ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXIX, № 1 РАДИОФИЗИКА 1986

УДК 511.218:523.164:621.396:812.32

О ПОСТРОЕНИИ СИСТЕМ АПЕРТУРНОГО СИНТЕЗА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РАЗНОСТНЫХ МНОЖЕСТВ

Л. Е. Копилович

Рассмотрен вопрос об оптимизации размещения приемных элементов на апертуре в системах апертурного синтеза. Для этой цели предлагается применить метод, основанный на использовании зингеровских разностных множеств. Показано, что при этом избыточность заполнения апертуры может быть существенно уменьшена по сравнению с ныне действующими системами.

1. При создании систем параллельного апертурного синтеза [1] с бо́льшими размерами апертуры важное значение приобретает вопрос об уменьшении числа приемных элементов K при сохранении возможности получения полной информации в заданной области пространственных частот D_f. При этом избыточность заполнения апертуры приемными элементами характеризуется отношением числа интервалов между элементами к числу различных интервалов между целочисленными точками области D на апертуре, соответствующей заданной области D_f (связь между областями D_f в (u, v)-плоскости и D на апертуре показана на рис. 1 в [1]). Так как первое из этих чисел пропорционально K^2, а второе — площади S области D, то в качестве характеристики избыточности заполнения апертуры естественно принять безразмерную величину $\alpha = K/\sqrt{S}$. В известных системах с равноотстоящими вдоль прямых линий элементами, таких, как T-система и подобных ей [1], $\alpha \simeq 3$ (поскольку если в одном плече T-системы содержится n элементов, то общее количество элементов в ней $\simeq 3n$, а $S = n^2$).

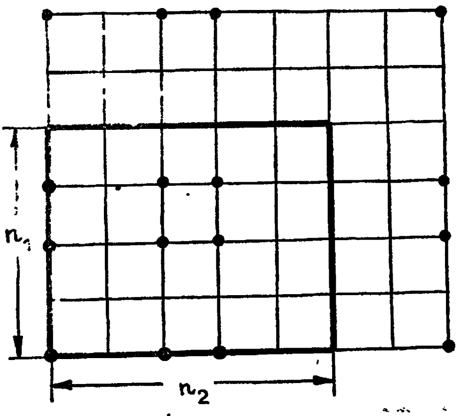

Рис. 1.

В настоящей работе рассматривается способ неэквидистантного расположения приемных элементов на апертуре, при котором $\alpha < 3$, — в местах, соответствующих элементам двумерного базиса.

2. Введем определение базиса. Пусть мы имеем двумерную целочисленную решетку D прямоугольной формы со сторонами n_1, n_2. Интервалы между узлами решетки считаются равными, если отрезки, соединяющие узлы, равны и параллельны. Разностным базисом (или просто базисом) для решетки D назовем совокупность целочисленных точек (могущих частично располагаться вне решетки), такую что любой интервал между узлами решетки имеет равный себе среди множества интервалов между точками (элементами) базиса. Это определение является естественным обобщением понятия базиса в одномерном случае [2], когда интервалы представляют собой разности между элементами. Пример базиса для двумерной решетки приведен на рис. 1. Точ-

ки, выделенные на рисунке, образуют базис для решетки со сторонами n_1, n_2, поскольку для любого интервала между узлами решетки имеется равный ему интервал между элементами базиса (часть элементов базиса расположена на апертуре за пределами решетки).

На рис. 1 видно, что элементы двумерного базиса для решетки, расположенные по осям координат, сами образуют одномерные базисы для сторон решетки. И в общем случае базис для прямоугольной решетки может быть построен с помощью базисов для ее сторон. Для этого через все точки — элементы базисов для сторон, ориентированных вдоль осей координат, проводятся прямые параллельно осям. Точки на пересечениях линий полученной сетки образуют базис для $n_1 \times n_2$-решетки с числом элементов $K = k_1 k_2$, где k_1 и k_2 — числа элементов в одномерных базисах для сторон решетки и $\alpha = \alpha_1 \alpha_2$, где $\alpha_i = k_i/\sqrt{n_i}$ $(i = 1, 2)$ — характеристики избыточности заполнения линейных апертур, на которых построены эти стороны.

Таким образом, задача построения двумерного базиса может быть сведена к одномерному случаю.

3. Методика построения базиса в одномерном случае разработана в [2, 3]. При этом следует различать два случая. Первый — когда элементы базиса частично располагаются вне отрезка, для которого этот базис строится, и второй — когда элементы базиса принадлежат этому отрезку. Рассмотрим вначале первый случай.

В [2] предложен способ построения базиса для отрезка сколь угодно большой длины с помощью базиса для отрезка небольшой длины и разностного множества. Разностным множеством [4] называется множество из $q+1$ числа $0 = b_1 < b_2 < , \ldots , b_{q+1} < q^2 + q + 1 = m$ (где $q = p^r$ — степень простого числа) — такое, что любое целое число ν, $0 < \nu \leqslant m - 1$, может быть представлено единственным образом либо в виде $\nu = b_i - b_j$, либо в виде $\nu = m + b_j - b_i$, где $i > j$, b_i, b_j — элементы разностного множества. Существование разностных множеств для любого $q = p^r$ следует из теоремы Зингера [4]; один из способов их построения описан в [5]. В [2, 3] показано, что если $\{a_i\}$—исходный базис для отрезка $[0, u]$, а $\{b_i\}$ — разностное множество, то множество чисел $\{a_i m + b_j\}$ $(i = 1, \ldots, k(u);\ j = 1, \ldots, q+1)$ с диапазоном изменения от 0 до $mu + b_{q+1}$ образует базис для отрезка $[0, n]$, где $n = mu + m - b_{q+1} - 1$ $(n < mu + b_{q+1})$. Для построения базиса из $k(n) = k(u)(q+1)$ элементов с наибольшим, при этом способе, значением n нужно использовать разностное множество с наименьшей величиной b_{q+1}. Для этого можно воспользоваться таблицей из [6], где приведены эти множества для значений $q \leqslant 47$.

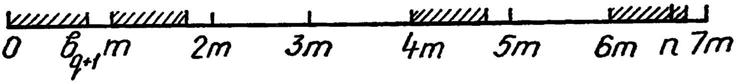

Рис. 2.

Рассмотрим пример. Пусть $q = 25$. Соответствующее разностное множество с наименьшим b_{q+1} имеет вид [6]: 0, 5, 17, 28, 36, 52, 62, 106, 136, 149, 174, 178, 234, 241, 243, 289, 292, 307, 329, 368, 382, 388, 409, 459, 491, $492 = b_{q+1}$; $m = 651$. В качестве исходного базиса возьмем $\{0, 1, 4, 6\}$. Для получения базиса для отрезка $[0, n]$, где $n = 6m + m - b_{q+1} - 1 = 4064$, надо к этой совокупности чисел добавить еще три с таким же количеством чисел в каждой, получаемые прибавлением ко всем этим числам величин m, $4m$ и $6m$. В итоге получим множество из 104 чисел. При этом $\alpha_{1n}^2 = 104^2/4064 \simeq 2{,}661$. Заметим, что прибавляя к элементам разностного множества величину $6m = 3906$, мы получим ряд чисел, больших n: 4398, 4397, ... — всего 16. Максимальное из них—$6m + b_{q+1}$ — выходит за пределы отрезка $[0, n]$ не более чем на величину $2b_{q+1} - m + 1 < m$, т. е. менее чем на одну шестую часть отрезка. Схема построенного базиса приведена на рис. 2; области расположения элементов базиса на ней заштрихованы.

4. Исследуем структуру системы разностей между элементами построенного базиса. Если в качестве исходного базиса взять $\{0, 1, 4, 6\}$, то наш базис будет состоять из четырех одинаковых разностных множеств, причем последующие множества сдвинуты относительно первого на m, $4m$, $6m$ соответственно. В системе разностей между элементами базиса кратными являются только C_{q+1}^2 разностей между элементами одного и того же разностного множества и шести разностей между элементами 0, m, $4m$ и $6m$; остальные же разности не повторяются. В самом деле, их можно записать в виде $a_i m+b_j-(a_l m+b_h)$, где a_i, $a_l=0,1,4,6$; $i\neq l$, $j\neq h$, и разбить на три группы вида $\{tm+b_j-b_h,\ tm+m+b_h-b_j\}$ с $t=1, 3, 5$. Внутри каждой из групп все числа различны между собой, согласно определению разностного множества, а сами группы сдвинуты друг относительно друга на $2m$ или $4m$, что больше максимальной разности между величинами одной группы. Таким образом, среди разностей (меньших n), образуемых произвольным элементом одномерного базиса x_0 с другими элементами, имеются неповторяющиеся, и, следовательно, из этого базиса нельзя исключить ни одного элемента.

Возьмем теперь произвольный элемент (x_0, y_0) двумерного базиса, построенного по предлагаемому способу. Среди проекций на оси координат интервалов между этим и другими элементами двумерного базиса есть неповторяющиеся разности для одномерных базисов, которые обозначим x_1-x_0 и y_1-y_0. Очевидно, что интервал между элементами двумерного базиса (x_0, y_0) и (x_1, y_1) является неповторяющимся. Поэтому из построенного двумерного базиса нельзя исключить ни одного элемента.

5. Изучим поведение величины α как функции числа элементов базиса. Будем считать область D квадратной (в этом случае базисы для ее сторон берем одинаковыми). Прежде всего отметим, что нижняя оценка для двумерных базисов, образуемых перемножением таких одномерных базисов, что из них нельзя исключить ни одного элемента, вытекает из оценки $\alpha_1\geqslant 1{,}56$ в одномерном случае [2,3] и имеет вид

$$\alpha\geqslant 2{,}434. \tag{1}$$

В нашем случае выражение для α можно записать в виде

$$\alpha=\alpha_{1n}^2=\frac{k^2(n)}{n}=\frac{k^2(u)}{u}\,\frac{(q+1)^2}{m+(m-b_{q+1}-1)/u}. \tag{2}$$

Исходный базис для отрезка $[0, u]$ — $\{0, 1, 4, 6\}$, который мы использовали ранее, является наиболее подходящим, так как среди базисов для отрезков небольшой длины он имеет наименьшее отношение $k^2(u)/u=$ $=8/3$. Если сделать грубую оценку в (2): $\alpha<(8/3)(1+q/m)$, то уже при $q=25$ получим, что $\alpha<2{,}77$, но, как следует из рассмотренного примера, такая оценка неудовлетворительна.

Зависимости величин α (светлые кружки) и n (темные кружки) от $q=p^r$ (где $k=4(q+1)$, $K=k^2$, $3\leqslant q\leqslant 47$), рассчитанные по формуле (2) при наименьших значениях b_{q+1}, приведены на рис. 3. Из рисунка видно, что величина α убывает, хотя и не вполне монотонно, от 2,96 при $q=4$ до $\sim 2{,}65$ при $q=47$; начиная с $q=17$ ($k=72$), α убывает очень медленно, и есть все основания полагать, что характер убывания сохраняется с ростом q, причем, согласно (1), α не может стать меньше, чем 2,434. Отметим, что в просчитанном диапазоне значений q число элементов на апертуре изменяется от 20×20 до 192×192, а n — от 135 до 14000 (при $q=3$, т. е. при $K=16\times 16$ — $\alpha=3{,}05$, $n=84$). Таким образом, рассматриваемый способ имеет смысл применять при больших размерах апертуры. Следует также отметить, что построение двумерного базиса осуществлено при квадратной форме области D

лишь для последовательности значений $K=[4(q+1)]^2$, где $q=p^r$ — степень простого числа. Однако с практической точки зрения это нельзя считать серьезным ограничением.

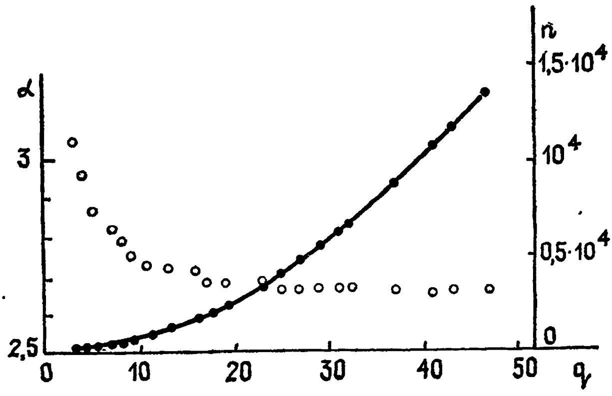

Рис. 3.

6. Для того чтобы иметь возможность сравнить полученные значения с оптимальными, нужно иметь нижнюю оценку для α, не зависящую от способа построения двумерного базиса. Для получения такой оценки применим методику, использованную в [2] в одномерном случае. Пусть $\{c_j\}_1^K$ — двумерный базис и β_j, γ_j — координаты точки c_j. Введем функцию $f(x, y)=\sum_{j=1}^{K}\exp[i(\beta_j x+\gamma_j y)]$. Тогда

$$|f(x, y)|^2=\sum_{j=1}^{K}\sum_{h=1}^{K}\exp[i(\beta_j-\beta_h)x]\exp[i(\gamma_j-\gamma_h)y]\geqslant 0. \tag{3}$$

Поскольку проекции элементов двумерного базиса на оси координат сами образуют одномерные базисы, то разности $\gamma_j-\gamma_h$ и $\beta_j-\beta_h$ независимо друг от друга принимают соответственно все значения ± 1, $\pm 2, \ldots, \pm n_i$ $(i=1,2)$, а значение нуль — одновременно K раз. Поэтому сумму в (3) можно записать в виде

$$K+4\sum_{j=1}^{n_2}\sum_{h=1}^{n_1}\cos(jx)\cos(hy)+R(x, y),$$

где $R(x, y)$ состоит из $K^2-4n_1n_2-K$ слагаемых. Заменяя каждое из этих слагаемых его максимальным значением — единицей, получаем из (3), что

$$K^2\geqslant 4n_1n_2\left(1-\frac{1}{n_1n_2}\sum_{j=1}^{n_2}\sum_{h=1}^{n_1}\cos(jx)\cos(hy)\right) \tag{4}$$

при любых x, y. В [3] отмечено, что из неравенства $k^2\geqslant 2n\left(1-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\cos(jx)\right)$ при любом x следует $k^2\geqslant 2n(1-\sin\theta/\theta)$ при любом θ. Аналогично из (4) следует неравенство

$$K^2\geqslant 4n_1n_2\left(1-\frac{\sin\theta}{\theta}\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right) \tag{5}$$

при любых θ, φ, и для получения нижней оценки для α нужно в (5) подставить минимальное значение $(\sin\theta/0)(\sin\varphi/\varphi)$, равное $-0{,}217$. В итоге получаем

$$\alpha\geqslant 2{,}206. \tag{6}$$

Если исходить непосредственно из (4), то можно найти нижнюю оценку для α как функцию от n_1, n_2; однако в просчитанном диапазоне значений $K=k^2$ она практически не отличается от (6).

Для оценки избыточности рассчитанные значения α, а также оценки (6) и (1) удобно сравнивать со значением α для идеального базиса, в котором все интервалы различны и покрывают прямоугольную $n_1 \times n_2$-решетку. Число различных интервалов в такой решетке равно

$$\frac{(2n_1+1)(2n_2+1)-1}{2} \simeq 2n_1 n_2 + (n_1+n_2) \simeq 2S$$

при больших размерах апертуры. Приравнивая $C_K^2=2S$, получаем, что в этом случае $\alpha \simeq 2$. Из оценки (6) следует, что такой идеальный — двумерный безызбыточный базис нереализуем и число элементов в любом двумерном базисе должно быть, по крайней мере, в 1,1 раза больше, т. е. избыточность всегда больше 10%. Согласно же оценке (1), избыточность любого двумерного базиса, построенного с помощью таких одномерных базисов, что из них нельзя исключить ни одного элемента, составляет более 21%.

Избыточность построенного нами двумерного базиса в просчитанном диапазоне значений K уменьшается с ростом K до 32—33% (при дальнейшем увеличении размеров апертуры уменьшение избыточности будет незначительным). Для сравнения укажем, что избыточность в T-системе составляет 50%. Заметим также, что системы с неэквидистантным расположением приемных элементов на апертуре имеют определенное преимущество по сравнению с T-системой и подобными ей, поскольку в этом случае избыточность рассредоточена по апертуре.

7. Коротко остановимся на случае, когда элементы базиса не выходят за пределы области D (такой базис называется ограниченным). Ограниченный одномерный базис для отрезка $[0, mu+b_{q+1}]$ можно получить из построенного в п.3 одномерного базиса, дополнив его элементами, обеспечивающими покрытие диапазона разностей от $mu+$ $+m-b_{q+1}$ до $mu+b_{q+1}$. Однако при этом избыточность заполнения апертуры увеличивается. Так, предложенная в [3] конструкция приводит к увеличению числа элементов базиса в полтора раза при одновременном удлинении отрезка, для которого от строится, не более чем на $1/u$-ю часть. В результате величина α_1 оказывается большей $\sqrt{3}$ и соответственно $\alpha>3$.

Вопрос о том, можно ли построить ограниченный базис с $\alpha<3$ для апертуры больших размеров, остается открытым.

8. Рассматриваемый способ может быть использован и в последовательном апертурном синтезе [1]. В этом случае также строится двумерный базис для решетки, и как неподвижные, так и подвижные приемные элементы должны располагаться на апертуре в местах, соответствующих элементам этого базиса. Так, неподвижные приемные элементы можно расположить в местах, соответствующих элементам одномерного базиса для одной из сторон решетки, а один подвижный приемный элемент перемещать на апертуре по местам расположения остальных элементов двумерного базиса, либо же подвижную линейную систему приемных элементов, идентичную такой неподвижной системе, перемещать параллельно ей с шагами, равными расстояниям между элементами одномерного базиса для другой стороны решетки.

В заключение автор выражает благодарность Л. Г. Содину за обсуждение работы и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Турчин В. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1983, 26, № 11, с. 1335.
2. Редеи Л., Реньи А. — Математический сб., 1949, 24, № 3, с. 385.
3. Leech J. — J. London Math. Soc., 1956, 31, pt. 2, № 122, p. 160.

4. Холл М. Комбинаторика. — М.: Мир, 1970.
5. Копилович Л. Е. — ДАН УССР. Сер. А, 1983, № 10, с. 55.
6. Свердлик М. Б. Оптимальные дискретные сигналы. — М.: Сов. радио, 1975.

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
7 марта 1984 г.,
в окончательном варианте
25 сентября 1984 г.

ON THE CONSTRUCTION OF THE APERTURE SYNTHESIS SYSTEMS USING DIFFERENCE SETS

L. E. Kopilovich

Optimization of disposition of receiving elements on the aperture in the aperture synthesis systems is considered. For this purpose a method is proposed in which the Singer difference sets are used. It is shown that in this case the redundancy of the aperture filling can be essentially decreased in comparison with systems operating now.

ИНФОРМАЦИЯ

ГЕОМАГНЕТИЗМ И АЭРОНОМИЯ, т. XXV, № 2, 1985 г.

Аннотации статей, представляющих интерес для читателей «Радиофизики»

Бахметьева Н. В., Бенедиктов Е. А., Бочкарев Г. С., Горохов Ю. В., Еременко В. А., Игнатьев Ю. А., Кольцов В. В., Крашенинников И. В., Лобачевский Л. А., Лянной Б. Е., Матюгин С. Н., Черкашин Ю. Н., Шавин П. Б. Изменение дистанционно-частотных характеристик наклонного зондирования в условиях искусственного возмущения верхней ионосферы.

Описываются постановка и результаты экспериментальных исследований влияния искусственно возмущенной области верхней ионосферы вертикальным мощным радиоизлучением на дистанционно-частотные характеристики сигналов, получаемых с помощью цифровых комплексов НЗ «Сойка» и «Базис». Выявлены устойчивые сигналы обратного рассеяния от возмущенной области. Обнаружен и интерпретирован эффект изменения МПЧ $F2$ среднеширотной трассы длиной 1100 *км*.

Власов В. И., Шишов В. И., Шишова Т. Д. Связь между вариациями индекса геомагнитной активности и параметров межпланетных мерцаний.

Рассмотрена корреляция между A_p-индексом геомагнитной активности, индексом межпланетных мерцаний и скоростью солнечного ветра в зависимости от пространственного положения исследуемых областей межпланетной плазмы. Показано, что индекс мерцаний может использоваться для прогнозирования геомагнитной активности, а скорость солнечного ветра для этих целей непригодна.

(Окончание см. с. 105).
