

УДК 534.1:621.371

ЧИСЛЕННОЕ СРАВНЕНИЕ ДВУХ АСИМПТОТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ ВОЛН В ПЛАВНО НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

А. С. Крюковский, Д. С. Лукин, Е. А. Палкин

Проведено численное сравнение методов канонического оператора Маслова (КОМ) и суммирования гауссовых пучков (СГП), используемых для описания дифракционной структуры волновых полей в сложных неоднородных средах. Анализ проведен на примере расчета амплитуды поля акустической волны, распространяющейся в неоднородном звуковом канале. Показано, что на оси звукового канала результаты расчетов методами КОМ и СГП совпадают с графической точностью. Однако вдали от оси применение метода СГП встречает определенные трудности. На основе результатов сравнения делается вывод о том, что метод КОМ лучше вскрывает механизм формирования дифракционных полей в областях фокусировки.

При решении в коротковолновом приближении задач дифракции и распространения волн в сложных неоднородных средах часто возникает проблема описания полей в областях фокусировки, где несправедлив традиционный лучевой (геометрооптический) подход. Как показывает практика таких расчетов, области фокусировки различного типа — обычное явление. Они реально существуют в ионосферных и тропосферных каналах радиосвязи, в подводных акустических каналах, в стекловолокне и т. п. Это делает задачу детального описания поля в них весьма актуальной.

В настоящее время поле в областях фокусировки наиболее полно описывается в рамках методов построения асимптотических решений, использующих быстроосциллирующие интегралы, и методом параболического уравнения (ПУ). Среди первой группы методов мы рассмотрим способ построения решения на основе канонического оператора Маслова (КОМ) [1, 2] с привлечением топологической классификации областей фокусировки и локального описания поля в них [3-7], поскольку практика решения нами подобных задач рекомендует именно этот метод. Мы проведем сравнение полученного нами численного решения с решением, построенным новым и перспективным методом — методом суммирования гауссовых пучков (СГП) [8-11].

Таким образом, в настоящей работе поставлена задача сравнить методы КОМ и СГП по конечному результату их применения в конкретной задаче, что позволит дать более полный ответ на вопрос об эффективности рассматриваемых методов в прикладных задачах, так как теоретические оценки эффективности, существующие в литературе, часто имеют довольно абстрактный характер и малосопоставимы. Мы воспользовались результатами работ [8, 9] как завершенным и наиболее полно опубликованным решением задачи методом СГП, где исследовалось распространение монохроматической звуковой волны, возбуждаемой точечным источником, расположенным на оси симметричного акустического волновода в плоскостной среде.

1. Постановка задачи. Асимптотическое решение в виде КОМ. Рассмотрим уравнение Гельмгольца, которое запишем в обозначениях, принятых в работах [8, 9]:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + \varepsilon M^2 \bar{G} = -2\pi \delta(x) \delta(y). \quad (1)$$

В отличие от цитируемых работ мы ввели безразмерные координаты x, y , что позволило в члене, характеризующем неоднородность среды, выделить большой параметр задачи M и эффективный показатель преломления ε . Тогда физические координаты задачи и профиль скорости звука $v(x, y)$ можно задать формулами

$$x_\Phi = xR, \quad y_\Phi = yR, \quad M = 700\sqrt{2}, \quad (2)$$

$$R = \sqrt{v(0, 0)/d} \approx 4525,6 \text{ м}, \quad \varepsilon = 1/(1+y^2)^2,$$

$v(0, 0) = 1492,25 \text{ м/с}$ — скорость звука на оси канала ($y=0$), d — параметр профиля скорости звука: $v(x_\Phi, y_\Phi) = v(0, 0) + dy_\Phi^2$.

Анализ лучевой структуры, отвечающей задаче (1), (2), показывает, что в таком акустическом канале возникает система вложенных фокальных, каустических структур типа «каустическое острие», центры которых (точки заострения) определяются координатами $r_n = \{x_n, y_n\} = \{n\pi/\sqrt{2}, 0\}$, $n=1, 2, \dots$. Далее мы ограничимся рассмотрением лишь первого каустического острья, показанного на рис. 1.

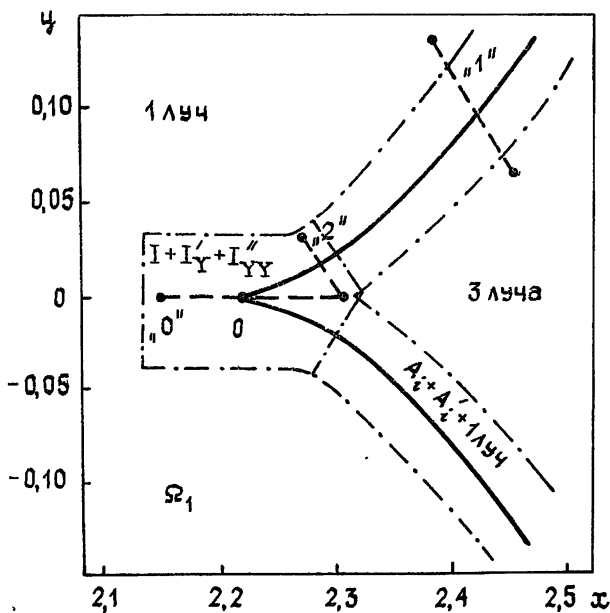


Рис. 1.

Из решений бихарактеристических (лучевых) уравнений задачи (1), (2) $\{x, y\}(\alpha, t)$, $\{k_x, k_y\}(\alpha, t)$, где α — угол выхода луча, а t — параметр вдоль луча, вытекает, что в области первого острья в соответствии с методом КОМ асимптотическое решение (1) следует записать в виде

$$G \cong \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} G_0 \sqrt{M \left| \frac{J_0}{\tilde{J}} \right|} e^{iM\mu} dk_y. \quad (3)$$

Здесь

$$J_0 = \det \left\| \frac{\partial(x, y)}{\partial(\alpha, t)} \right\|, \quad \tilde{J} = \det \left\| \frac{\partial(x, k_y)}{\partial(\alpha, t)} \right\|,$$

μ — эйконал, а k_x, k_y — безразмерные компоненты волнового вектора k .

Для определения G_0 удобно рассмотреть малую окрестность источника излучения, в которой $\varepsilon \simeq 1$. Тогда

$$\begin{aligned} x|_{t=t_0} &= t_0 \sin \alpha; & k_x|_{t=t_0} &= \sin \alpha = S; & |J_0| &= t_0 > 0 \\ y|_{t=t_0} &= t_0 \cos \alpha; & k_y|_{t=t_0} &= \cos \alpha = C; \end{aligned} \quad (4)$$

и, используя фундаментальное решение уравнения (1), получаем

$$G_0 = \frac{i\pi}{2} H_0^1(Mt_0) \simeq \frac{i\pi}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi Mt_0}} e^{i(Mt_0 - \pi/4)}. \quad (5)$$

Здесь H_0^1 — функция Ханкеля первого рода.

Перейдя в (3) к новой переменной интегрирования C , преобразуем выражение для $|J|$:

$$|\tilde{J}| = |S^2 C / q|, \quad q = \sqrt{\varepsilon - S^2}. \quad (6)$$

Подставляя теперь (4)–(6) в (3) и опуская постоянный фазовый множитель e^{iMt_0} , окончательно получаем асимптотическое решение уравнения (1) в виде

$$G \simeq \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\left| \frac{C}{qS^2} \right|} e^{iM\mu} dC, \quad (7)$$

где

$$\mu = Sx + \int_0^y \sqrt{\varepsilon(\xi) - S^2} d\xi + 2 \int_y^{y_{\max}} \sqrt{\varepsilon(\xi) - S^2} d\xi. \quad (8)$$

2. Волновое поле в областях одномерной фокусировки. Дальнейшее решение задачи — расчет по формуле (7) — требует проведения анализа поведения стационарных точек эйконала μ . Однако при известном решении бихарактеристической системы уравнений подобный анализ эквивалентен выделению окрестностей топологически различных каустик и зон их перекрытия. В соответствии с рис. 1 в данной задаче существуют три такие области:

1) Область каустического острья [5, 6]

$$G \simeq [l_1 I(X, Y) + l_2 (\partial I / \partial Y) + l_3 (\partial^2 I / \partial Y^2)] e^{i\Phi_I}, \quad (9)$$

$I(X, Y)$ — функция Пирси.

2) Область гладкой каустики и отдельного луча

$$\begin{aligned} G \simeq & [\tilde{l}_1 A_i(Z) + \tilde{l}_2 A_i'(Z)] e^{i\Phi_A} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} |Mq C \hat{\mu}_{(3)}^{(2)}|^{-1/2} \times \\ & \times \exp \left[i \left(M\mu_{(3)} + (\pi/4) \operatorname{sgn} \hat{\mu}_{(3)}^{(2)} \right) \right], \end{aligned} \quad (10)$$

где $A_i(z)$ — функция Эйри, $\hat{\mu}_{(k)}^{(2)} = \partial^2 \mu / \partial S^2$, $\mu_{(k)}$ — значение эйконала, вычисленное в отдельной (k -й) седловой точке.

3) Геометрооптическая область (трех- или однолучевая: $N=3; 1$)

$$G \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{\sqrt{|Mq C \hat{\mu}_{(k)}^{(2)}|}} \right) \exp \left[i \left(M\mu_{(k)} + \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} \hat{\mu}_{(k)}^{(2)} \right) \right]. \quad (11)$$

3. Метод локальной асимптотики. Результаты численного расчета. В работах [8, 9] приводятся результаты расчетов волнового поля вдоль двух отрезков, отмеченных на рис. 1 цифрами «0» и «1». На рис. 1 сплошной линией в безразмерных координатах x, y показаны нижняя

и верхняя ветвь каустики, сливающиеся в точке каустического острия $(\pi/\sqrt{2}, 0)$. Пунктиром и цифрами отмечены отрезки, вдоль которых в данной работе исследовалось волновое поле. Штрихпунктирной линией отмечены области, где целесообразно применение той или иной локальной асимптотики. Положения отрезков в пространстве x_Φ, y_Φ определяются уравнениями

$$\begin{aligned} \text{„0“} \quad & \begin{cases} x_\Phi = x_0 + T, & 0 \leq T \leq 700 \text{ м}; \\ y_\Phi = 0, & x_0 = 9720 \text{ м} \end{cases}; \\ \text{„1“} \quad & \begin{cases} x_\Phi = x_0 - \tilde{\alpha}T, & 0 \leq T \leq 450 \text{ м}; & \tilde{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y_\Phi = y_0 + \tilde{\alpha}T, & x_0 = 11100 \text{ м}; & y_0 = 300 \text{ м} \end{cases} \end{aligned} \quad (12)$$

Для сравнения с результатами работ [8, 9] мы рассчитали также волновое поле G вдоль этих отрезков. Отрезок «0» попадает в область действия формулы (9) (см. рис. 1 и Приложение I), где коэффициенты l_k и аргументы X, Y удобно определить методом локальной асимптотики [5, 6], а значения спецфункций $I(X, Y)$ и $A_i(Z)$ и их производных вычислить по программе, описанной в [12]. Согласно методу локальной асимптотики (ЛА), аргументы $X = (Y, X)$ и амплитудные множители l_k ищутся в виде степенных рядов разностей координаты точки наблюдения и координаты центра особенности. В нашем случае имеем

$$l_1 \approx l_1^{(0)} = \frac{1}{2} \Delta, \quad l_2 \approx l_2^{(0)} = 0, \quad l_3 \approx l_3^{(0)} = -\frac{1}{4} \Delta^3 \left(1 - \frac{1}{20} \frac{\mu^{(6)}}{\mu^{(4)}} \right),$$

$$\begin{aligned} X \approx -M & \left\{ \left\| \begin{array}{cc} 0 & \Delta \\ (1/2) \Delta^2 & 0 \end{array} \right\| \times \left\| \begin{array}{c} \Delta x \\ \Delta y \end{array} \right\| + \right. \\ & + \left\| \begin{array}{ccc} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{5} \frac{\mu^{(6)}}{\mu^{(4)}} \right) \frac{\Delta}{\mu^{(4)}} & 0 \\ \frac{\Delta^2}{4\mu^{(4)}} \left(3 - \frac{1}{5} \frac{\mu^{(6)}}{\mu^{(4)}} \right) & 0 & \frac{\Delta^2}{4\mu^{(4)}} \left(\frac{1}{280} \frac{\mu^{(8)}}{\mu^{(4)}} - \frac{1}{100} \left(\frac{\mu^{(6)}}{\mu^{(4)}} \right)^2 \right) \end{array} \right\| \times \\ & \left. \times \left\| \begin{array}{c} \Delta x^2 \\ \Delta x \Delta y \\ \Delta y^2 \end{array} \right\| \right\}, \end{aligned} \quad (13)$$

где $\Delta = (M|\mu^{(4)}|/4!)^{-1/4}$, $\mu^{(n)}$ — n -я производная эйконала по C , $\Delta x = x - x_0$, $x_0 = \pi/\sqrt{2}$, $\Delta y = y$. В (13) мы ограничились нулевым для l_k и вторым для X приближениями из тех соображений, что следующие поправки имеют порядок малости, выходящий за пределы заданной точности определения поля (порядка 10^{-2}). Исключение представляют концы отрезка «0», где пришлось учесть и линейные члены для коэффициента l_1 :

$$l_1 \approx l_1^{(0)} + \Delta_x g \Delta x, \quad (14)$$

$$g = \frac{1}{2} \frac{1}{S} \sqrt{\frac{C}{q}} \Big|_0 = \frac{1}{2}, \quad \Delta_x = \frac{\Delta}{4\mu^{(4)}} \left(3 - \frac{1}{5} \frac{\mu^{(6)}}{\mu^{(4)}} \right).$$

При решении методом ЛА важно определить производные эйконала в центре топологической особенности. В данной задаче в точке r_1 имеем

$$\mu^{(2n+1)} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \mu^{(2)} = 0,$$

$$\mu^{(4)} = \frac{3}{8} \frac{\pi}{\sqrt{2}}, \quad \mu^{(6)} = \frac{1215}{128} \frac{\pi}{\sqrt{2}}, \quad \mu^{(8)} = \frac{448875}{1024} \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

В общем случае для вычисления $\mu^{(n)}$ в плоскослоистой среде существует алгоритм, изложенный в [13] и [7]. В формулах (13) и (14) учтена симметрия каустического острья в данной задаче.

Результаты численных расчетов представлены на рис. 2, где приведена зависимость $|G(T)|$ вдоль отрезков «0» — рис. 2а, «1» — рис. 2б, «2» — рис. 2г. На рис. 2а сплошной линией показаны результаты расчетов по формуле (9). Здесь же дано графическое сопоставление с результатами, полученными методом СГП в работах [8, 9]. Для разреза «0» данные совпадают с графической точностью. В частности, для центральной точки каустического острья r_1 имеем численные значения, приведенные в табл. 1.

Таблица 1

G	Асимптотическое решение [14]*	Метод КОМ и ЛА	Метод СГП [8, 9]
$\text{Re } G$	0,342	0,345	0,350
$\text{Im } G$	0,141	0,141	0,138

Таким образом, на оси канала оба метода дают совпадение с очень хорошей точностью.

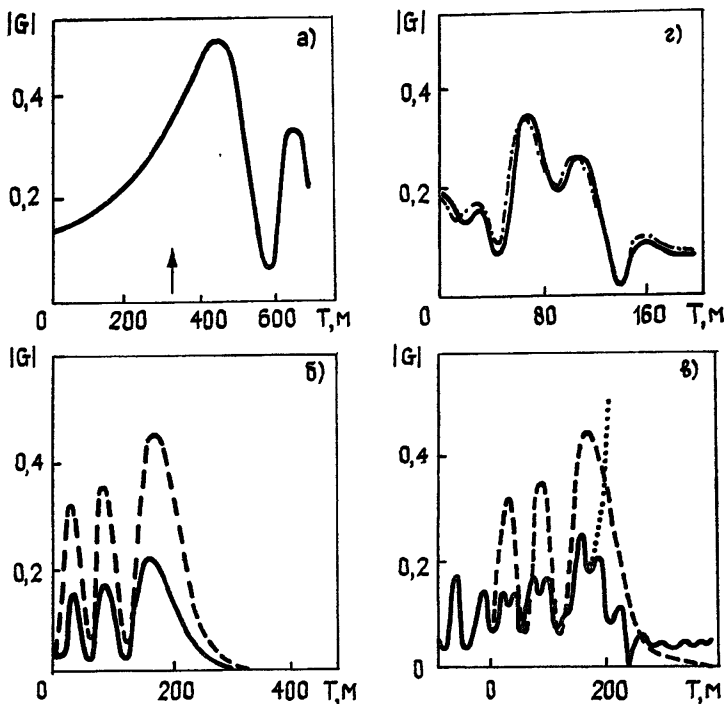


Рис. 2.

В разрезе «1» волновое поле было рассчитано как по формуле (10) с коэффициентами, определенными по методу ЛА с учетом квадратичных поправок (см. Приложение II), так и методом геометрической оптики (11) в областях его применимости. Результаты расчетов представлены на рис. 2б, в.

* Расчет по асимптотической формуле, взятой из [14], проведен в работах [8, 9].

Для большей наглядности на рис. 2б нанесены графики для $|G(T)|$, взятые из работ [8,9] (пунктир) и рассчитанные по формуле (10) (сплошная линия) без учета третьего луча. Видно, что, хотя положения минимумов и максимумов примерно совпадают, амплитудные значения различаются приблизительно в два раза. На рис. 2в приведена амплитуда полного поля (сплошная линия), сопоставленная с результатами работ [8,9] (пунктир). Здесь различие результатов весьма существенное. Точками на рис. 2в нанесено геометрическое решение, рассчитанное по формуле (11).

4. Обсуждение. Естественно возникает вопрос: какой из методов дает верный результат? Наиболее полный ответ был бы получен при наличии еще одного независимого метода решения задачи. К сожалению, нам не удалось найти такого решения. Поэтому для проверки результатов мы, во-первых, провели сравнение с решением, полученным методом геометрической оптики в области света (три действительных луча). Отличия, показанные точками на рис. 2в, существуют лишь при приближении к каустике, что закономерно. Во-вторых, было рассчитано поле в промежуточном сечении «2» по формулам (9) и (10), т. е. в области перекрытия их действия (рис. 1, 3):

$$„2“ \begin{cases} x_{\phi} = x_0 - \tilde{\alpha}T, & 0 \leq T \leq 200 \text{ м} \\ y_{\phi} = \tilde{\alpha}T, & \tilde{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x_0 = 10420 \text{ м.} \end{cases} \quad (15)$$

Совпадение оказалось удовлетворительным в пределах точности расчетов (рис. 2г). На рис. 2г сплошной линией показаны результаты расчетов по формуле (9); а отличие результатов расчета по формулам (9) и (10) отмечено штрихпунктирной линией.

Существуют также и общие соображения, говорящие в пользу нашего решения. Нами учтено влияние третьего луча в разрезе «1», который совершенно выпал из поля зрения авторов работ [8,9]. Учет вклада третьего луча приводит не только к гораздо более сложной дифракционной картине поля, но и к отличному от нуля значению амплитуды поля во внешней области каустического острия. Завышенное значение амплитуды поля, полученное в [8,9], также не укладывается в общее представление о том, что при удалении от центра фокальной области (в данном случае от центра каустического острия) амплитуда должна уменьшаться*.

На основании проведенного сравнения можно сделать следующие выводы:

1. Метод СГП и метод КОМ в приближении ЛА дают хорошо совпадающие результаты в окрестности оси волновода (по крайней мере в зоне первого острия).

2. Вдали от оси канала расчет волнового поля методом СГП требует дополнительного анализа лучевой и каустической структуры задачи. К сожалению, ошибка, допущенная авторами работ [8,9], и неучет ими «третьего луча» в сечении «1» не позволили судить об эффективности метода при описании полного волнового поля в зонах фокусировки. Этот вопрос представляет несомненный интерес и требует дополнительного исследования.

К сожалению, в работах [8,9] не указан еще один параметр оценки эффективности метода СГП — время счета разреза поля на ЭВМ. Для построения рассматриваемых разрезов поля по представленной нами методике на ЭВМ БЭСМ-6 потребовалось для разреза «0» — 51'' (рис. 2а), «1» — 1'46'' (рис. 2б), «1» — примерно 38' (рис. 2в) на 101 точку. В последнем случае, чтобы сравнить с результатами работ [8,9],

* После представления статьи, авторы получили из редакции письмо М. М. Попова, в котором сообщается, что в работе [8] при расчете разреза «1» не был учтен третий луч и амплитуда поля ошибочно завышена в два раза.

нам пришлось решать обратную задачу, с чем и связано резкое увеличение времени счета.

На основании анализа полученных результатов можно заключить, что метод КОМ в приближении ЛА с параллельным анализом геометрической структуры каустических поверхностей лучше, чем метод СГП, вскрывает механизм формирования дифракционных полей в областях фокусировки и позволяет более эффективно решать задачи о фокусировке волн в неоднородных средах.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

Рассмотрим вопрос о правомерности разграничения окрестности первого каустического острья (области Ω_1) на зоны с различными типами асимптотики (рис. 1). Ясно, что выражение (9), так же как и интегральное представление (7), дает равномерную коротковолновую асимптотику поля G во всей области Ω_1 . Однако в случае (9) аргументы X и Y , коэффициенты l_k и фазу Φ_I необходимо представить с помощью рядов Тейлора, коэффициенты которых вычисляются в центре топологической особенности. Именно

$$X = \sum_{n=1}^{\infty} X^{(n)}, \quad l = \sum_{n=0}^{\infty} l^{(n)}, \quad \Phi_I = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_I^{(n)}, \quad (\text{П.1.1})$$

причем каждый член ряда является мономом степени n по Δx и Δy . С ростом n порядок производной μ по параметру C , которую необходимо учитывать, быстро растет. Возникает вопрос — когда в практических расчетах можно ограничиться отрезком ряда Тейлора той или иной длины. Поскольку точность вычисления волнового поля определяется числом учтенных производных эйконала μ , то для того чтобы получить в расчетах ту же точность, какую позволяет получить, например, $(n-1)$ -е приближение для аргументов X и Y , коэффициенты l_k и фаза Φ_I должны учитывать те же производные μ . Расчеты показывают, что ошибка в определении аргументов является наиболее существенной. Поэтому потребуем, чтобы абсолютное отличие точного значения X_k от приближенного не превышала χ :

$$\left| X_k - \sum_{j=1}^{n-1} X_k^{(j)} \right| \approx |X_k^{(n)}| \leq \chi. \quad (\text{П.1.2})$$

Пусть ρ_{n-1} — радиус области применимости $(n-1)$ -го приближения. Тогда из (П.1.2) ρ_{n-1} можно оценить как

$$\rho_{n-1} \approx R \sqrt[n]{\chi/M} \min_k \left\{ \frac{1}{\sqrt[n]{|B_k| \Delta^k}} \right\}, \quad (\text{П.1.3})$$

где B_k — функция производных эйконала μ в точке O , причем, как правило, $B_k \sim O(1)$ и зависит от направления, вдоль которого определяется ρ_{n-1} . Если в (П.1.3) учесть, что

$$\Delta = \sqrt[N+1]{(N+1)!/M |\mu^{(N+1)}|}, \quad (\text{П.1.4})$$

где N — число лучей, сливающихся в особой точке O , то формула (П.1.3) является общим оценочным соотношением для определения размера области применимости $(n-1)$ -го приближения для любой одномерной фокусировки. Так как $\Delta < 1$, обычно минимальным в (П.1.3) является член с индексом $k=1$.

В нашей задаче либо $X = (Z)$ — аргумент функции Эйри,

$$A_i(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i(u^3 + Zu)] du,$$

либо $X = (Y, X)$ — аргумент функции Пирси,

$$I(X, Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i(u^4 + Xu^2 + Yu)] du.$$

Используя (13), определим для аргументов функции Пирси область применимости первого приближения. Полагая для определенности $\chi = 0,1$, получим

$$\rho_1 \approx \sqrt{\frac{\chi}{2\pi}} R \lambda \frac{1}{\sqrt{|B_1| \Delta}} \approx 49,5 \text{ м.} \quad (\text{П.1.5})$$

Из соотношения (П.1.5) можно получить и более грубую оценку, именно

$$\rho_1 \sim \sqrt{\chi/2\pi} \sqrt{\lambda R} \approx 45,5 \text{ м.} \quad (\text{П.16})$$

Формула (П.1.6) дает лишь порядок величины и фактически устанавливает связь между размерами области применимости первого приближения и размером первой зоны Френеля на расстоянии R от центра фокусировки.

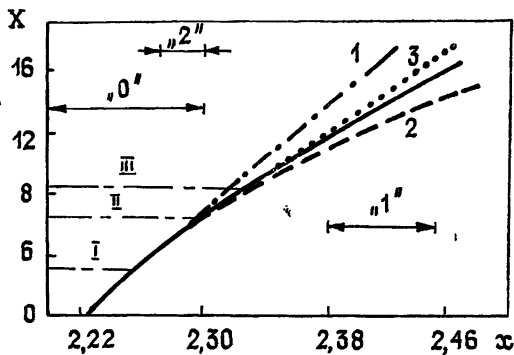


Рис. 3.

На рис. 3 сплошной линией показана зависимость $X(x)$ при $Y=0$, т. е. вдоль оси волновода; штрихпунктирной линией — первое приближение, пунктиром — второе, точками — третье. Горизонтальными линиями отмечены границы применимости каждого из приближений. Цифрами и стрелками отмечены проекции отрезков, вдоль которых исследовалось поле, на ось волновода. Ясно, что отрезки «0» и «2» лежат в области применимости формулы (9) с учетом (13) и (14), а вдоль отрезка «1» поле нецелесообразно рассчитывать через функцию Пирси и ее производные, так как даже кубические поправки не дают необходимой точности.

Формулой (10) волновое поле может быть описано вплоть до склонов главного дифракционного максимума [7]. Поэтому необходимо, чтобы выражение (9) достаточно хорошо описывало первую осцилляцию амплитуды поля, что и дают приближения (13), (14).

Примечание. Поскольку $X=0$ определяет уравнение положения особенности каустической поверхности (или самой каустики) в координатах $\Delta x, \Delta y$: $\Gamma = \{\Delta x(\varphi), \Delta y(\varphi)\}$, формула (П.1.2) и полученные из нее оценки справедливы только вдоль направлений, которые не составляют малый угол с касательной к кривой Γ в точке особенности. Это соображение необходимо учитывать при построении поля методом локальной асимптотики для правильного выбора точки «0».

Приведем без подробного вывода формулы, необходимые для вычисления аргумента Z функции Эйри, коэффициентов l_k и фазы Φ_A , знание которых, в свою очередь, необходимо для нахождения волнового поля по формуле (10). Пусть (x_h, y_h) — координаты каустики. На отрезке «1» $x_h \approx 2,422$, $y_h \approx 9,72 \cdot 10^{-2}$, на отрезке «2» $x_h \approx 2,286$, $y_h \approx 1,70 \cdot 10^{-2}$.

Пусть $\Delta x = x - x_h$, $\Delta y = y - y_h$. Тогда

$$Z \approx Z_x \Delta x + Z_y \Delta y + \frac{1}{2} (Z_{xx} \Delta x^2 + 2Z_{xy} \Delta x \Delta y + Z_{yy} \Delta y^2), \quad (\text{П.И.1})$$

где

$$\begin{pmatrix} Z_x \\ Z_y \end{pmatrix} = jM \begin{pmatrix} 1 \\ \hat{\mu}_y^{(1)} \end{pmatrix} \Delta, \quad \Delta = \sqrt[3]{\frac{6}{M |\hat{\mu}^{(3)}|}}, \quad j = \text{sgn}(\hat{\mu}^{(3)}); \quad (\text{П.И.2})$$

$$Z_{yy} = jM (2\hat{\mu}_y^{(2)} S_y \Delta + \hat{\mu}_{yy}^{(1)} \Delta + 2\hat{\mu}_y^{(1)} \Delta_y + \hat{\mu}^{(3)} S_y^2 \Delta); \quad (\text{П.И.3})$$

$$Z_{xy} = jM (\hat{\mu}_y^{(2)} S_x \Delta + \hat{\mu}_y^{(1)} \Delta_x + \hat{\mu}^{(3)} S_x S_y \Delta + \Delta_y); \quad (\text{П.И.4})$$

$$Z_{xx} = jM (2\Delta_x + \hat{\mu}^{(3)} S_x^2 \Delta), \quad (\text{П.И.5})$$

$$\Delta_x = -\frac{\Delta}{3\hat{\mu}^{(3)}} (\hat{\mu}^{(4)} S_x + S_3 + 3\hat{\mu}^{(3)} S_x S_2);$$

$$\Delta_y = -\frac{\Delta}{3\hat{\mu}^{(3)}} (\hat{\mu}^{(4)} S_y + \hat{\mu}_y^{(3)}) + 3\hat{\mu}_y^{(2)} S_2 + 3\hat{\mu}^{(3)} S_y S_2 + \hat{\mu}_y^{(1)} S_3); \quad (\text{П.И.6})$$

$$S_x = -\frac{S_2}{\hat{\mu}^{(3)}}, \quad S_y = -\frac{1}{\hat{\mu}^{(3)}} (\hat{\mu}_y^{(2)} + \hat{\mu}_y^{(1)} S_2), \quad S_2 = -\frac{1}{6} \frac{\hat{\mu}^{(4)}}{\hat{\mu}^{(3)}}, \quad (\text{П.И.7})$$

$$S_3 = \frac{1}{10} \left[\frac{5}{4} \left(\frac{\hat{\mu}^{(4)}}{\hat{\mu}^{(1)}} \right)^2 - \frac{\hat{\mu}^{(5)}}{\hat{\mu}^{(3)}} \right].$$

Производные эйконала μ по координате y могут быть вычислены аналитически. На верхней каустике

$$\hat{\mu}_y^{(1)} = -\frac{S}{q}, \quad \hat{\mu}_y^{(2)} = -\frac{\epsilon}{q^3}, \quad \hat{\mu}_{yy}^{(1)} = \frac{S \epsilon_y}{2q^3}, \quad \hat{\mu}_y^{(3)} = -3\epsilon S/q^5, \quad (\text{П.И.8})$$

где в безразмерных координатах $S = k_x$, $q = k_y$, а производные эйконала определены на каустике. Для коэффициентов \tilde{l}_k и фазы Φ_A имеем

$$\tilde{l}_1 \approx g_h \Delta, \quad \tilde{l}_2 \approx -i \left(\frac{\partial q_k}{\partial S} + g_k S_2 \right) \Delta^2 j; \quad (\text{П.И.9})$$

$$M^{-1} \Phi_A = \Phi_h + k_x \Delta x + k_y \Delta y + (\Delta x + \hat{\mu}_y^{(1)} \Delta y) \Delta S + (\epsilon_y/2q) \Delta y^2 + \dots, \quad (\text{П.И.10})$$

где

$$\Delta S \approx S_x \Delta x + S_y \Delta y, \quad (\text{П.И.11})$$

Φ_h — значение эйконала в точке каустики, а

$$g_k = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{qC}}. \quad (\text{П.И.12})$$

Для вычисления производных эйконала μ , а также для нахождения положения каустики был использован алгоритм, изложенный в [13, 7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Маслов В. П. Теория возмущений и асимптотические методы. — М.: Гос. ун-т, 1965. — 553 с.
2. Маслов В. П. Операторные методы. — М.: Наука, 1973. — 543 с.
3. Лукин Д. С., Палкин Е. А. В кн.: Теоретическое и экспериментальное исследование распространения декаметровых радиоволн. — М.: ИЗМИР АН СССР, 1976, с. 149.
4. Лукин Д. С., Палкин Е. А. Численный канонический метод в задачах дифракции и распространения электромагнитных волн в неоднородных средах. — М.: Физико-технический ин-т, 1982. — 159 с.
5. Крюковский А. С., Лукин Д. С. Статья депонирована в ВИНТИ, рег. № 3278-81. Деп. от 2 июля 1981 г.
6. Крюковский А. С., Лукин Д. С. В кн.: Вопросы дифракции электромагнитных волн. Межведомственный сборник. — М.: Физико-технический ин-т, 1982, с. 40.
7. Крюковский А. С. Диссертация, М., 1982.
8. Качалов А. П., Попов М. М. — ДАН СССР, 1981, 258, № 5, с. 1097.
9. Попов М. М., Качалов А. П. Тезисы докладов VIII Всесоюзного симпозиума по дифракции и распространению волн. — М., 1981, с. 253.
10. Бабиц В. М., Булдырев В. С., Номофилов В. Е. Тезисы докладов VIII Всесоюзного симпозиума по дифракции и распространению волн. — М., 1981, 2, с. 263.
11. Еременко В. А., Черкашин Ю. Н. Тезисы докладов VIII Всесоюзного симпозиума по дифракции и распространению волн. — М., 1981, 2, с. 257.
12. Лукин Д. С., Ипатов Е. Б., Палкин Е. А. В кн.: Вопросы дифракции электромагнитных волн. Межведомственный сборник. — М.: Физико-технический ин-т, 1982, с. 21.
13. Крюковский А. С., Лукин Д. С. Статья депонирована в ВИНТИ, рег. № 3690-82. Деп. от 12 июля 1982 г.
14. Булдырев В. С., Ланин А. И., Янсон З. А. В кн.: Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. — Л.: Наука, 1974, 14, с. 84.

Московский физико-технический
институт

Поступила в редакцию
27 января 1984 г.

THE NUMERICAL COMPARISON OF TWO ASYMPTOTIC METHODS FOR THE INVESTIGATION OF WAVE DIFFRACTION PROBLEMS IN SMOOTH INHOMOGENEOUS MEDIA

A. S. Kryukovskij, D. S. Lukin, E. A. Palkin

The efficiency of different asymptotic methods is now widely discussed. These methods have been developed for the description of wave field diffraction in inhomogeneous media. The method of Maslov's canonical operator (COM) and the method of summing Gaussian beams (SGB) are the most effective ones, which enable us to find the field in regular and focal regions. This paper deals with the numerical comparison of these two methods. The calculation of the acoustical wave field in smooth inhomogeneous channel is taken as an example. For this purpose the solution of Helmholtz equation has been constructed by COM method in the form of quickly oscillating integral, which has been transformed into well-known special functions in case of caustic and cusp. The arguments and coefficients of those functions have been determined by local asymptotic method. As a solution of the problem by SGB-method the results published are used. It's shown, that at the axes of channel the results of calculation by COM- and SGB-methods are graphically coincident. But away from the axis the application of SGB-method meets some difficulties. The results of comparison lead to the conclusion that COM-method is more effective in description of diffraction field generation mechanism in focal regions.