

УДК 519.64:537.874

МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ДЛЯ ЗАДАЧ РАССЕЯНИЯ ВОЛН НА ДИЭЛЕКТРИКАХ

С. П. Куликов, А. Б. Самохин

Показана возможность использования модифицированного метода последовательных приближений для задач рассеяния электромагнитных волн на произвольных локально-неоднородных диэлектрических и плазменных образованиях. Доказана эффективная сходимость метода для неактивных сред с $\text{Im } \epsilon < 0$. Приводятся решения конкретных электродинамических задач.

1. Пусть в свободном пространстве имеется область V с заданным, достаточно произвольным распределением диэлектрической проницаемости $\epsilon(\mathbf{r})$, а магнитная проницаемость во всем пространстве $\mu = \mu_0 = \text{const}$. Обозначим поле, создаваемое сторонними токами в отсутствие среды, $\mathbf{E}^{\text{перв}}$. Задача состоит в определении полного поля $\mathbf{E} = \mathbf{E}^{\text{перв}} + \mathbf{E}^{\text{расс}}$, состоящего из первичного и рассеянного поля, во всем пространстве. Ниже зависимость от времени предполагается в виде множителя $\exp(i\omega t)$.

Представим относительную диэлектрическую проницаемость в виде

$$\epsilon(\mathbf{r}) = 1 + i\lambda g(\mathbf{r}), \tag{1}$$

где λ — комплексный параметр, действительная функция координат — $g(\mathbf{r}) > 0$.

Для полного поля \mathbf{E} может быть получено интегральное уравнение [1]

$$\mathbf{E} - \lambda A\mathbf{E} = \mathbf{E}^{\text{перв}}, \tag{2}$$

где A — линейный интегральный оператор вида

$$A\mathbf{E} = i \int_V \{ k_0^2 g(\mathbf{q}) \mathbf{E}(\mathbf{q}) G(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + g(\mathbf{q}) (\mathbf{E}(\mathbf{q}), \text{grad}_p) \text{grad}_p G(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \} d\mathbf{v}_q. \tag{3}$$

Здесь $k_0 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ — волновое число в свободном пространстве, $G(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ — функция Грина свободного пространства, имеющая вид

$$G(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \begin{cases} \frac{\exp(-ik_0 R)}{4\pi R} & \text{в трехмерном случае} \\ -\frac{i}{4} H_0^{(2)}(k_0 R) & \text{в двумерном случае} \end{cases},$$

где $R = |\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_q|$ — расстояние между точкой наблюдения и точкой истока, $H_0^{(2)}$ — функция Ханкеля второго рода нулевого порядка.

Интегральное уравнение (2), (3) учитывает как граничные условия, так и условия излучения на бесконечности и остается справедливым в случае присутствия резких границ раздела в среде [2].

Строгое решение (2), (3) возможно только в однофазной среде, границы раздела которой совпадают с координатными кривыми. В об-

щем случае задача может быть исследована только численно, при наличии эффективных методов решения.

Для численного решения уравнения (2), (3) покроем область V сеткой с количеством узлов N . Не останавливаясь пока на тонкостях перехода от интегрального уравнения к системе линейных алгебраических уравнений [1], отметим следующее. В общем трехмерном случае в результате получится система $3N$ линейных алгебраических уравнений относительно составляющих вектора E в узлах сетки. При решении этой системы на ЭВМ прямыми методами (метод Гаусса, Краута и др.) число требуемых арифметических операций $\sim (3N)^3$ [3]. Другим ограничивающим фактором при решении систем линейных алгебраических уравнений с помощью прямых методов является большой объем необходимой оперативной памяти ЭВМ. В результате этого современные ЭВМ не могут решать системы с комплексными матрицами, порядок которых превосходит 100—200.

В связи с этими ограничениями до настоящего времени были получены решения объемного интегрального уравнения (2), (3) только для тонких диэлектрических оболочек в скалярном двумерном случае [4].

Итерационные методы решения (2), (3), в случае если сходимость достаточно быстрая, более эффективны как с точки зрения экономии машинного времени, так и оперативной памяти ЭВМ. Так, для метода последовательных приближений, реализованного в виде ряда простой итерации, число требуемых арифметических операций пропорционально уже квадрату порядка системы: $\sim m(3N)^2$, где m — число итераций. При больших величинах N ($N > 100$), которые возникают при решении двумерных и трехмерных задач и относительно небольших величинах m , преимущество быстро сходящегося ряда приближений очевидно. Кроме того, при использовании метода последовательных приближений нет проблем, связанных с устойчивостью решения и возникающих при использовании прямых методов [3], так как итерирующие операторы являются сжимающими.

Однако у классического метода последовательных приближений есть существенный недостаток — ограниченный круг сходимости ряда. Этот круг сходимости для рассматриваемых задач, как будет показано ниже, весьма мал, что объясняет отсутствие в литературе работ, посвященных решению (2), (3) с помощью метода последовательных приближений. В данной работе для решения (2), (3) используется модифицированный метод последовательных приближений, который легко реализуется в виде ряда простой итерации и, как показано ниже, сходится для всех неактивных сред с $\text{Im } \epsilon < 0$. Для расширения области сходимости метода последовательных приближений существенно используются свойства спектра интегрального оператора (3).

2. Проанализируем область расположения на комплексной λ -плоскости характеристических чисел оператора (3).

Свойства оператора (3) существенно зависят от размерности задачи и вида поляризации поля. Так, в двумерном ($\partial/\partial z = 0$) скалярном случае E -поляризации ($E = \hat{z} \cdot E$) второе слагаемое в (3), в котором присутствуют производные от двумерной функции Грина, пропадает. Двумерный интегральный оператор становится вполне непрерывным оператором с квадратично суммируемым на двумерной области ядром. Множество $\{\lambda_n\}$ характеристических чисел такого оператора дискретно, и их можно перенумеровать в порядке возрастания модуля, начиная с наименьшего: $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots$ [5].

В двумерном случае H -поляризации ($E = \hat{x}E_x + \hat{y}E_y$), а также в общем трехмерном случае оператор (3) является сингулярным оператором, существующим в смысле главного значения. В нем в неявной форме присутствует δ -функция, которую можно выделить явно, задавая геометрию исключаемого объема вокруг точки наблюдения [6].

Несмотря на эти различия удастся установить важное свойство локализации характеристического множества $\{\lambda_v\}$ в определенной части комплексной λ -плоскости во всех указанных случаях.

Согласно теореме единственности [7], в области $\text{Im } \varepsilon < 0$ решение краевой задачи для уравнений Максвелла или, что эквивалентно, уравнения (2), (3) существует и единственно, а также непрерывно зависит от возбуждающего поля $E^{\text{перв}}$. Значит, учитывая (1), в качестве области расположения неособенных значений оператора (3) может быть принята полуплоскость $\text{Re } \lambda < 0$, а также круг $|\lambda| < |\lambda_1|$, где λ_1 — наименьшее по модулю характеристическое число оператора (3).

Дальнейшую детализацию свойств спектра оператора (3) можно провести, учитывая физические резонансные явления, которые существуют в двумерном случае H -поляризации и в трехмерном случае. Им соответствует значение $\varepsilon = 0$, которое определяет плазменный резонанс, а также квазистатические плазменные резонансы [8]. Рассматривая однородную среду, т. е. полагая $g(\mathbf{r}) \equiv 1$ в (1), получим характеристическое число $\lambda = i$, которое соответствует значению $\varepsilon = 0$. Ниже него на мнимой оси $\text{Im } \lambda$ находится область неособенных значений оператора.

В скалярном случае E -поляризации резонансные явления при $\text{Im } \varepsilon = 0$ неизвестны, поэтому в этом случае вся ось $\text{Re } \lambda = 0$ принадлежит области неособенных значений оператора (3) для любой функции $g(\mathbf{r}) > 0$ в (1) — (3).

Рассмотрим сначала более детально этот скалярный случай E -поляризации. Из изложенного выше следует, что в этом случае в качестве области локализации характеристического множества, за исключением, быть может, характеристических чисел, асимптотически приближающихся к мнимой оси, может быть принята область

$$\text{Re } \lambda_v \geq a, \quad a > 0. \quad (4)$$

Таблица 1

$k_0 R$	λ_1	λ_2	λ_3
0,25	9,16—10,31 <i>i</i>	2,86—89,51 <i>i</i>	10—250 <i>i</i>
0,5	3,76—2,52 <i>i</i>	2,45—20,82 <i>i</i>	4—60 <i>i</i>
1	1,61—0,26 <i>i</i>	1,75—4,36 <i>i</i>	1,5—13 <i>i</i>
2	0,64+0,40 <i>i</i>	0,99—0,55 <i>i</i>	0,8—2,2 <i>i</i>
π	0,56+0,16 <i>i</i>	0,28+0,60 <i>i</i>	—

В табл. 1 представлены первые характеристические числа λ_1 , λ_2 , λ_3 оператора (3) в случае, когда область V — однородный круг радиуса R . Характеристические числа определены с помощью степенного метода, алгоритм которого получен в результате небольшой переделки основного итерационного алгоритма, описанного ниже.

Из табл. 1 следует, что в качестве величины a из (4) в двумерном скалярном случае для небольших областей V может быть принята величина $a = \text{Re } \lambda_1$.

В двумерном случае H -поляризации и в трехмерном случае характеристические числа оператора (3) также можно считать расположенными в полуплоскости, отстоящей на конечное расстояние от начала $\lambda = 0$. Однако в отличие от ранее рассмотренного случая граница этой полуплоскости составляет с мнимой осью $\text{Im } \lambda$ некоторый угол $\varphi \neq 0$ и проходит через точку $\lambda = i$. Для единства дальнейшего изложения сохраним эту полуплоскость с правой полуплоскостью (4) путем поворота λ -плоскости на угол φ . При этом в исходном уравнении достаточно сделать эквивалентную замену $\lambda^* = \lambda \exp(-i\varphi)$, $A^* = A \exp(i\varphi)$.

Найденная область локализации характеристического множества оператора (3), которая приводится к полуплоскости (4), используется при построении быстро сходящегося ряда последовательных приближений для решения исходной задачи.

3. Известно, что решение уравнения (2) можно представить в виде ряда последовательных приближений (ряда Неймана) в случае, если $|\lambda| < |\lambda_1|$ [9]:

$$E = (I - \lambda A)^{-1} E^{\text{перв}} = \sum_{m=0}^{\infty} (\lambda A)^m E^{\text{перв}}. \quad (5)$$

В [9] описан способ расширения области сходимости (5) на всю область неособенных значений оператора A , в случае если начало $\lambda=0$ принадлежит этой области. Способ основан на аналитическом продолжении ряда Неймана путем замены переменной λ на переменную η с помощью конформного преобразования области неособенных значений на плоскости λ в единичный круг на плоскости η . В общем случае такой способ продолжения приводит к сложным операторным рядам по степеням переменной η , однако в случае, если характеристическое множество оператора локализовано в полуплоскости (4), такая замена переменной приводит снова к ряду простой итерации. Ряд простой итерации использует на каждом шаге только первую степень оператора и, таким образом, предельно алгоритмичен.

Проведем в (5) следующую замену переменных:

$$\eta = \lambda / (\lambda - 2a), \quad \lambda = -2a\eta / (1 - \eta). \quad (6)$$

Преобразование (6) переводит полуплоскость $\text{Re } \lambda < a$ в единичный круг $|\eta| < 1$. Будем считать всю полуплоскость $\text{Re } \lambda < a$ областью неособенных значений оператора A . Случай, когда асимптотическое поведение характеристических чисел не укладывается в рамки этого допущения, не приводит к значительному ухудшению сходимости модифицированного ряда.

С учетом (6) обратный оператор в (5) может быть представлен в следующем виде:

$$(I - \lambda A)^{-1} = (1 - \eta) (I - \eta B)^{-1} = (1 - \eta) \sum_{m=0}^{\infty} (\eta B)^m, \quad (7)$$

где $B = I - 2aA$, I — единичный оператор.

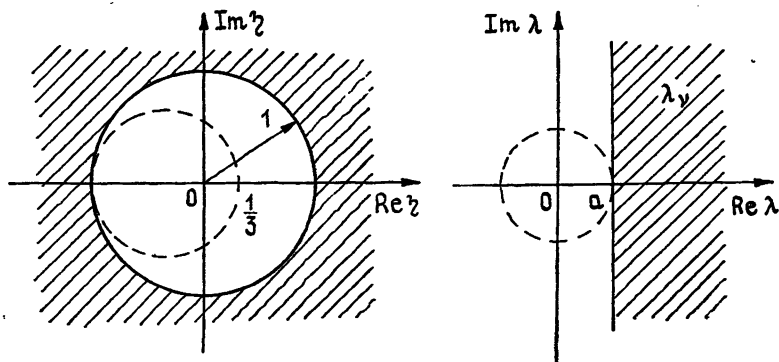


Рис. 1.

В области неособенных значений операторов A и B , т. е. в круге $|\eta| < 1$ на плоскости η , получаем в (7) сходящийся ряд Неймана для оператора $(I - \eta B)^{-1}$. Таким образом, подставляя в (7) выражение для η из (6), получаем для $\text{Re } \lambda < a$ сходящийся ряд простой итерации:

$$(I - \lambda A)^{-1} = \frac{2a}{2a - \lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\lambda \frac{2aA - I}{2a - \lambda} \right)^m. \quad (8)$$

На рис. 1 представлено преобразование (6) в случае, если характеристическое множество содержится в полуплоскости (4). Пунктирной линией показан круг сходимости обычного метода последовательных приближений (5).

К ряду (8) приводит также подход, основанный на определении оптимальных условий сходимости модифицированного метода последовательных приближений [10] при условии, что характеристическое множество оператора расположено в области (4).

4. Проиллюстрируем рассмотренную теорию на примере решения двумерных скалярных задач рассеяния электромагнитных волн E -поляризации ($E^{ncps} = \overset{\Delta}{z}E$, $\partial/\partial z = 0$) на неоднородных диэлектрических и плазменных образованиях, сравнимых по размеру с длиной падающей волны.

Сведение интегрального уравнения (2), (3) к системе линейных алгебраических уравнений (а точнее, пошаговое определение коэффициентов этой системы, так как вся матрица коэффициентов одновременно в данном решении не участвует) аналогично приведенному в работе [4]. При этом используется расчетная сетка, обеспечивающая равномерную по всей области V аппроксимацию задачи.

На рис. 2 приведена зависимость эффективного сечения рассеяния $k_{0\sigma}$ кругового однородного диэлектрического цилиндра радиуса $k_0R = \pi$ от направления приема излучения φ . Отсчет ведется от направления распространения падающей плоской волны. Для однородного тела принимается $gV(\vec{r}) = 1$. Параметр диэлектрической проницаемости для кривой 1 — $\lambda = -1$ ($\epsilon = 1 - i$), что выходит за границы круга сходимости ряда Неймана (согласно табл. 1 радиус сходимости ряда Неймана в этом случае $\sim 0,6$). Для расчета использовалась сетка с количеством узлов $N = 48$. Точность решения, полученного на основе ряда (8), оценивалась по среднеквадратичному отклонению поля в области V от точного решения, полученного методом собственных функций. Для достижения 2% точности решения необходимо шесть итераций ряда (8). При этом время решения на ЭВМ БЭСМ-6 ~ 10 с.

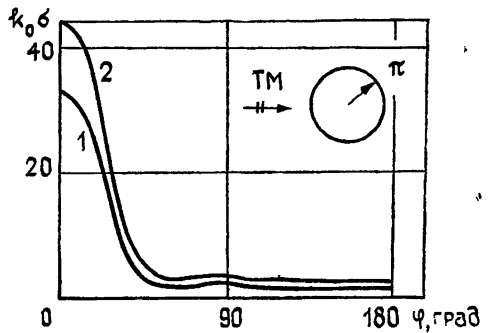


Рис. 2.

Кривая 2 соответствует случаю $\lambda = -2$, т. е. $\epsilon = 1 - 2i$. Заданная точность достигается за пятнадцать итераций ряда (8).

На рис. 3 представлена зависимость сечения рассеяния для цилиндра с неоднородной по двум координатам проницаемостью, для которого может быть получено строгое решение [11]. Распределение диэлектрической проницаемости в сечении цилиндра имеет вид

$$\epsilon(r, \varphi) = \frac{\epsilon_1 u_1 + \epsilon_2 u_2}{u_1 + u_2} = \frac{u_2(r, \varphi)}{u_1(r, \varphi) + u_2(r, \varphi)}.$$

Здесь u_1 — поле в сечении однородного цилиндра радиуса R с $\epsilon = \epsilon_1 = 0$ при падении на него плоской волны

$$u_1 = E = 2i \sum_{m=0}^{\infty} (-i)^m \frac{a_m}{\pi k_0 R} \left(\frac{r}{R}\right)^m \frac{\cos m\varphi}{H_{m+1}^{(2)}(k_0 R)}$$

$$(a_0=1, a_m=2 \text{ при } m \neq 0),$$

$u_2 = \exp(-ik_0 r \cos \varphi)$ — падающая плоская волна (поле в сечении однородного цилиндра с $\varepsilon = \varepsilon_2 = 1$).

Строгое решение имеет вид

$$E = (u_1 + u_2)/2.$$

Ряд (8) для данной задачи (радиус цилиндра $k_0 R = \pi$) сходится с графической точностью (по среднеквадратичному отклонению поля между соседними итерациями) в течение 8—10 итераций, однако сходится к решению, которое отличается от истинного на величину, пропорциональную точности аппроксимации задачи. На рис. 3 показана сходимость приближенного решения (пунктирная кривая) к строгому (сплошная кривая) в зависимости от числа узлов сетки N .

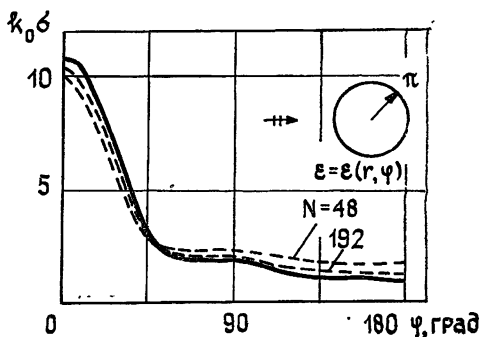


Рис. 3.

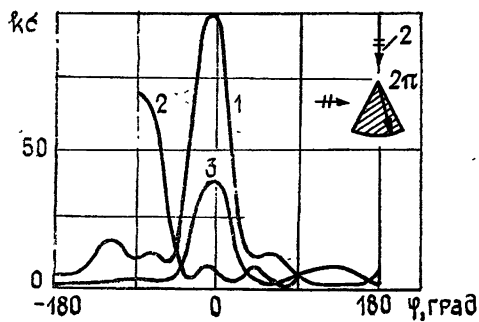


Рис. 4.

На рис. 4 представлен расчет рассеяния плоской волны на однородном диэлектрическом цилиндрическом секторе (призме) радиуса $k_0 R = 2\pi$ и с углом при вершине $\alpha = 60^\circ$. Кривые 1 и 3 соответствуют падению плоской волны перпендикулярно оси симметрии призмы, кривая 2 — параллельно. Кривые 1 и 2 соответствуют диэлектрику без потерь $\lambda = -3i$ ($\varepsilon = 4$), для кривой 3 — $\lambda = -3$ ($\varepsilon = 1 - 3i$). Диэлектрику без потерь соответствует меньшая скорость сходимости. Это ясно также из рис. 1, так как чисто мнимые значения параметра λ ближе располагаются к области локализации характеристических чисел. При падении плоской волны перпендикулярно оси симметрии призмы заметно отклонение главного лепестка диаграммы рассеяния в сторону основания призмы, что при данных размерах области является проявлением лучевых законов распространения волн.

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев Е. Н. В кн.: Сб. научно-методических статей по прикладной электродинамике. — М.: Высшая школа, 1977, вып. 1, с. 94.
2. Хижняк Н. А. — ЖТФ, 1958, 28, вып. 7, с. 1592.
3. Вычислительные методы в электродинамике. / Под ред. Р. Митры. — М.: Мир, 1977.
4. Richmond I. H. — IEEE Trans., 1965, AP-13, № 3, p. 334.
5. Забрейко П. П. и др. Интегральные уравнения. — М.: Наука, 1968.
6. Иаджиан А. Д. — ТИИЭР, 1980, 68, № 2, с. 62.
7. Федоров Н. Н. Основные электродинамики. — М.: Высшая школа, 1980.
8. Гильденбург В. Б., Жидко Ю. М., Кондратьев И. Г., Миллер М. А., — Изв. вузов — Радиопизика, 1967, 10, № 9—10, с. 1358.

9. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. — М.: Гостехиздат, 1950.
10. Самохин А. Б. — ЖВММФ, 1973, 13, № 6, с. 1402.
11. Куликов С. П., Самохин А. Б. — Изв. вузов — Радиоэлектроника, 1980, 23, № 2, с. 103.

Московский институт радиотехники,
электроники и автоматики

Поступила в редакцию
13 февраля 1984 г.,
после доработки
22 октября 1984 г.

SUCCESSIVE APPROXIMATION METHOD IN PROBLEMS OF WAVES SCATTERING

S. P. Kulikov, A. B. Samokhin

Modified successive approximation method is used in problems of electromagnetic waves scattering by arbitrary local inhomogeneous dielectric and plasma bodies. Effective convergence of the method is proved for a non-active media with $\text{Im } \epsilon < 0$. Solutions of some electromagnetic problems have been presented.

ГЕОМАГНЕТИЗМ И АЭРОНОМИЯ, т. XXV, № 2, 1985 г.

(Окончание)

Клейменова Н. Г. Субавроральные ОНЧ—КНЧ-излучения и главный ионосферный провал.

По материалам наблюдений ОНЧ-излучений в сопряженных точках Согра—Кергелен показано, что вероятность появления на земной поверхности всплесков хоров и шипений связана с положением проекции плазмопаузы и главного ионосферного провала. На ионосферных высотах провал является пространственной границей между ОНЧ-излучениями типа хоров и шипений.

Истомин Я. Н., Похотелов О. А., Хабазин Ю. Г. Генерация километрового радиоизлучения Земли в авроральной каверне.

Рассматривается механизм генерации аврорального километрового радиоизлучения Земли (АКР), в котором оно возникает как результат трансформации потенциальной волны в неоднородном геомагнитном поле. Исходная волна усиливается из-за взаимодействия с пучками высыпающихся электронов. В рамках механизма естественно объясняются частота и место генерации АКР, его поляризация и переменность.
