

6. В силу принципа двойственности коэффициент электрической поляризуемости бесконечно тонкого идеально проводящего плоского кольца, конгруэнтного отверстию, равен 8π [4].

Авторы благодарят М. Л. Левина и Я. Н. Фельда за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фихманас Р. Ф., Фридберг П. Ш. — Радиотехника и электроника, 1973, 18, № 6, с. 1122.
2. Фихманас Р. Ф., Фридберг П. Ш. — Радиотехника и электроника, 1978, 23, № 8, с. 1625.
3. Розенблюм А. В., Фридберг П. Ш. — ДАН СССР, 1985, 283, № 6, с. 1371; — Радиотехника и электроника, 1986, 31, № 6, с. 1057.
4. Мандельштам Л. И. — ЖТФ, 1945, 15, № 9, с. 471.

Гродненский государственный университет

Поступила в редакцию 3 марта 1986 г.

УДК 537.86:530.182; 536—12

РОЖДЕНИЕ И ДИНАМИКА СПИРАЛЬНЫХ ВИХРЕЙ В ДВУМЕРНОЙ МОДЕЛИ ГИНЗБУРГА — ЛАНДАУ

И. С. Арансон; М. И. Рабинович

1. Самозарождение существенно неоднородных и анизотропных образований — спиральных вихрей — в изначально однородных изотропных неравновесных средах представляется одной из наиболее интересных и общих проблем современной нелинейной физики [1–4]. Для решения этой проблемы, как минимум, необходимо ответить на два вопроса — в чем природа универсальности спиральных структур и какие физические механизмы приводят к их возникновению. Ниже показывается, что универсальность спиральных образований связана с весьма общими топологическими свойствами однопараметрических семейств функций $H_{t_0}(x, y) = \text{const}$, описывающих пространственные образы (мгновенные снимки) в двумерных неравновесных средах, независимо от их природы. На примере сред, описываемых двумерным уравнением Гинзбурга — Ландау, выяснен механизм рождения спиралей — показано, что такие структуры развиваются при изменении степени неравновесности среды в результате иерархии пространственных неустойчивостей с различным типом симметрии.

2. В известных экспериментах (см., например, [5–7]) доступные прямому наблюдению структуры двумерного поля выделены контрастом либо цветом. В частности, концентрационные структуры, наблюдаемые в двумерном реакторе, где протекает автокаталитическая химическая реакция, представляют собой именно цветные «узоры» [7]. Для определенности ограничимся рассмотрением подобных структур, полагая, что кинетика реакции определяется взаимодействием лишь двух компонент:

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} = n_1 - (n_1^2 + n_2^2)(n_1 - \beta n_2) + e(\Delta n_1 + c \Delta n_2), \quad (1)$$

$$\frac{\partial n_2}{\partial t} = n_2 - (n_1^2 + n_2^2)(n_2 + \beta n_1) + e(\Delta n_2 - c \Delta n_1),$$

где $n_1(x, y, t)$ и $n_2(x, y, t)$ — концентрации этих компонент, а e характеризует величину диффузии. Система (1) представляет собой вариант известной λ – ω системы, используемой для моделирования нелинейной динамики различных неравновесных сред [2, 8].

Распределение цвета в концентрационных структурах будет определяться наложением цветов индивидуальных компонент. Поскольку топология структур (взаиморасположение линий постоянного цвета) должна быть инвариантна относительно пропорционального изменения насыщенности любого из цветов, задача об исследовании структур сводится к анализу линий уровня функции $\frac{n_1(x, y, t_1)}{n_2(x, y, t_1)} = H_{t_0}(x, y)$.

Нас будут интересовать такие конфигурации поля $H_{t_0}(x, y)$, которые невозможно перевести непрерывной деформацией в пространственно однородные. Подобные конфигурации определяются наличием у поля $H_{t_0}(x, y)$ особых точек (где это поле не определено), «сепаратрис» и т. д., которые соответствуют элементарным структурам в виде спиралей, вихрей, игл и пр. [3, 12]. Бифуркациям — превращениям одних структур в другие — отвечает изменение топологии линий уровня $H_{t_0}(x, y)$, определяемое системой (1) при изменении параметра (либо времени). Найдем также изменения, используя в качестве параметра величину диффузии e .

3. Заменой $a = n_1 + in_2$ система (1) сводится к уравнению Гинзбурга—Ландау

$$\frac{\partial a}{\partial t} = a - (1+i\beta) |a|^2 a + e(1-ic) \Delta a. \quad (2)$$

Интересующая нас функция $H_{t_0}(x, y)$ связана с фазой комплексного поля $a = |a| \exp(i\varphi)$ соотношением $H = \text{tg } \varphi$. Исследуем полевые структуры, определяемые (2) при периодических граничных условиях: $a(x, y) = a(x+L, y) = a(x, y+L)$. Кроме того, учтем, что нетривиальные решения (2) возможны лишь при $\beta c > 1$.

Как известно [9], при значениях диффузии $e > e_0 = (\beta c - 1) L^2 / (\pi^2 (1 + c^2))$ и при $\beta c > 1$ в рассматриваемой среде устойчивы лишь пространственно однородные колебания $a(x, y, t) = e^{-\beta t}$. При $e < e_0$ пространственно однородное решение неустойчиво и возмущения ξ на его фоне описываются уравнением

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -(1+i\beta) (\xi + \xi^*) + e(1-ic) \Delta \xi - (1+i\beta) (\xi |\xi|^2 + 2|\xi|^2 \xi), \quad (3)$$

которое связано с (2) заменой $a(x, y, t) = (1 + \xi(x, y, t)) e^{-i\beta t}$. При $e < e_0$ равновесное состояние (3) $\xi = 0$ неустойчиво по отношению к возмущениям вида

$$\xi \sim \exp(\pm ik_0 x), \quad \xi \sim \exp(\pm ik_0 y), \quad (4)$$

где $k_0 = 2\pi/L$. В общем случае ляпуновские показатели возмущений вида $\xi \sim \exp[i(k_n x + k_m y)]$, $k_{m,n} = 2\pi m, n/L$ определяются выражением [10]

$$\lambda_{n,m} = -1 - e(k_n^2 + k_m^2) \pm D_{nm}, \quad D_{nm}^2 = 1 - [ce(k_n^2 + k_m^2)]^2 + 2e\beta c(k_n^2 + k_m^2), \quad (5)$$

из которого следует, что при $e < e_0$ четыре показателя, соответствующие возмущениям вида (4), становятся положительными. Отыскивая при $|e - e_0| \ll e_0$ решение (3) в виде

$$\xi = (1+iB_1) (C_1 e^{ik_0 x} + C_2 e^{ik_0 y} + \text{к.с.}) \quad (6)$$

и считая функции $C_{1,2}(t)$ медленными, с помощью асимптотического метода получаем уравнения для амплитуд вторичных возмущений

$$\frac{dC_{1,2}}{dt} = \lambda_1 C_{1,2} - 3\gamma C_{1,2} (|C_{1,2}|^2 + 2|C_{2,1}|^2). \quad (7)$$

Здесь $\lambda_1 = -1 - ek_0^2 + [1 - (cek_0^2)^2 + 2e\beta ck_0^2]$ — ляпуновский показатель для возмущений вида (4), B_1 — компонента собственного вектора линеаризованной системы (3), B_1' — системы, сопряженной к (3), $\gamma = (1+B_1^2)(1+\beta(1+B_1 B_1')) / (B_1 - B_1')$. Функция $H_{t_0}(x, y)$ для (6) при $C_{1,2} \neq 0$ не имеет особенностей, и это решение описывает простейшую структуру в виде решетки вихрей (см. рис. 1).

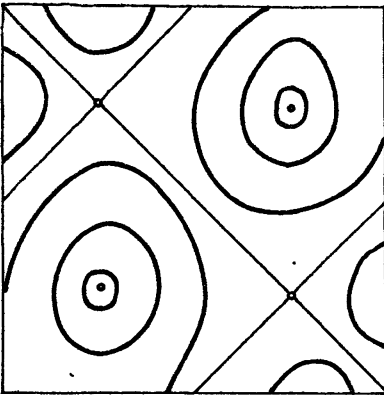


Рис. 1.

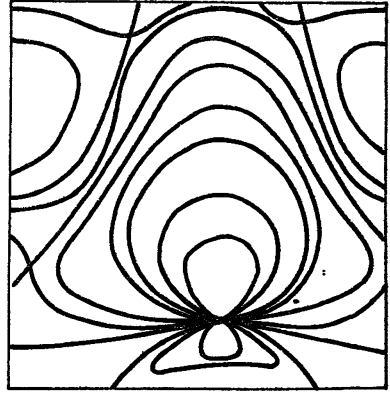


Рис. 2.

При дальнейшем уменьшении e , в свою очередь, становится неустойчивым и решение вида (6) — возбуждаются еще четыре волны с волновыми векторами, расположенными под углом 45° к исходным. Это следует из (5), поскольку при уменьшении e еще четыре показателя приближаются к нулю. Соответствующее 8-модовое решение при этом имеет вид

$$\xi(x, y, t) = (1+iB_1) (C_1 e^{ik_0 x} + C_2 e^{ik_0 y} + \text{к.с.}) + (1+iB_2) (C_3 e^{ik_0(x+y)} + C_4 e^{ik_0(x-y)} + \text{к.с.}),$$

где $C_{1,2,3,4}$ — медленные комплексные функции времени (по-прежнему, $|e - e_0| \ll e_0$), удовлетворяющие системе уравнений

$$* B_1 = (D-1)/4cck_0^2, \quad B_1' = -(D+1)/4eck_0^2, \quad D = [1 - (eck_0^2)^2 + 2\beta cck_0^2]^{1/2}.$$

$$\frac{d\vec{C}_{1,2,3,4}}{dt} = f_{1,2,3,4}(C_1, C_1^*, C_2, C_2^*, C_3, C_3^*, C_4, C_4^*). \quad (8)$$

Можно убедиться, что эта система имеет частное решение вида $C_1=C_2=\text{const}$, $C_3=C_4=\text{const}$, которому в исходных переменных соответствует решение

$$a(x, y, t) = e^{-i\beta t} (1+2C_1(1+iB_1)(\sin k_0x + \sin k_0y) + 4C_3(1+iB_2)\sin k_0x \cos k_0y). \quad (9)$$

Фазовая функция этого решения имеет вид

$$\varphi(x, y, t) = -\beta t + \text{arctg } H_{t_0}(x, y), \quad (10)$$

где

$$H_{t_0}(x, y) = 2[C_1B_1(\sin k_0x + \sin k_0y) + 2C_3 \sin k_0x \cos k_0y] \times \\ \times [1 + 2(C_1(\sin k_0x + \sin k_0y) + 2C_3 \sin k_0x \cos k_0y)].$$

При выполнении условий

$$|B_2/(B_1 - B_2)C_1| \ll 8, \quad |B_1/(B_1 - B_2)C_3| \ll 8$$

функция $H_{t_0}(x, y)$ в общем случае имеет особенности, т.е. мгновенный снимок, описываемый (10), будет содержать новые, по сравнению с (6), элементы структуры.

Вид этих новых элементов определяется поведением линий уровня скалярного поля $H_{t_0}(x, y)$ в малой окрестности особенности. Общие топологические свойства интересующих нас конфигураций изучаются геометрической теорией слоений [8, 12]. Из этой теории, в частности, следует, что в нашем случае (в силу сохранения индекса), ввиду аналитичности функций $n_1(x, t)$ и $n_2(x, t)$, наиболее типичная бифуркация — это превращение при изменении ϵ пары вихрей в пару узлов (или спиралей).

Детальный анализ решения (9) показывает, что при уменьшении ϵ в слоении $H_{t_0}(x, y)$ действительно появляется пара узлов. Они и соответствуют спиральным вихрям (см. рис. 2). С помощью решения (9) удастся проследить и за бифуркациями рождения спиралей. Этот результат представлен на рис. 3.

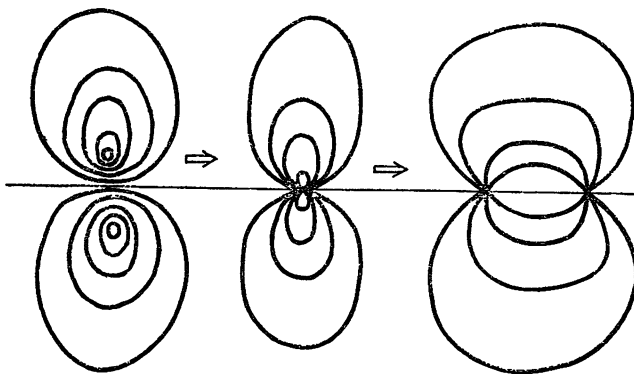


Рис. 3.

Ввиду линейного роста фазы решения (9) во времени все элементы структуры будут вращаться с частотой β . Заметим также, что, в случае когда C_i не постоянны — в фазовом пространстве (8) существует предельный цикл либо странный аттрактор, динамика пространственных образов будет соответственно периодической либо стохастической.

Исследуя топологию слоений, возможно предсказать и более сложные пространственные трансформации пространственных структур как в двумерных, так и в трехмерных средах. В частности, в пороговых (возбудимых) средах (см., например, [2, 11]) помимо описанных переходов возможны также рождения спиральных волн с различным числом рукавов и т. д.

Авторы признательны А. В. Гапонову-Грехову за стимулирующие дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Nobel Symp. of Chaos. — Phys. Scripta, 1983, 9, 1.
2. Self-Organization. Autowaves and Structures far from Equilibrium. / Ed. Krinsky V. I. — Springer, 1984.
3. Heutmaker M. S., Frankel P. N., Gollub J. P. — Phys. Rev. Lett., 1985, 54, p. 1369.
4. Sawada Y., Dougherty A., Gollub J. P. — Phys. Rev. Lett., 1986, 56, p. 1260.

5. Linde P. Self-Organization. Autowaves and Structures far from Equilibrium. / Ed. Krinsky V. I. — Springer, 1984.
6. Agladze K. I., Krinsky V. I. — Nature, 1984, 308, p. 834.
7. Vidal C., Pascault A. In Book: Evolution of Order and Chaos. / Ed. Nakken H. — Springer, N. Y., 1982, p. 74.
8. Тамура И. Топология слоений. — М.: Мир, 1979, с. 317.
9. Kuramoto Y. Chemical Oscillations, Waves and Turbulence. — Springer, 1984.
10. Арансон И. С., Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. П. — ЖЭТФ, 1985, 89, с. 98.
11. Голубев В. И. и др. — Письма в ЖЭТФ, 1985, 48, с. 84.
12. Рожков С. С. — УФН. 1986. 149. с. 259.

Институт прикладной физики
АН СССР

Поступила в редакцию
30 июля 1986 г.

ВНИМАНИЮ АВТОРОВ!

Всесоюзное агентство по авторским правам (ВААП) сообщает, что журнал «Радиофизика», изданный в СССР в 1980—82 гг., перепечатан за рубежом. Гонорар, поступивший за право его перепечатки, выплачивается по желанию авторов в рублях или чеках Внешпосылторга.

Для получения гонорара авторам необходимо оформить справку-заявление и направить ее на расчет по адресу:

103670, Москва, ул. Б. Бронная, 6-а, Валютное управление ВААП.

Агентство также извещает авторов о следующем:

— 1 сентября 1986 г. прекращается прием справок-заявлений на выплату гонорара за статьи, опубликованные в журнале в 1980 г.;

— 1 декабря 1986 г. прекращается прием справок-заявлений на выплату гонорара за статьи, опубликованные в 1981 г.;

— 1 января 1987 г. прекращается прием справок-заявлений на выплату гонорара за перепечатку за рубежом статей, опубликованных в журнале в 1982 г.
