают существенное упрощение в асимптотическом режиме. Под этим будем понимать поведение всех величин при $t - t_0 \gg \tau$, τ — время «памяти», за которое система «забывает» о своем начальном состоянии. Ниже это понятие будет конкретизировано для турбулентности.

Пренебрежем зависимостью от начального положения точки в кинетических коэффициентах Λ_n (и $\tilde{\Lambda}_n$) в (2), (3). Тогда коэффициенты $\tilde{\Lambda}_1$, $\tilde{\Lambda}_2$ в (9) зависят только от x. Проинтегрируем уравнение (9) по a. Учитывая, что $\int \tilde{p}(a, t_0|x, t)\,da = 1$, получим из (9)

$$\frac{\partial}{\partial x}\tilde{\Lambda}_1 p = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\tilde{\Lambda}_2 p, \quad \tilde{\Lambda} p_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\tilde{\Lambda}_2 p + C. \tag{10}$$

Перейдем к выводу уравнений для скалярной примеси. В сжимаемой среде имеется два вида примеси: $\tilde{\theta}$ и θ, удовлетворяющих уравнениям

$$\partial\tilde{\theta}/\partial t + v_j \partial_j \tilde{\theta} = 0; \tag{11}$$

$$\partial\theta/\partial t + \partial_j v_j \theta = 0. \tag{12}$$

Решение уравнения (11) записывается в виде $\tilde{\theta}(\boldsymbol{x}, t) = \tilde{\theta}(\boldsymbol{a}, t_0|\boldsymbol{x}, t)$ или

$$\tilde{\theta}(\boldsymbol{x}, t) = \int \delta\,[\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}(t_0|\boldsymbol{x}, t)]\,\tilde{\theta}(\boldsymbol{a}, t_0)\,d\boldsymbol{a}. \tag{13}$$

Усредняя это выражение по траекториям и по начальному распределению $\tilde{\theta}(\boldsymbol{a}, t_0)$, получим

$$\overline{\tilde{\theta}}(\boldsymbol{x}, t) = \int \overline{\tilde{p}_1(\boldsymbol{a}, t_0|\boldsymbol{x}, t)\, \tilde{\theta}(\boldsymbol{a}, t_0)}\, d\boldsymbol{a}. \tag{14}$$

Здесь, как обычно, предполагается статистическая независимость начального распределения $\tilde{\theta}(\boldsymbol{a}, t_0)$ от последующего движения жидкости. По этой причине (14) целесообразно рассматривать при больших временах $t-t_0 \gg \tau$, когда система забудет начальную статистику. В рассматриваемом случае τ есть корреляционное время; в реальной турбулентности $\tau = l/v$, l — корреляционная длина («внешний» масштаб), v — среднеквадратичная скорость. Беря производную по времени от (14), заменяя $\partial\tilde{p}_1/\partial t$ согласно (9) и учитывая независимость $\tilde{\Lambda}_1$ и $\tilde{\Lambda}_2$ от начального положения $\boldsymbol{a}$, получим уравнение для $\overline{\tilde{\theta}}$. Последнее, очевидно, совпадает с (9). Выпишем его трехмерный аналог и соответствующие обобщения условий (10):

$$\partial\overline{\tilde{\theta}}/\partial t = -(\bar{n})^{-1}\partial_i \overline{\Lambda_i \bar{n}\tilde{\theta}} + (\bar{n})^{-1}\partial_i\partial_j \overline{\Lambda_{ij}\bar{n}\tilde{\theta}}; \tag{15}$$

$$\Lambda_i \bar{n} = \partial_j \Lambda_{ij}\bar{n} + A_i, \tag{16}$$

$\boldsymbol{A}$ — произвольный соленоидальный вектор, $\operatorname{div}\boldsymbol{A} = 0$. Здесь введена средняя плотность среды n, соответствующая вероятности $p(x)$ в (8), (9). Дальнейшая конкретизация вида тензора Λ_i будет дана в следующем разделе.

3. Многочастичные кинетические уравнения. Обратимся прежде всего к двухчастичным функциям распределения p_2 и $\tilde{p}_2$. Ниже речь будет идти о виде кинетических уравнений в асимптотическом режиме. Воспользуемся обобщением формулы (8):

$$p_2({}^1\boldsymbol{x}, {}^2\boldsymbol{x}, t|{}^1\boldsymbol{a}, {}^2\boldsymbol{a}, t_0) = \frac{\tilde{p}_2({}^1\boldsymbol{a}, {}^2\boldsymbol{a}, t_0|{}^1\boldsymbol{x}, {}^2\boldsymbol{x}, t)\, p({}^1\boldsymbol{x}, {}^2\boldsymbol{x})}{p({}^1\boldsymbol{a}, {}^2\boldsymbol{a})}. \tag{17}$$

Уравнение для p_2 записывается в дивергентной форме (3). Условие $\int p_2 d^2\boldsymbol{x} = p_1$ и очевидная симметрия по точкам ${}^1\boldsymbol{x}$ и ${}^2\boldsymbol{x}$ приводят к связи новых кинетических коэффициентов с фигурирующим в (15), (16). Появляется только один дополнительный тензор, зависящий от двух точек, обозначим его $T_{ij}({}^1\boldsymbol{x}, {}^2\boldsymbol{x})$. Согласно определению (2), (3) этот кинетический коэффициент является вторым моментом, т. е. он удовлетворяет свойствам корреляционного тензора.

$$T_{ij} = \overline{u_i({}^1\boldsymbol{x})\, u_j({}^2\boldsymbol{x})}, \tag{18}$$

где u_i — некоторое, вообще говоря, неизвестное случайное векторное поле. Кроме того, при ${}^2\boldsymbol{x} = {}^1\boldsymbol{x}$ (и ${}^2\boldsymbol{a} \neq {}^1\boldsymbol{a}$) $p_2 = 0$, поскольку две частицы не могут слиться в одну. Уравнение для p_2 должно сохранять это свойство. Отсюда следует

$$\Lambda_{ij}({}^1\boldsymbol{x}) = T_{ij}({}^1\boldsymbol{x}, {}^1\boldsymbol{x}). \tag{19}$$

Выпишем уравнение для $\tilde{p}_2$, пользуясь (16) и (17):

$$\begin{aligned} &p\partial\tilde{p}_2/\partial t + [{}^1\partial_i V_i({}^1\boldsymbol{x}) + {}^2\partial_i V_i({}^2\boldsymbol{x})]\, p\tilde{p}_2 = \\ &= [-{}^1\partial_i(\bar{n})^{-1}\Lambda_{ij}({}^1\boldsymbol{x})({}^1\partial_j\bar{n}) + {}^1\partial_i\Lambda_{ij}({}^1\boldsymbol{x})\,{}^1\partial_j - \\ &-{}^2\partial_i(\bar{n})^{-1}\Lambda_{ij}({}^2\boldsymbol{x})({}^2\partial_j\bar{n}) + {}^2\partial_i\Lambda_{ij}({}^2\boldsymbol{x})\,{}^2\partial_j + \\ &+ {}^1\partial_i\,{}^2\partial_j T_{ij}({}^1\boldsymbol{x}, {}^2\boldsymbol{x}) + {}^2\partial_i\,{}^1\partial_j T_{ij}({}^2\boldsymbol{x}, {}^1\boldsymbol{x})]\, p\tilde{p}_2. \end{aligned} \tag{20}$$

Здесь $V = A/\bar{n}$, $p = p({}^1\boldsymbol{x}, {}^2\boldsymbol{x})$. Уравнение существенно упрощается, если учесть, что при интегрировании по ${}^2\boldsymbol{a}$ функция $\tilde{p}_2$ переходит в $\tilde{p}_1$ и, соответственно, уравнение (20) в (15). Отсюда приходим к следующим условиям:

$$[{}^1\partial_i V_i({}^1\boldsymbol{x}) + {}^2\partial_i V_i({}^2\boldsymbol{x})]\, p({}^1\boldsymbol{x}, {}^2\boldsymbol{x}) = 0; \tag{21}$$

$$\frac{-1}{\bar{n}({}^1\boldsymbol{x})} \Lambda_{ij}({}^1\boldsymbol{x})({}^1\partial_j \bar{n})\, p + \Lambda_{ij}({}^1\boldsymbol{x})\, {}^1\partial_j p + {}^2\partial_j T_{ij}({}^1\boldsymbol{x}, {}^2\boldsymbol{x})\, p = 0 \tag{22}$$

(и соответствующему уравнению, получающемуся из (22) заменой точки ${}^1\boldsymbol{x}$ на ${}^2\boldsymbol{x}$). Интегрируя (21) по ${}^2\boldsymbol{x}$ с учетом того, что $\int p({}^1\boldsymbol{x}, {}^2\boldsymbol{x})\, d^2\boldsymbol{x} = p({}^1\boldsymbol{x}) = \bar{n}({}^1\boldsymbol{x})$, получаем

$$\operatorname{div} V\bar{n} = 0, \tag{23}$$

что соответствует определению вектора V через соленоидальный $\boldsymbol{A}$ в (16). Использование (21)—(23) приводит к следующему уравнению для $\tilde{p}_2$ и p_2:

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{p}_2 + V_i({}^\alpha\boldsymbol{x})\, {}^\alpha\partial_i \tilde{p}_2 = \overline{u_i({}^\alpha\boldsymbol{x})\, {}^\alpha\partial_i u_j({}^\beta\boldsymbol{x})}\, {}^\beta\partial_j \tilde{p}_2; \tag{24}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} p_2 + {}^\alpha\partial_i V_i({}^\alpha\boldsymbol{x})\, p_2 = {}^\alpha\partial_i\, \overline{u_i({}^\alpha\boldsymbol{x})\, {}^\beta\partial_j u_j({}^\beta\boldsymbol{x})}\, p_2, \tag{25}$$

суммирование по повторяющимся латинским и греческим индексам. $\alpha, \beta = 1{,}2$; оператор ${}^\alpha\partial_i$ действует на все выражение справа от него. Уравнения (24), (25) совпадают с уравнениями для корреляционных функций $\tilde{\theta}({}^1\boldsymbol{x})\tilde{\theta}({}^2\boldsymbol{x})$ и $\theta({}^1\boldsymbol{x})\theta({}^2\boldsymbol{x})$. При выводе было использовано дополнительное соотношение

$$\overline{u_i({}^1\boldsymbol{x})\, {}^1\partial_j u_j({}^1\boldsymbol{x})}\, \bar{n} = 0. \tag{26}$$

Оно получено с использованием функции распределения $\tilde{p}_4$, речь о которой пойдет ниже. Пользуясь (23), упростим уравнение (15) и соответствующее для $\bar{\theta}$:

$$\partial\bar{\tilde{\theta}}/\partial t + V_i \partial_i \bar{\tilde{\theta}} = \overline{u_i \partial_i u_j}\, \partial_j \bar{\tilde{\theta}}; \tag{27}$$

$$\partial\bar{\theta}/\partial t + \partial_i V_i \bar{\theta} = \partial_i \overline{u_i \partial_j u_j}\, \bar{\theta}. \tag{28}$$

Для выяснения физического смысла кинетических коэффициентов рассмотрим ряд частных случаев. Прежде всего, для однородной турбулентности все корреляции типа $\overline{u_i \partial_i u_j}$ обращаются в нуль и в правых частях уравнений (27), (28) остается только (вообще говоря, анизотропная) диффузия с коэффициентом (10). Левые же части уравнений (27), (28) отвечают конвективному переносу со скоростью V. Последняя есть просто усредненная крупномасштабная скорость жидкости, причем условие (23) соответствует стационарной плотности среды. Для выяснения роли неоднородности турбулентности выпишем (27), (28) в другом виде, выражая коэффициенты через $\overline{u_i u_j} = \Lambda_{ij}$, с учетом (26), $V = 0$:

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t} \bar{\tilde{\theta}} = \left[\partial_i \Lambda_{ij} \partial_j + \left(\frac{\partial_i \bar{n}}{\bar{n}}\right) \Lambda_{ij} \partial_j\right] \bar{\tilde{\theta}}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \bar{\theta} = \left[\partial_i \Lambda_{ij} \partial_j - \partial_i \Lambda_{ij} \left(\frac{\partial_j \bar{n}}{\bar{n}}\right)\right] \bar{\theta}.\end{gathered} \tag{29}$$

Отсюда видно, что усредненный перенос связан с неоднородностью плотности $\bar{n}$. Первый член правой части (29) ответствен за диффузию с неоднородным тензорным коэффициентом Λ_{ij}. Тензор T_{ij} (18) при ${}^1\boldsymbol{x} \neq {}^2\boldsymbol{x}$ дает информацию о двух жидких частицах и о поведении корреляционной функции примесей $\tilde{\theta}$ и θ в разных точках.

В этих частных случаях допускались флуктуации плотности, движение не является несжимаемым. Это накладывает ограничение на функцию $p({}^1\boldsymbol{x}, {}^2x)$ (см. (22)). Ситуация существенно упрощается, если движение жидкости не вызывает возмущений плотности, т. е.

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} \bar{n} = 0. \tag{30}$$

Тогда $p({}^1\boldsymbol{x}, {}^2\boldsymbol{x}) \sim \overline{n({}^1\boldsymbol{x})}\, \overline{n({}^2\boldsymbol{x})}$, и из (22) следует, что $\operatorname{div} \boldsymbol{u} \bar{n} = 0$. В частности, если $\bar{n} = \text{const}$, то как $\boldsymbol{V}$, так и $\boldsymbol{u}$ являются соленоидальными векторами. В этом случае турбулентность может быть сама по себе однородной.

Если (30) не выполняется, то даже при $n = \text{const}$ турбулентность не во всех случаях может быть однородной. Действительно, согласно (21), крупномасштабное поле V (пусть несжимаемое) приводит к тому, что p неоднородным образом зависит от координат. Только если дополнительно $\boldsymbol{V} = \text{const}$, то (21) удовлетворяется тождественно, поскольку $p = p({}^1\boldsymbol{x} - {}^2\boldsymbol{x})$. В этом последнем случае условие (22) может быть упрощено:

$$\partial_j [\Lambda_{ij} - T_{ij}(\boldsymbol{r})]\, p(\boldsymbol{r}) = 0, \tag{31}$$

$\boldsymbol{r} = {}^1\boldsymbol{x} - {}^2\boldsymbol{x}$, $\partial_j = \partial/\partial r_j$. Выражение (31) дает связь между кинетическими коэффициентами и возмущениями плотности.

Перейдем к рассмотрению многочастичных функций распределения. Как отмечалось в разд. 1, соответствующие кинетические уравнения имеют вид ОУКФП, причем кинетические коэффициенты зависят только от положения двух частиц, т. е. они имеют вид $T_{ij}({}^1x, {}^2\boldsymbol{x})$, $T_{ij}({}^1\boldsymbol{x}, {}^3\boldsymbol{x})$, $T_{ij}({}^2\boldsymbol{x}, {}^3\boldsymbol{x})$ и т. д. В противном случае (т. е. если имеются коэффициенты типа $\Lambda({}^1\boldsymbol{x}, {}^2\boldsymbol{x}, {}^3\boldsymbol{x})$) невозможен переход от ОУКФП для p_n к ОУКФП для p_{n-1}, осуществляемый по правилу $p_{n-1} = \int p_n d\, {}^n\boldsymbol{x}$. Поэтому в многочастичных уравнениях будут фигурировать те же коэффициенты T_{ij}, что и в (24), (25). Уравнение для p_n совпадает по форме с (24), (25), причем $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n$.

Вернемся к примеси θ, удовлетворяющей (12). Выпишем решение этого уравнения:

$$\theta({}^1\boldsymbol{x}, t) = \frac{n({}^1\boldsymbol{x}, t)}{n({}^1\boldsymbol{a}, t_0)}\, \theta({}^1\boldsymbol{a}, t_0) = \frac{\partial({}^1a_1, {}^1a_2, {}^1a_3)}{\partial({}^1x_1, {}^1x_2, {}^1x_3)}\, \theta({}^1\boldsymbol{a}, t_0) =$$

$$= \lim_{\substack{{}^2x \to {}^1x \\ {}^3x \to {}^1x \\ {}^4x \to {}^1x}} \frac{1}{6} \varepsilon_{ljf} \varepsilon_{lmn}\, {}^2\partial_l\, {}^3\partial_m\, {}^4\partial_n \int {}^2z_l\, {}^3z_j\, {}^4z_f \times \tag{32}$$

$$\times \prod_{\gamma=1}^{4} \delta[{}^\gamma\boldsymbol{z} - \boldsymbol{a}(t_0 | {}^\gamma\boldsymbol{x}, t)]\, \theta({}^1\boldsymbol{z}, t_0)\, d\,{}^1\boldsymbol{z}\, d\,{}^2\boldsymbol{z}\, d\,{}^3\boldsymbol{z}\, d\,{}^4\boldsymbol{z}.$$

Здесь же по аналогии с (13) $\theta({}^1\boldsymbol{a}, t_0)$ представлено в интегральном виде. Кроме того, в таком же виде представлен якобиан, фигурирующий в (32). Усредняя (32) по ансамблю траекторий и начальному θ, получим справа $\tilde{p}_4$ (вместо $\tilde{p}_1$ в (14)). Беря производную по t от усредненного выражения и заменяя $\partial \tilde{p}_4/\partial t$ согласно (24), получим уравнение для $\bar{\theta}$. Последнее следует сравнить с полученным из (15) с помощью (8). Эти уравнения совпадут, если и только если выполняется условие (26). Отметим, наконец, что для марковского процесса уравнения для $\tilde{p}_n$ и p_n в точности совпадают с (24), (25), причем тензор T_{ij} может быть выражен через эйлерову скорость $\boldsymbol{v}$.

4. ОУКФП и реальная турбулентность. Приближение марковского процесса эквивалентно условию $\tau \ll l/v$. Для реальной турбулентности оно не выполняется. Поэтому, казалось бы, уравнения для усредненных величин θ, $\tilde{\theta}$, и, соответственно, для p_n, $\tilde{p}_n$, должны содержать предысторию процесса в явном виде. Вместо этого в уравнения (24), (25) предыстория входит только через начальные значения. В (3) коэффициенты, вообще говоря, зависят от начального значения $\boldsymbol{a}$, но зависимость от времени, на первый взгляд, должна быть интегральной. Иными словами, уравнение для $\overline{\theta}$, например, должно иметь вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\overline{\theta(\boldsymbol{x}, t)} = \int_{t_0}^{t} K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t - t' + t_0)\,\overline{\theta(\boldsymbol{y}, t')}\,d\boldsymbol{y}\,dt'. \qquad (33)$$

Здесь использовано свойство стационарности турбулентности: K зависит от $t-t'$. При $t=t_0$ правая часть (33) обращается в нуль, это связано с предполагаемой начальной нескоррелированностью полей θ и $\boldsymbol{v}$ и следует из непосредственного усреднения (12). Преобразуя уравнение (33) в чисто интегральное и проводя итерационную процедуру, нетрудно получить решение, которое запишем в виде

$$\overline{\theta(\boldsymbol{x}, t)} = \int L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t - t_0)\,\overline{\theta(\boldsymbol{y}, t_0)}\,d\boldsymbol{y}. \qquad (34)$$

Итак, в фурье-представлении (для однородной и изотропной турбулентности)

$$\begin{gathered}\overline{\theta(\boldsymbol{k}, t)} = L(\boldsymbol{k}, t - t_0)\,\overline{\theta(\boldsymbol{k}, t_0)} = \overline{\theta(\boldsymbol{k}, t_0)}\exp\left[-\int_{t_0}^{t} D(\boldsymbol{k}, t_1)\,dt_1\right],\\ \frac{\partial}{\partial t}\,\overline{\theta(\boldsymbol{k}, t)} = -D(\boldsymbol{k}, t - t_0)\,\overline{\theta(\boldsymbol{k}, t)}.\end{gathered} \qquad (35)$$

Уравнение (35) и его фурье-прообраз уже не содержат интеграл по времени. Если отказаться от предположения об однородности турбулентности или рассматривать динамику корреляционной функции, то вывод уравнения типа (35) носит более формальный характер. Из (35) следует

$$\begin{gathered}\overline{\theta(\boldsymbol{y}, t_0)} = \int L^{-1}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, t - t_0)\,\overline{\theta(\boldsymbol{z}, t)}\,d\boldsymbol{z},\\ \frac{\partial}{\partial t}\,\overline{\theta(\boldsymbol{x}, t)} = \int \left(\frac{\partial}{\partial t} L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t - t_0)\right) L^{-1}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, t - t_0)\,\overline{\theta(\boldsymbol{z}, t)}\,d\boldsymbol{y}\,d\boldsymbol{z}.\end{gathered} \qquad (36)$$

Это уравнение тоже не содержит интеграла по времени. Таким образом, становится понятен общий вид (3) — кинетического уравнения для немарковского процесса.

С другой стороны, уравнения (35), (36) в отличие от (3) не содержат явной зависимости от начальной точки $\boldsymbol{a}$. Поэтому переход от уравнения для $\tilde{p}_1$ к уравнению для $\tilde{\theta}$ (т. е. переход от (3) к (15)) был возможен только в асимптотическом режиме $t-t_0 \gg \tau$, когда зависимостью от $\boldsymbol{a}$ в кинетических коэффициентах (2), (3) можно пренебречь (см. разд. 2). Отметим, что в (35) и (36) память о начальном состоянии в этих коэффициентах все же сохранена: они зависят от t_0. Но при $t-t_0 \gg \tau$ $D(k, t-t_0) \to D(k)$.

В одном важном частном случае переход от (3) к (15) осуществляется при всех t, а именно: для нормального распределения смещений $\xi_i = x_i - a_i$ в однородной турбулентности. Тогда p_1 удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} p_1 = D_т(t-t_0)\Delta p_1, \tag{37}$$

и для $\bar{\theta}$ (а также для $\tilde{\tilde{\theta}}$) имеет место такое же уравнение (в (35) $D(k, t-t_0) = D_т k^2$). Поскольку (37) имеет вид ОУКФП, то согласно второй теореме Павулы [1] уравнения для p_n тоже являются ОУКФП (но сами распределения p_n не являются нормальными). Итак, ОУКФП (24), (25) заведомо справедливы для реальной турбулентности, если функция распределения p_1 описывает нормальный процесс. Следует подчеркнуть, что нормальность процесса p_1 никак не связана с тем, является ли турбулентность близкой к марковскому процессу или нет. Различие будет проявляться только во времени установления асимптотического режима: если $\tau \ll l/v$, то это время как для коэффициента $D_т$ в (37), так и для всех кинетических коэффициентов в (24), (25) мало (и равно τ).

Известно, что для марковских процессов уравнение КФП отвечает непрерывному процессу, а интегральное уравнение Колмогорова—Феллера — скачкообразному случайному процессу. Естественно ожидать, что такая же ситуация имеет место в общем случае, т. е. непрерывный процесс (каковым является турбулентность) описывается ОУКФП (см. [3]). Физически ОУКФП соответствует «локальности», т. е. связи функции распределения $p_n(x, t+\Delta t)$ с $p_n(x, t)$ через p_n в самой точке x и ее окрестности через конечное число пространственных производных. Это естественно для непрерывного процесса; при наличии разрывов локальность не соблюдается и связь между $p_n(t+\Delta t)$ и $p_n(t)$ интегральная.

С другой стороны, можно показать, что интегральное уравнение для p_2 (а значит, для всех p_n) дает неправильное поведение двух близких жидких частиц в турбулентной жидкости [5]. Во всяком случае, в асимптотическом режиме описание турбулентности с помощью ОУКФП (24), (25) становится еще более естественным. Дело в том, что при больших значениях $t-t_0$ вероятность перехода Q в (1) очень слабо зависит от старого момента t_0. Пренебрежение этой зависимостью приводит к тому, что (1) превращается в уравнение Смолуховского. Можно сказать, что в асимптотическом режиме рассматриваемый процесс близок к некоторому марковскому, описываемому уравнением Смолуховского. И действительно, смещение жидкой частицы (или двух частиц) при очень больших $t-t_0$ теряет информацию о соотношении между τ и l/v (хотя эйлерова скорость $\boldsymbol{v}$, конечно, это соотношение сохраняет).

Важнейшим выводом, следующим из теории ОУКФП, является универсальность уравнений (24), (25) для многочастичных функций распределения в асимптотическом режиме (см. разд. 3). Это означает, что поведение всех p_n и $\tilde{p}_n$ определяет один тензор $T_{ij}(^{\alpha}\boldsymbol{x}, {}^{\beta}\boldsymbol{x})$ (в частности, $D_т$ в (37) определяется как $D_т = (1/3)T_{ii}(^1\boldsymbol{x}, {}^2\boldsymbol{x})$). Следовательно, измерение динамики положения двух жидких частиц в турбулентности достаточно для получения всех многоточечных функций p_n или, по меньшей мере, для проверки самой теории ОУКФП. Не менее существенной является возможность нахождения уравнения для пассивных векторных полей с помощью (24). Так, в [6] получены уравнения для усредненных характеристик магнитного поля $\boldsymbol{H}$. Причем уравнение для $\overline{\boldsymbol{H}}$ получается из (24) для $\tilde{p}_2$, а уравнение для $\overline{H_i H_j}$ — из (24), выписанного для $\tilde{p}_4$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Pawula R. F. — IEEE, 1967, IT-13, № 1, p. 33.
2. Рытов С. М. Введение в статистическую радиофизику. Ч. 1. Случайные процессы. — М.: Наука, 1976.
3. Шапиро В. Е., Логинов В. М. Динамические системы при случайных воздействиях. — Новосибирск: Наука, 1983, гл. 2, § 2.
4. Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А. Теория вероятностей. — М.: Наука, 1967.
5. Вайнштейн С. И. Магнитная гидродинамика космической плазмы и токовые слои. — М.: Наука, 1985.
6. Вайнштейн С. И. — ЖЭТФ, 1982, 83, № 7, с. 161.

Сибирский институт земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн СО АН СССР

Поступила в редакцию 21 января 1985 г.

GENERALIZED KOLMOGOROV—FOKKER—PLANK EQUATIONS AND TURBULENCE THEORY

S. I. Vainshtein

The paper deals with generalized Kolmogorov—Fokker—Plank equation, describing scalar field behaviour in a turbulent medium. The corresponding equations for one, two etc. point distribution function for Lagrangian liquid particles have been derived.

ГЕОМАГНЕТИЗМ И АЭРОНОМИЯ, т. XXV, № 5, 1985 г.

(Окончание)

Гельберг М. Г.. Волков Н. Н., Кукушкина Р. С., Рябчук С. К. Спектральная зависимость поглощения космических радиошумов в высокоширотной ионосфере.

По данным измерений риометрического поглощения на частотах 9—40 *МГц* показано, что в некоторых интервалах радиочастот спектр поглощения оказывается более крутым, чем допускает теория, основанная на учете парных соударений электронов. Этот результат интерпретирован, как дополнительное поглощение космических радиошумов плазменной турбулентностью.

Мартыненко С. И., Пушин В. Ф. Влияние искусственной неадиабатической неоднородности на рефракционный ввод коротких радиоволн в ионосферный волновод.

В геометрооптическом приближении рассмотрен ввод коротких радиоволн в ионосферный межслоевой канал при возмущении ионосферы мощным КВ-излучением. Получено, что максимальный сектор углов излучения для захваченных лучей составляет $\sim 0{,}3°$ при размерах зон на поверхности Земли, из которых можно возбудить волновой канал порядка 100—300 *км*. Для частот больше МПЧ E эффект захвата исчезает из-за отсутствия скользящих лучей.

Руденко Г. В. Возбуждение ионосферного МГД-волновода подземными токами в зоне подготовки землетрясений.

Изучается генерация волноводных МГД-колебаний в слое $F2$ ионосферы переменными токами, расположенными над поверхностью Земли и под поверхностью Земли. Рассматриваются низкочастотные источники, приводящие к квазистационарным полям, колеблющимся с частотой ~ 1 *Гц*. Приведен численный метод, позволяющий для конкретных моделей ионосферы связывать параметры источника с амплитудой генерируемого сигнала.
