ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXIX, № 1 РАДИОФИЗИКА 1986

УДК 538.566.5

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КОГЕРЕНТНОСТИ ПОЛЯ ИЗЛУЧЕНИЯ В СТАТИСТИЧЕСКИ НЕРЕГУЛЯРНЫХ ВОЛНОВОДАХ

С. С. Абдуллаев

Предлагается асимптотический метод расчета пространственной корреляционной функции поля излучения в статистически нерегулярных открытых волноводах с произвольным профилем показателя преломления поперечного сечения. Показано, что пространственная корреляционная функция поля на достаточно больших расстояниях от области ввода излучения в волновод определяется только распределением средней мощности по модам. Последнее в случае многомодового волновода можно определить решением уравнения типа Эйнштейна—Фоккера для плотности распределения лучей. Асимптотическим разложением корреляционной функции поля по малому параметру квазиклассичности найдены замкнутые выражения для нее в случае плоского волновода. Рассмотрен конкретный пример октрытого волновода со случайными изгибами оси.

Нерегулярности, имеющиеся в реальных открытых волноводных каналах, приводят не только к потерям мощности распростаняющейся в нем волны, но и к ухудшению ее пространственной когерентности. Теоретический анализ этой характеристики волны в нерегулярном волноводе осложняется как из-за регулярной зависимости показателя преломления среды от поперечных координат, так и вследствие его случайного изменения вдоль оси волновода.

Строгий расчет пространственной корреляционной функции волны удается провести лишь в случае статистически нерегулярного волновода с квадратичной зависимостью показателя преломления от поперечных координат [1–3]. Для широкого класса случайно-неоднородных волноводов со степенными профилями невозмущенного показателя преломления удается исследовать статистические характеристики нормальных мод волнового поля [4–6].

Модовый анализ пространственной когерентности волнового поля в статистически нерегулярном волноводе [7–9] показывает, что межмодовая корреляция ослабляется после прохождения волной определенного критического расстояния. При этом пространственная корреляционная функция волнового поля определяется лишь распределением средней мощности по модам. Однако дальнейший ее анализ наталкивается на трудности, связанные с решением краевой задачи для собственных волн волновода с произвольным профилем показателя преломления поперечного сечения и вычислением суммы большого числа слагаемых. Поэтому приходится прибегать к численным расчетам.

Предлагаемый в настоящей работе метод расчета позволяет обойти указанные трудности. Он основан на асимптотическом разложении пространственной корреляционной функции поля в многомодовом волноводе по малому параметру квазиклассичности [10, 11]. Ниже этот метод применяется для получения замкнутых аналитических выражений для пространственной корреляционной функции поля в плоском многомодовом статистически нерегулярном открытом волноводе на достаточно большом расстоянии от области ввода излучения.

Отметим, что случай закрытого волноводного канала совпадает со случаем, рассмотренным в [10].

1. Основные уравнения. Рассмотрим двумерный волноводный канал. Пусть направление оси z совпадает с направлением распространения волны, а x — поперечная к оси z координата. Предположим, что в плоскости $z=0$ волновод возбуждается монохроматическим волновым пучком $E_0(x)$ частоты ω (предполагается гармоническая зависимость от времени $\exp(i\omega t)$).

Показатель преломления среды $n=n(x,z)$ представим в виде

$$n^2(x,z)=n_0^2(x)+\varepsilon n_1(x,z), \tag{1.1}$$

где $n_0(x)$ описывает показатель преломления однородного вдоль оси x невозмущенного волновода, $\varepsilon n_1(x,z)$ соответствует возмущению среды, обусловленному случайным изменением параметров волновода вдоль его оси z, $\varepsilon\ll 1$ — безразмерный малый параметр возмущения.

В малоугловом приближении волновое поле $E(x,z)$ можно представить в виде

$$E(x,z)=\frac{1}{2}\left[u(x,z)e^{ik_0n_0z}+u^*(x,z)e^{-ik_0n_0z}\right], \tag{1.2}$$

где $n_0=\max n(x,z)$, $k_0=\omega/c$ — волновое число в вакууме, c — скорость света в вакууме. Медленно меняющаяся вдоль x функция $u(x,z)$ удовлетворяет параболическому уравнению

$$\begin{gathered}2ik_0n_0\partial u/\partial z+\partial^2u/\partial x^2+k_0^2\,(n^2(x,z)-n_0^2)\,u=0,\\ u|_{z=0}=u_0(x).\end{gathered} \tag{1.3}$$

Волновое поле $u(x,z)$ представим в виде разложения

$$u(x,z)=\sum_m a_m(z)\varphi_m(x) \tag{1.4}$$

по собственным функциям мод невозмущенного волновода $\varphi_m(x)$, удовлетворяющим краевой задаче

$$\begin{gathered}\left[\frac{d^2}{dx^2}+k_0^2n_0^2(x)\right]\varphi_m(x)=k_m^2\,\varphi_m(x),\\ \varphi_m(x)\to 0 \qquad \text{при } |x|\to\infty.\end{gathered} \tag{1.5}$$

Постоянные распространения волноводных мод k_m принимают дискретные значения в интервале (k_0n_∞, k_0n_0) $(n_0=\max n_0(x),\ n_\infty=\min n_0(x))$.

Коэффициенты разложения $a_m(z)$ являются случайными функциями продольной координаты z и удовлетворяют уравнению для связанных волн [12].

Определим пространственную корреляционную функцию поля второго порядка согласно соотношению

$$\Gamma(x_1,x_2;z)=\langle u^*(x_1,z)\,u(x_2,z)\rangle, \tag{1.6}$$

где угловая скобка $\langle\,\rangle$ означает усреднение по ансамблю случайных нерегулярностей волновода.

Используя (1.4), имеем

$$\Gamma(x_1,x_2;z)=\sum_{m_1,m_2}\langle a^*_{m_1}(z)\,a_{m_2}(z)\rangle\,\varphi^*_{m_1}(x_1)\,\varphi_{m_2}(x_2). \tag{1.7}$$

Из (1.7) видно, что поведение пространственной корреляционной функции $\Gamma(x_1,x_2;z)$ вдоль оси волновода z определяется соответствующим поведением величин $P_{m_1m_2}(z)=\langle a^*_{m_1}(z)\,a_{m_2}(z)\rangle$. Анализ уравнений, описывающих поведение этих величин, показывает, что при прохождении волной расстояния, превышающего некоторое критическое значение z_R, недиагональные элементы $P_{m_1m_2}(z)$ $(m_1\neq m_2)$, описывающие межмодовую корреляцию, экспоненциально убывают [7, 13]. При этом диагональные элементы $P_m(z)=P_{mm}(z)$, описывающие средние мощности мод, удовлетворяют уравнению переноса

$$dP_m/dz = -\alpha_m P_m + \sum_{m'} w_{mm'} (P_{m'} - P_m), \tag{1.8}$$

где $w_{mm'}$ имеет смысл вероятностей перехода энергии между модами, α_m описывает затухание мод за счет рассеяния в оболочку волновода. Явные выражения для этих величин не приводим. Их можно найти в [7, 13].

Отметим, что критическое расстояние убывания межмодовой корреляции z_R значительно меньше характерного расстояния установления стационарного распределения средней мощности по модам $z_0 \sim \sim 1/w_{mm'}$ [13].

Таким образом, на расстоянии $z > z_R$ от области ввода излучения в статистически нерегулярный волновод пространственная корреляционная функция поля принимает вид

$$\Gamma(x_1, x_2; z) = \sum_m P_m(z) \varphi_m^*(x_1) \varphi_m(x_2). \tag{1.9}$$

Последнее выражение можно переписать в виде

$$\Gamma(x_1, x_2; z) = -\frac{k_0^2}{\pi} \int\limits_{n_0^2}^{n_\infty^2} d\mu\, P(\mu, z) \operatorname{Im} G(x_1, x_2; \mu), \tag{1.10}$$

где

$$P\left(\frac{k_m^2}{k_0^2}; z\right) = P_m(z), \quad G(x_1, x_2; \mu) = \sum_m \frac{\varphi_m(x_1)\varphi_m(x_2)}{k_0^2\mu - k_m^2 + i\delta}.$$

Величина $G(x_1, x_2; \mu)$ представляет собой функцию Грина уравнения

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + k_0^2(n_0^2(x) - \mu)\right] G(x, x'; \mu) = \delta(x - x'). \tag{1.11}$$

Из (1.10) видно, что пространственная корреляционная функция поля волны определяется мнимой частью функции Грина краевой задачи (1.11) и распределением средней мощности по модам $P(\mu, z)$.

2. Диффузионное приближение. Ниже будем рассматривать многомодовые волноводы. Последние чаще встречаются в природе и на практике. В них может распространяться довольно большое число мод $\sim 10^2$—10^3. В рассматриваемых волноводах масштаб существенного изменения показателя преломления в поперечном направлении x значительно превышает длину волны, а масштаб нерегулярностей $l_\parallel$ вдоль его оси z превосходит длину межмодовых биений $l_0 \sim 1/|k_m - k_{m'}|$. При каждом рассеянии волны на нерегулярностях среды обмен энергии происходит между соседними модами. В отмеченных условиях распределение средней мощности по модам $P_m(z)$ имеет сглаженный характер. При этом от уравнения переноса (1.8) можно перейти к уравнению диффузии для средних мощностей мод [14]

$$\partial P_m/\partial z = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial m}\left(B(m)\frac{\partial P_m}{\partial m}\right), \quad P_m(z)|_{z=0} = |a_m(0)|^2,$$

$$B(m) = \sum_{m'} w_{mm'}(m - m')^2. \tag{2.1}$$

Отметим, что уравнение (2.1) заменой переменной $I=m/k_0$ можно привести к виду уравнения типа Эйнштейна—Фоккера для плотности вероятности распределения лучей $f(I, z)$ по действию I [15, 16]:

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial I}\left(D(I)\frac{\partial f}{\partial I}\right),\quad D(I)\left.\frac{\partial f}{\partial I}\right|_{I=0}=0,$$
$$f(I)|_{I=I_{\text{кр}}}=0,\quad D(I)=B(m)/k_0^2, \tag{2.2}$$

где $I_{\text{кр}}$ — критическое значение действия I, начиная с которого луч высвечивается в оболочку волновода.

Поскольку $P_m(z)\sim f(I, z)$, то вместо уравнения для средних мощностей мод (2.1) можно воспользоваться уравнением для плотности вероятности распределения лучей (2.2). При этом коэффициент диффузии $D(I)$ вычисляется не по громоздкой формуле (2.1), а по лучевой методике [15, 16] нахождением траектории лучей невозмущенного волновода.

Асимптотическое решение уравнения (2.2) на расстояниях $z>>1/(\sigma_2-\sigma_1)$ имеет вид [16]

$$f(I, z)=A_1U_1(I)e^{-\sigma_1 z}, \tag{2.3}$$

где σ_1 — наименьшее собственное значение краевой задачи

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dI}\left(D(I)\frac{dU}{dI}\right)=\sigma U,\quad D(I)\left.\frac{dU}{dI}\right|_{I=0}=0,\quad U|_{I=I_{\text{кр}}}=0. \tag{2.4}$$

Величина $U_1(I)$ описывает установившееся стационарное распределение лучей, σ_2 — следующее после σ_1 наименьшее собственное значение ($\sigma_2>\sigma_1$). Константа A_1 определяется начальным распределением средней мощности $P_m(0)$.

3. Расчет корреляционной функции. Непосредственный расчет пространственной корреляционной функции поля на основе соотношений (1.9) или (1.10) представляет собой в общем случае довольно трудную задачу. Поэтому воспользуемся следующим подходом.

Поскольку реальные масштабы существенного изменения параметров волновода в пространстве значительно превышают длину волны, то для описания поля можно применить приближение геометрической оптики. Коротковолновая асимптотика функции Грина уравнения (1.11) имеет вид [17]

$$G(x, x'; \mu)=\sum_j\frac{1}{2ik_0\,[p_\mu(x)\,p_\mu(x')]^{1/2}}\exp\left[ik_0\int_{\Gamma_j}p_\mu(x)\,ds+i\,\frac{\pi}{2}\mu_j\right],$$
$$p_\mu(x)=[n^2(x)-\mu]^{1/2}. \tag{3.1}$$

В (3.1) интегрирование проводится вдоль дуги Γ_j j-й траектории луча, соединяющей точки x и x', μ_j — индекс Морса на j-й траектории луча. Суммирование в (4.1) ведется по всем допустимым траекториям лучей, соединяющих точки x, x'.

Используя (1.10), (2.3) и (3.1), получим следующее выражение для пространственной корреляционной функции поля:

$$\Gamma(x_1, x_2; z)=\frac{k_0^2A_1\,e^{-\sigma_1 z}}{2\pi}\int\limits_{n_\infty^2}^{n_{\min}^2}d\mu\,P_1(\mu)\,[p_\mu(x_1)\,p_\mu(x_2)]^{-1/2}\times$$

$$\times \sum_j \cos\left[k_0 \int\limits_{\Gamma_j} p_\mu(x)\,ds + \frac{\pi}{2}\mu_j\right], \quad P_1(\mu)\,d\mu = U_1(I)\,dI,$$

$$n_{\min} = \min[n(x_1), n(x_2)]. \tag{3.2}$$

Среди траекторий, соединяющих точки наблюдения x_1 и x_2, есть траектории, непосредственно связывающие эти точки и длина дуги которых обращается в нуль при $x_2 \to x_1$. Эти траектории назовем траекториями первого рода. Остальные траектории, длина дуги которых остается конечной при $x_2 \to x_1$, назовем траекториями второго рода.

В связи с такой классификацией выражение для корреляционной функции (3.2) можно представить в виде суммы двух слагаемых, т. е.

$$\Gamma(x_1, x_2; z) = \Gamma^{(0)}(x_1, x_2; z) + \Gamma^{(1)}(x_1, x_2; z), \tag{3.3}$$

где $\Gamma^{(0)}(x_1, x_2; z)$ — часть корреляционной функции, соответствующая траекториям первого рода, $\Gamma^{(1)}(x_1, x_2; z)$ соответствует траекториям второго рода.

Вид зависимости первой части корреляционной функции $\Gamma^{(0)}(x_1, x_2; z)$ от поперечных координат x_1, x_2 существенно зависит от соотношения расстояния между этими точками наблюдения $\Delta x = |x_2 - x_1|$ и характерного масштаба b изменения показателя преломления $n_0(x)$ вдоль поперечной координаты x.

Легко показать, что при $\Delta x < b$ имеем

$$\Gamma^{(0)}(x_1, x_2; z) = \frac{k_0^2}{2\pi} A_1 e^{-\sigma_1 z} \int\limits_{n_\infty^2}^{n_{\min}^2} d\mu P_1(\mu) \cos[k_0 p_\mu(x_1)\Delta x]\, p_\mu^{-1}(x). \tag{3.4}$$

Из (3.4) следует, что характерный радиус когерентности имеет порядок $x_c \approx \pi/(k_0 p_F(x))$, где $p_F(x) = (n^2(x) - n_\infty^2)^{1/2}$ — локальная числовая апертура волновода.

Рассмотрим теперь случай, когда расстояние между точками наблюдения Δx значительно превышает масштаб b и радиус когерентности x_c, т. е. $\Delta x \gg b, x_c$. В этом случае интеграл, определяющий $\Gamma^{(0)}(x_1, x_2; z)$, содержит сильно осциллирующую тригонометрическую функцию. Поэтому для оценки $\Gamma^{(0)}(x_1, x_2; z)$ применим метод стационарной фазы.

При первом интегрировании по частям главный внеинтегральный член в нижнем пределе обращается в нуль из-за граничного условия $P_1(n_\infty^2) = U_1(I_{\text{кр}}) = 0$. Интегрируя еще раз по частям и оставляя главный внеинтегральный член в нижнем пределе, получим

$$\Gamma^{(0)}(x_1, x_2; z) = -\frac{A_1}{4\pi} e^{-\sigma_1' z} \left.\frac{dP_1(\mu)}{d\mu}\right|_{\mu = n_\infty^2} [p_F(x_1) p_F(x_2)]^{-1/2} \times$$

$$\times \cos\{k_0[\sigma(x_1) - \sigma(x_2)]\}/[L(x_1) - L(x_2)]^2, \tag{3.5}$$

где введены обозначения

$$\sigma(x) = \int\limits_x^{\bar{x}_2} p_F(x')\,dx', \quad L(x) = \int\limits_x^{\bar{x}_2} [p_F(x')]^{-1}\,dx',$$

$$L^0 = \int\limits_{\bar{x}_1}^{\bar{x}_2} [p_F(x')]^{-1}\,dx', \quad p_F(\bar{x}_1) = p_F(\bar{x}_2) = 0, \tag{3.6}$$

Величина $a=|\bar{x}_2-\bar{x}_1|$ равна ширине волновода.

Рассмотрим вторую часть корреляционной функции $\Gamma^{(1)}(x_1,x_2;z)$. Для нее соответствующее подынтегральное выражение содержит сильно осциллирующие тригонометрические функции при любых значениях расстояния между точками наблюдения Δx. Поэтому ее расчет аналогичен предыдущему случаю. Для $\Gamma^{(1)}(x_1,x_2;z)$ получим следующее выражение:

$$\Gamma^{(1)}(x_1, x_2; z) = -\frac{\pi A_1}{k_0 (L^0)^2} e^{-\sigma_1 z} \left.\frac{dP_1(\mu)}{d\mu}\right|_{\mu=n_\infty^2} [p_F(x_1)\, p_F(x_2)]^{-1/2} \times$$

$$\times \left\{ \frac{\cos[k_0(\sigma(x_1)-\sigma(x_2))]}{\sin^2[\pi(L(x_1)-L(x_2))/2L^0]} - \frac{\sin[k_0(\sigma(x_1)+\sigma(x_2))]}{\sin^2[\pi(L(x_1)+L(x_2))/2L^0]} - \right. \tag{3.7}$$

$$\left. - \frac{\cos[k_0(\sigma(x_1)-\sigma(x_2))]}{[\pi(L(x_1)-L(x_2))/2L^0]^2} \right\}.$$

Выражения (3.3) — (3.7) описывают асимптотическое поведение пространственной корреляционной функции поля в статистически нерегулярном волноводе на расстоянии $z>1/(\sigma_2-\sigma_1)$ от области ввода излучения. Они верны для многомодовых волноводов с произвольным плавным профилем невозмущенного показателя преломления.

При малом значении расстояния между точками наблюдения $\Delta x<x_c$ основной вклад в пространственную корреляционную функцию дает первый член $\Gamma^{(0)}(x_1,x_2;z)$ (3.4). При этом вклад второго члена $\Gamma^{(1)}(x_1,x_2;z)$ значительно мал по сравнению с первым членом, и для их отношения имеем следующую оценку:

$$|\Gamma^{(1)}|/|\Gamma^{(0)}|\sim\xi^2\ll 1, \tag{3.8}$$

где $\xi=1/(k_0 a p_F(x))\ll 1$ — малый параметр квазиклассичности. С увеличением расстояния Δx между точками наблюдения значение $\Gamma^{(0)}(x_1,x_2;z)$ уменьшается и при $\Delta x\gg x_c$ становится порядка второго члена, т. е. $|\Gamma^{(0)}|\sim|\Gamma^{(1)}|$. Отметим, что в случае регулярного волновода, возбужденного пространственно-некогерентным источником излучения, отношение типа (3.8) пропорционально первой степени параметра ξ [10] (см. также разд. 5 и рис. 1).

Таким образом, пространственная когерентность поля, распространяющегося в статистически нерегулярном волноводе, начиная с расстояния порядка длины установления стационарного распределения мощности по модам $P_1(\mu)$, становится стационарной, т. е. не зависящей от продольной координаты z (не считая общего затухающего множителя $\exp(-\sigma_1 z)$). Характер зависимости пространственной корреляционной функции поля от поперечных координат определяется профилем невозмущенного показателя преломления волновода и распределением средней мощности по модам $P_1(\mu)$. Однако пространственная корреляционная функция поля зависит от вида распределения $P_1(\mu)$ лишь при $\Delta x\lesssim x_c$.

В обратном случае, $\Delta x\gg x_c$, пространственная корреляционная функция зависит лишь от производной $dP_1(\mu)/d\mu$ в нижнем пределе интегрирования $\mu=n_\infty^2$.

4. Пространственное распределение средней интенсивности. Распределение средней интенсивности $I(x)$ в поперечном сечении волновода определяется пространственной корреляционной функцией поля $\Gamma(x_1,x_2;z)$ приравниванием аргументов $x_1=x_2=x$. Используя выражения (3.3), (3.4) и (3.7), получаем следующие выражения для средней интенсивности:

$$I(x)=I^{(0)}(x)+I^{(1)}(x)+I_{\text{осц}}(x), \tag{4.1}$$

где

$$I^{(0)}(x) = \frac{k_0}{2\pi} A_1 e^{-\sigma_1 z} \int\limits_{n_\infty^2}^{n^2(x)} d\mu\, P_1(\mu)/p_\mu(x); \tag{4.2}$$

$$I^{(1)}(x) = -\frac{\pi}{3 k_0 p_F(x) (L^0)^2} A_1 e^{-\sigma_1 z} \left.\frac{dP_1(\mu)}{d\mu}\right|_{\mu=n_\infty^2}; \tag{4.3}$$

$$I_{\text{осц}}(x) = \frac{\pi A_1}{k_0 p_F(x)(L^0)^2} e^{-\sigma_1 z} \left.\frac{dP_1(\mu)}{d\mu}\right|_{\mu=n_\infty^2} \cdot \frac{\sin(2 k_0 \sigma(x))}{\sin^2(\pi L(x)/L^0)}. \tag{4.4}$$

Здесь $I^{(0)}(x)$ описывает главную, регулярную часть средней интенсивности и соответствует выражению, получаемому в приближении геометрической оптики. Остальные члены, (4.3) и (4.4), описывают малые поправки к средней интенсивности, обусловленные конечностью длины волны. При этом $I^{(1)}(x)$ есть поправка к регулярной части интенсивности, $I_{\text{осц}}(x)$ — осцилляционная поправка, описывающая колебания средней интенсивности относительно регулярной части $I^{(0)}(x)$ вдоль координаты x с характерным периодом $l_\perp \approx x_c$.

Относительные значения поправочных членов $I^{(1)}(x)$ и $I_{\text{осц}}(x)$ имеют порядок

$$|I^{(1)}|/|I^{(0)}| \sim |I_{\text{осц}}(x)|/|I^{(0)}| \sim \xi^2 \ll 1. \tag{4.5}$$

Следует отметить, что соответствующие отношения в случаях открытого регулярного плоского волновода, возбужденного пространственно-некогерентным источником, и статистически нерегулярного закрытого плоского волновода пропорциональны первой степени малого параметра квазиклассичности ξ [10]. Таким образом, в открытых нерегулярных волноводах пространственные осцилляции средней интенсивности в поперечном сечении сильно подавлены по сравнению с отмеченными случаями (см. рис. 2).

5. Волновод со случайными изгибами оси. В качестве примера рассмотрим плоский волновод с квадратичной зависимостью невозмущенного показателя преломления от поперечной координаты x в ограниченной области. Пусть ось волновода имеет случайные изгибы вдоль оси z. Тогда показатель преломления $n(x,z)$ можно описывать соотношениями

$$n(x,z) = n(x - f(z)),$$
$$n^2(x) = \begin{cases} n_0^2(1 - \Delta x^2/a^2), & |x| < a \\ n_\infty^2 = n_0^2(1-\Delta), & |x| > a \quad (\Delta \ll 1) \end{cases}, \tag{5.1}$$

где $f(z)$ — стационарный случайный процесс, описывающий случайные изгибы оси волновода.

Ниже определяется стационарное распределение средней мощности по модам, необходимое для исследования пространственной когерентности поля. Для этого нужно записать уравнение типа Эйнштейна — Фоккера для плотности вероятности распределения лучей и найти его стационарное решение. Коэффициент диффузии $D(I)$ можно найти по методике работы [15], зная траектории лучей невозмущенного волновода.

Траектории лучей удовлетворяют уравнению Гамильтона [18]

$$\dot{x} = \partial H/\partial p, \quad \dot{p} = -\partial H/\partial x, \quad \dot{x} \equiv dx/dz,$$
$$\dot{p} \equiv dp/dz, \quad p = n(x,z)\dot{x}/(1+\dot{x}^2)^{1/2}, \tag{5.2}$$
$$H = H(x,p,z) = -(n^2(x,z) - p^2)^{1/2}.$$

Здесь H — функция Гамильтона, p — обобщенный импульс.

Для волноводных лучей, траектории которых ограничены вдоль оси x, введем переменные действие — угол (I, ϑ):

$$I = \frac{1}{2\pi}\oint p\,dx, \quad \vartheta = \partial S(x, I)/\partial I,$$
$$S(x, I) = \int^{x} p\,dx. \tag{5.3}$$

В отсутствие возмущения ($f(z) \equiv 0$) траектории лучей имеют вид

$$x = 2(II_0)^{1/2}\sin\vartheta, \quad p = (I/I_0)^{1/2}\cos\vartheta, \quad \vartheta = \omega(I)z + \vartheta_0,$$
$$\omega(I) = dH_0(I)/dI = \sqrt{\Delta}/a, \quad H_0(I) = -(n_0^2 - I/I_0)^{1/2}, \tag{5.4}$$
$$I_0 = a/(2n_0\sqrt{\Delta}), \quad 0 < I < I_{\text{кр}} = an_0\sqrt{\Delta}/2.$$

При малом возмущении ($|f| \ll 1$) функцию Гамильтона H можно представить в виде

$$H = H_0(I) + H_1(I, \vartheta)f(z),$$
$$H_1(I, \vartheta) = dp/dz = -\omega(I)\,(I/I_0)^{1/2}\sin\vartheta. \tag{5.5}$$

Коэффициент диффузии $D(I)$ определяется соотношением [16]

$$D(I) = 4\pi\sum_{m=0}^{+\infty} m^2|c_m|^2 g(m\omega(I)),$$
$$H_1(I, \vartheta) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m \exp(im\vartheta) \qquad (c_{-m} = c_m^*). \tag{5.6}$$

Величина

$$g(\varkappa) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \langle f(z)\,f(z+\tau)\rangle\, e^{-i\varkappa\tau}\,d\tau$$

представляет собой фурье-образ функции корреляции стационарного случайного процесса $f(z)$.

Используя соотношения (5.4)—(5.6), получим

$$D(I) = D_0(I/I_{\text{кр}}), \quad D_0 = \pi n_0^2\Delta^2 g(\sqrt{\Delta}/a)/a^2. \tag{5.7}$$

Краевая задача (2.4) с коэффициентом диффузии (5.7) принимает вид

$$yU'' + U' + \alpha U = 0, \quad U' = dU/dy, \quad y = I/I_{\text{кр}},$$
$$yU'|_{y=0} = 0, \quad U|_{y=1} = 0, \quad \alpha = 2\sigma I_{\text{кр}}^2/D_0. \tag{5.8}$$

Уравнение (5.8) сводится к уравнению Бесселя [19], и его решение с учетом граничных условий равно

$$U_1(I) = J_0(q_{01}(I/I_{\text{кр}})^{1/2}). \tag{5.9}$$

Число $q_{01} = 2{,}4048$ — первый наименьший корень уравнения $J_0(q) = 0$. Коэффициент потерь σ_1 равен

$$\sigma_1 = \pi\Delta q_{01} g(\sqrt{\Delta}/a)/a^4.$$

Заметим, что величина $E = |H_0(I)|$ совпадает с замедлением моды k_m/k_0. Поэтому переменная μ равна

$$\mu = (k_m/k_0)^2 = H_0^2(I) = (n_0^2 - I/I_0).$$

Распределение средней мощности по модам $P_1(\mu)$ в переменном $\mu = (k_m/k_0)^2$ определяется соотношением

$$P_1(\mu) = U_1(I)\left|\frac{dI}{d\mu}\right| = I_0\, J_0\left(q_{01}\,\frac{(n_0^2-\mu)^{1/2}}{n_0\sqrt{\Delta}}\right). \tag{5.10}$$

Используя выражения, полученные в разд. 3 и 4, а также (5.1), (6.10), легко получить конкретные выражения для пространственной корреляционной функции поля и распределения средней интенсивности в поперечном сечении волновода. Из-за громоздкости соответствующих выражений их не приводим.

На рис. 1 представлена кривая зависимости нормированной корреляционной функции $\Gamma(0, x; z)/\Gamma^{(0)}(0, 0; z)$ от поперечной координаты x/a (сплошная кривая). Значение нормированной частоты $V = k_0 a (n_0^2 - n_\infty^2)^{1/2}$ взято равным $V=20$. Для сравнения приведен также график соответствующей величины в случае регулярного волновода, возбужденного пространственно-некогерентным источником излучения (штрихованная кривая) [10].

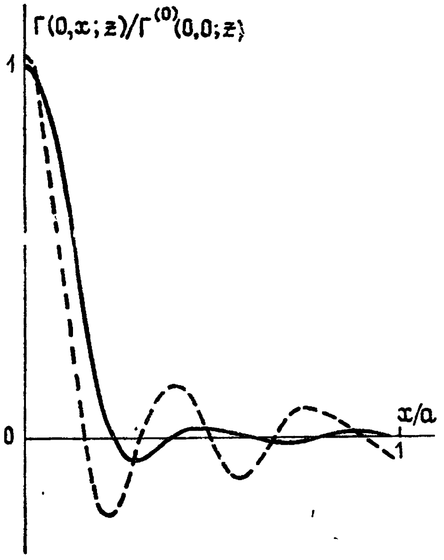

Рис. 1.

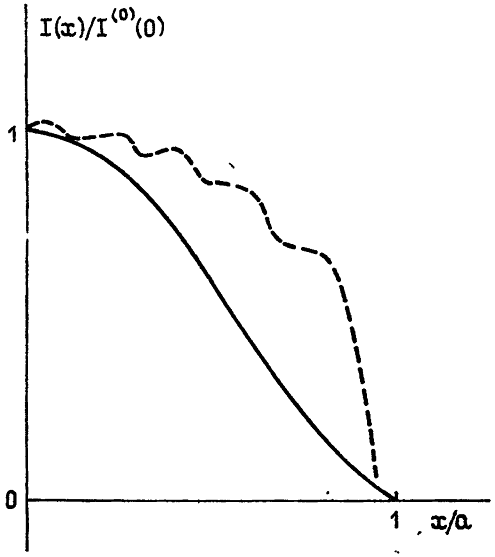

Рис. 2.

Рис. 1. Зависимость нормированной пространственной корреляционной функции $\Gamma(x, 0; z)/\Gamma^{(0)}(0, 0; z)$ от поперечной координаты x/a. Значение $V=20$.

Рис. 2. Зависимость нормированной средней интенсивности поля $I(x)/I^{(0)}(0)$ от поперечной координаты x/a. Значение $V=20$.

Из рис. 1 видно, что в открытом статистически нерегулярном волноводе значение корреляционной функции $\Gamma(x_1, x_2; z)$ между точками, находящимися вне радиуса корреляции, т. е. при $\Delta x > x_c$, значительно меньше по сравнению с соответствующим значением в регулярном волноводе. Это отмечалось также в разд. 3.

Рассматриваемое явление приводит также к сильному подавлению осцилляционной части в распределении средней интенсивности $I(x)$ вдоль поперечной координаты x. Это видно из рис. 2, где приведены кривые зависимости нормированной интенсивности $I(x)/I^{(0)}(0)$ от x/a в двух случаях: статистически нерегулярного волновода (сплошная кривая) и регулярного волновода, возбужденного пространственно-некогерентным источником излучения (штрихованная кривая).

Выражения для пространственной корреляционной функции поля и его средней интенсивности были получены нахождением главных членов их асимптотических разложений по малому параметру квазиклассичности $\xi = 1/(k_0 a p_F(x))$. Поэтому условием применимости полученных соотношений является малость параметра ξ, т. е. $\xi \ll 1$. В многомодовых волноводах это условие выполняется во всей области поперечного сечения, кроме узких зон с шириной порядка $\delta x \sim a/V \ll a$ вблизи каустик $x = \bar{x}_1, \bar{x}_2$ $(p_F(\bar{x}_i) = 0,\ i = 1, 2)$.

Таким образом, в настоящей работе удалось исследовать асимптотическое поведение пространственной когерентности поля, распространяющегося в открытом многомодовом статистически нерегулярном волноводе с произвольным профилем невозмущенного показателя преломления. Для этого оказалось достаточным знание стационарного распределения средней мощности по модам, устанавливающегося на большом расстоянии от области ввода излучения. Последнее находится решением уравнения типа Эйнштейна—Фоккера для плотности вероятности распределения лучей в статистически нерегулярном волноводе.

Автор благодарен В. Е. Шапиро и А. С. Чиркину за полезное обсуждение работы и замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Воробьев В. В. — Изв. вузов — Радиофизика, 1971, **14**, № 8, с. 1283.
2. Абдуллаев С. С. — ДАН УзССР, 1979, № 8, с. 9.
3. Кляцкин В. И. — Акуст. журн., 1980, **26**, № 2, с. 209.
4. Артельный В. В., Раевский М. В. — Изв. вузов — Радиофизика, 1984, **27**, № 9, с. 1142.
5. Артельный В. В., Зайцев В. Ю., Раевский М. А. Препринт ИПФ АН СССР № 108, Горький, 1984.
6. Зайцев В. Ю., Раевский М. А. — Изв. вузов — Радиофизика, 1985, **28**, № 1, с. 65.
7. Пузенко А. А. — Изв. вузов — Радиофизика, 1977, **20**, № 8, с. 1185.
8. Чаевский Е. В. — Изв. вузов — Радиофизика, 1978, **21**, № 3, с. 357.
9. Пузенко А. А., Чаевский Е. В. — Изв. вузов — Радиофизика, 1978, **21**, № 6, с. 857.
10. Абдуллаев С. С. — ЖТФ, 1981, **51**, № 4, с. 697.
11. Абдуллаев С. С. — Квантовая электроника, 1984, **11**, № 5, с. 904.
12. Каценеленбаум Б. З. Теория нерегулярных волноводов с медленно меняющимися параметрами. — М.: АН СССР, 1961.
13. Абдуллаев С. С. Диссертация. Красноярск, 1980.
14. Gloge D. — Bell Syst. Techn. J., 1972, **51**, № 8, p. 1767.
15. Шатров А. Д. — Изв. вузов — Радиофизика, 1977, **20**, № 8, с. 1153.
16. Шатров А. Д. — Радиотехника и электроника, 1977, **22**, № 7, с. 1496.
17. Маслов В. П., Федорюк М. В. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. — М.: Наука, 1976.
18. Маркузе Д. Оптические волноводы. — М.: Мир, 1974.
19. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1971.

Ташкентский государственный университет

Поступила в редакцию 9 августа 1984 г.

ASYMPTOTIC BEHAVIOUR OF SPATIAL COHERENCE OF RADIATION FIELD IN A STATISTICAL NONREGULAR WAVEGUIDES

S. S. Abdullaev

The asymptotic calculation method of the field spatial coherence in the statistical nonregular opened waveguides with the arbitrary index profile is proposed. The field spatial correlation function at the large distance from the waveguide excited region is defined by the mode distribution of the mean power. The one in the multimode waveguide is obtained by the solution of the Einstein—Fokker equation for the ray density distributions. The closed forms of the spatial correlation function was obtained by the asymptotic expansion in small quasiclassical parameter. The concrete example of the waveguide with the randomly curve of axes was considered.