

В [4] показано, что эти величины при увеличении числа  $N$  сходятся к точным значениям коэффициентов отражения и пропускания.

Типичная экспериментальная зависимость  $T_1(f)$  представлена на рис. 16, где  $f$  — частота;  $f_{кр}$  — критическая частота пустого волновода;  $L$  (дБ) =  $10 \lg |T_1|^2$ . Ясно видно, что уже при величинах зазора  $\delta/b \approx 0,01$  наблюдается возбуждение высших типов колебаний, что приводит к значительной (более 20 дБ) режекции пропускания волны  $H_{10}$  такой вставкой. Поведение резонансной частоты  $f_p$  и относительной (на уровне —3 дБ) ширины полосы частот режекции  $\Delta f/f_p$  в зависимости от величины  $\delta/b$  представлены на рис. 2 точками. При этом с ростом  $\delta/b$  величина  $L_p = |L(f_p)|$  плавно увеличивалась до значения  $\sim 35$  дБ.

Анализ выражений для  $a_{mn}$  и  $b_{mn}$  системы (2) показал, что в данном случае дифракционное взаимодействие возможно между волнами с совпадающими первыми индексами, т. е. в результате дифракции волны  $H_{10}$  возбуждаются волны  $H_{1n}$  и  $E_{1n}$ . Подобным образом установлено, что экспериментально наблюдаемый резонанс при малых зазорах ( $\delta/b \lesssim 0,05$ ) связан, главным образом, с возбуждением и накоплением энергии волны  $E_{11}$  в образованном диэлектрическом резонаторе. При малых  $\delta/b$  возможно получение асимптотических разложений для коэффициентов  $a_{mn}$  и  $b_{mn}$ , а анализ (2) значительно упрощается в предположении существования только двух волн  $H_{10}$  и  $E_{11}$ . Результаты численного расчета спектральных кривых  $L(f)$  в таком приближении приведены на рис. 3, а на рис. 2 сплошными линиями показаны зависимости  $f_p$  и  $\Delta f/f_p$ , рассчитанные по этой методике. Из этих рисунков видно, что при  $\delta/b \lesssim 0,05$  двухволновая аппроксимация оказывается достаточной для расчета  $f_p$  и  $\Delta f/f_p$ , однако дальнейший рост величины  $\delta/b$  требует более полного представления разложения (1).

Авторы благодарны А. Г. Свешникову за полезные обсуждения полученных результатов, а также С. В. Виноградову и А. Е. Екжанову за участие на начальном этапе проведенных работ.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Тезисы докладов Всесоюзной научно-технической конференции «Проектирование и применение радиоэлектронных устройств на диэлектрических волноводах и резонаторах». — Саратов: Гос. ун-т, 1983.
2. Свешников А. Г. — ДАН СССР, 1977, 236, № 5, с. 1076.
3. Свешников А. Г., Моденов В. П. В кн.: Вычислительные методы и программирование. — М.: Гос. ун-т, 1965, вып. 3, с. 364.

Московский государственный университет

Поступила в редакцию  
9 декабря 1985 г.

УДК 621.372.831.4:537.874.6

### КОЭФФИЦИЕНТЫ ПОЛЯРИЗУЕМОСТИ КОЛЬЦЕВОГО ОТВЕРСТИЯ В НЕОГРАНИЧЕННОМ ПЛОСКОМ ЭКРАНЕ НУЛЕВОЙ ТОЛЩИНЫ

Р. С. Мейерова, П. Ш. Фридберг

1. Как известно, в дипольном приближении характеристики рассеяния малого (по сравнению с длиной волны) отверстия, прорезанного в неограниченном плоском идеально проводящем экране нулевой толщины, определяются коэффициентом  $p$  электрической и тензором  $m$  магнитной поляризуемости отверстия. Последние являются линейными функционалами решений соответствующих аналоговых задач электр- и магнитостатики [1].

2. Пусть в полупространстве  $z < 0$ , ограниченном плоским экраном, существует однородное электрическое поле единичной напряженности. Прорежем в экране кольцевое отверстие, внутренний и внешний радиусы которого равны соответственно  $\alpha$  и 1. Потенциал  $u(\rho)$  на отверстии удовлетворяет уравнению

$$-4\pi \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\alpha}^1 \left[ \frac{\partial}{\partial z'} g(\rho, z; \rho', z') \right]_{z'=0} u(\rho') \rho' d\rho' = 1, \quad \alpha \geq 0, \quad \rho \in [\alpha, 1], \quad (1)$$

где

$$g(\rho, z; \rho', z') = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} J_0(k\rho) J_0(k\rho') [e^{-k|z-z'|} - e^{-k|z+z'|}] dk \quad (2)$$

— аксиально-симметричная часть функции Грина уравнения Лапласа для полупространства  $z > 0$ , подчиненная граничным условиям Дирихле,  $J_\nu(x)$  — функция Бесселя.

Перепишем уравнение (1) в виде

$$2 \int_0^{\infty} J_0(k\rho) U(k) k^2 dk = 1, \quad \alpha \geq 0, \quad \rho \in [\alpha, 1], \quad (3)$$

где

$$U(k) = \int_{\alpha}^1 J_0(k\rho) u(\rho) \rho d\rho \quad (4)$$

— трансформанта Ханкеля потенциала  $u(\rho)$ . Коэффициент электрической поляризуемости отверстия равен

$$p(\alpha) = 2\pi \int_{\alpha}^1 u(\rho) \rho d\rho = 2\pi U(0). \quad (5)$$

При  $\alpha=0$  (круглое отверстие) известно точное решение задачи:

$$u(\rho) = \frac{1}{\pi} (1-\rho^2)^{1/2}, \quad U(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} k^{-3/2} J_{3/2}(k), \quad p(0) = 2/3, \quad (6)$$

а при  $\alpha>0$  (кольцевое отверстие) — лишь поведение потенциала вблизи концов  $[\alpha, 1]$ :

$$u(\rho) \propto [(\rho-\alpha)(1-\rho)]^{1/2}, \quad \rho \rightarrow \alpha; 1. \quad (7)$$

Для вычисления  $p(\alpha)$  применим к уравнению (3) метод Галеркина, полагая

$$u(\rho) = \sum_{\nu=1}^N A_{\nu}^N u_{\nu}(\tau; \rho), \quad (8)$$

где  $u_{\nu}(\tau; \rho)$  — некоторая полная система базисных функций (БФ), поведение которых у концов  $[\alpha, 1]$  описывается параметром  $\tau>0$ :

$$u_{\nu}(\tau; \rho) \propto [(\rho-\alpha)(1-\rho)]^{\tau}, \quad \alpha>0, \quad \rho \rightarrow \alpha; 1. \quad (9)$$

Коэффициенты  $A_{\nu}^N$  находятся из системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{\nu=1}^N G_{\mu\nu} A_{\nu}^N = U_{\mu}(\tau; 0), \quad 1 \leq \mu \leq N, \quad (10)$$

матричные элементы которой равны

$$G_{\mu\nu} = 2 \int_0^{\infty} U_{\mu}(\tau; k) U_{\nu}(\tau; k) k^2 dk, \quad (11)$$

где

$$U_{\nu}(\tau; k) = \int_{\alpha}^1 J_0(k\rho) u_{\nu}(\tau; \rho) \rho d\rho, \quad U_{\nu}(\tau; k) \propto k^{-(\tau+3/2)}, \quad k \rightarrow \infty. \quad (12)$$

Заметим, что выбор БФ, не допускающих аналитического вычисления трансформант Ханкеля  $U_{\nu}(\tau; k)$ , приводит к матричным элементам в виде тройных интегралов. Коэффициент электрической поляризуемости в  $N$ -м приближении равен

$$p_N(\alpha) = 2\pi \sum_{\nu=1}^N A_{\nu}^N U_{\nu}(\tau; 0). \quad (13)$$

Как видим, для его вычисления нужны не сами БФ, а лишь их трансформанты Ханкеля.

При любом  $\tau>0$  матричные элементы СЛАУ конечны и метод Галеркина сходится. Однако скорость его сходимости существенно зависит от величины  $\tau$  и становится максимальной при  $\tau=1/2$ , т. е. когда каждая БФ учитывает условие на ребре.

3. Проиллюстрируем последнее утверждение на примере вычисления коэффициента электрической поляризуемости круглого отверстия. Следуя [2], полагаем

$$U_{\nu}(\tau; k) = k^{-(1+\tau)} J_{2\nu-1+\tau}(k), \quad \nu = 1, 2, \dots, \quad (14)$$

что отвечает использованию в качестве БФ на  $[0, 1]$  полиномов Якоби  $P_{\nu-1}^{(\tau, 0)}(2\rho^2-1)$  с весом  $(1-\rho^2)^{\tau}$ . На рис. 1 показана зависимость относительной погрешности  $N$ -го приближения  $\delta_N = 1 - \frac{3}{2} p_N(0)$  от  $\tau$ . Как видно из рисунка,  $\lim_{N \rightarrow \infty} \delta_N = 0$  при любом  $\tau>0$ . Однако скорость сходимости последовательности  $\delta_N$  существенно зависит от  $\tau$  и становится максимальной при  $\tau=1/2$ .

4. Вернемся теперь к исходной задаче о вычислении коэффициента электрической поляризуемости кольцевого отверстия. В работе [3] построена полная система функций  $\Phi_s^0(\tau; \rho)$ , которые равны нулю вне  $[\alpha, 1]$ , имеют у концов  $[\alpha, 1]$  поведение (9) и в то же время допускают явное вычисление интегралов с цилиндрическими функциями индекса  $s$ . В частности,

$$J_v^0(\tau; k) = \int_{\alpha}^1 J_0(k\rho) \Phi_v^0(\tau; \rho) \rho d\rho = k^{-(\tau+1/2)} J_{n(v)+\tau+1/2} \left( \frac{1-\alpha}{2} k \right) J_{m(v)} \left( \frac{1+\alpha}{2} k \right), \quad (15)$$

$$n(v) = \frac{1}{4} [3v-2-(-1)^v(v-2)], \quad m(v) = \frac{v}{4} [1+(-1)^v], \quad v=1, 2, \dots$$

Нам не известна другая полная система функций, обладающих на  $[\alpha, 1]$  указанными свойствами.

Выберем в качестве базисных функции  $\Phi_v^0(1/2; \rho)$ . В таком случае  $U_v(\tau; k) = J_v^0(1/2; k)$ , а выражение (13) принимает вид

$$p_N(\alpha) = (\pi/2) (1-\alpha) A_1^N. \quad (16)$$

Результаты численного счета при  $N=3$  сведены в табл. 1. Оценка точности вычисления матричных элементов  $G_{\mu\nu}$  и численное исследование сходимости последовательности  $p_N(\alpha)$  показали, что для всех  $\alpha$  при указанном  $N$  погрешность результатов не превосходит половины единицы четвертой значащей цифры. Время счета одного значения  $p$  зависит от  $\alpha$  и на ЭВМ ЕС-1060 составляет от 5 до 20 с.

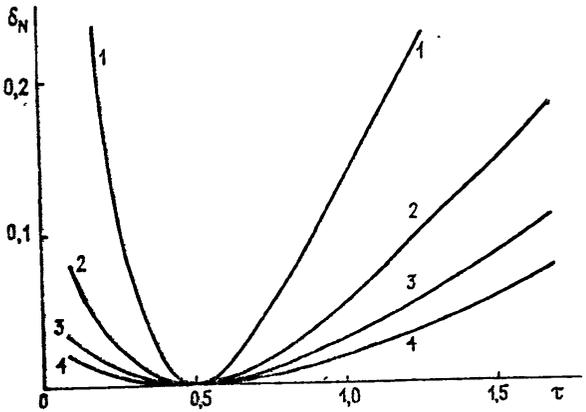


Рис. 1. Зависимость относительной погрешности  $\delta_N$  от  $\tau$ . Кривые 1, 2, 3, 4 соответствуют  $N = 1, 2, 3$  и 4.

В предельном случае  $\alpha=0$  (круглое отверстие) используемые БФ не имеют нужного поведения в окрестности начала координат, тем не менее последовательность  $p_N(0)$  быстро сходится к  $2/3$  — значению коэффициента электрической поляризуемости круглого отверстия. Этот факт объясняется тем, что область  $\rho \ll 1$  вносит в величину  $p$  малый вклад.

Таблица 1

$\alpha$	0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30
$p$	0,6666	0,6254	0,5827	0,5391	0,4948	0,4502	0,4056
$\alpha$	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65
$p$	0,3614	0,3179	0,2756	0,2348	0,1960	0,1594	0,1256
$\alpha$	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	
$p$	0,09489	0,06773	0,04452	0,02571	0,01173	0,003008	

5. Для аксиально-симметричного отверстия между решениями задач электро- и магнитостатики существует связь [1], следствием которой является соотношение  $m = -2pI$ , где  $I$  — единичный тензор.

6. В силу принципа двойственности коэффициент электрической поляризуемости бесконечно тонкого идеально проводящего плоского кольца, конгруэнтного отверстию, равен  $8\pi$  [4].

Авторы благодарят М. Л. Левина и Я. Н. Фельда за обсуждение работы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Фихманас Р. Ф., Фридберг П. Ш. — Радиотехника и электроника, 1973, 18, № 6, с. 1122.
2. Фихманас Р. Ф., Фридберг П. Ш. — Радиотехника и электроника, 1978, 23, № 8, с. 1625.
3. Розенблюм А. В., Фридберг П. Ш. — ДАН СССР, 1985, 283, № 6, с. 1371; — Радиотехника и электроника, 1986, 31, № 6, с. 1057.
4. Мандельштам Л. И. — ЖТФ, 1945, 15, № 9, с. 471.

Гродненский государственный университет

Поступила в редакцию  
3 марта 1986 г.

УДК 537.86:530.182; 536—12

## РОЖДЕНИЕ И ДИНАМИКА СПИРАЛЬНЫХ ВИХРЕЙ В ДВУМЕРНОЙ МОДЕЛИ ГИНЗБУРГА — ЛАНДАУ

*И. С. Арансон; М. И. Рабинович*

1. Самозарождение существенно неоднородных и анизотропных образований — спиральных вихрей — в изначально однородных изотропных неравновесных средах представляется одной из наиболее интересных и общих проблем современной нелинейной физики [1–4]. Для решения этой проблемы, как минимум, необходимо ответить на два вопроса — в чем природа универсальности спиральных структур и какие физические механизмы приводят к их возникновению. Ниже показывается, что универсальность спиральных образований связана с весьма общими топологическими свойствами однопараметрических семейств функций  $H_{t_0}(x, y) = \text{const}$ , описывающих пространственные образы (мгновенные снимки) в двумерных неравновесных средах, независимо от их природы. На примере сред, описываемых двумерным уравнением Гинзбурга — Ландау, выяснен механизм рождения спиралей — показано, что такие структуры развиваются при изменении степени неравновесности среды в результате иерархии пространственных неустойчивостей с различным типом симметрии.

2. В известных экспериментах (см., например, [5–7]) доступные прямому наблюдению структуры двумерного поля выделены контрастом либо цветом. В частности, концентрационные структуры, наблюдаемые в двумерном реакторе, где протекает автокаталитическая химическая реакция, представляют собой именно цветные «узоры» [7]. Для определенности ограничимся рассмотрением подобных структур, полагая, что кинетика реакции определяется взаимодействием лишь двух компонент:

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} = n_1 - (n_1^2 + n_2^2)(n_1 - \beta n_2) + e(\Delta n_1 + c \Delta n_2), \quad (1)$$

$$\frac{\partial n_2}{\partial t} = n_2 - (n_1^2 + n_2^2)(n_2 + \beta n_1) + e(\Delta n_2 - c \Delta n_1),$$

где  $n_1(x, y, t)$  и  $n_2(x, y, t)$  — концентрации этих компонент, а  $e$  характеризует величину диффузии. Система (1) представляет собой вариант известной  $\lambda$ – $\omega$  системы, используемой для моделирования нелинейной динамики различных неравновесных сред [2, 8].

Распределение цвета в концентрационных структурах будет определяться наложением цветов индивидуальных компонент. Поскольку топология структур (взаиморасположение линий постоянного цвета) должна быть инвариантна относительно пропорционального изменения насыщенности любого из цветов, задача об исследовании структур сводится к анализу линий уровня функции  $\frac{n_1(x, y, t_1)}{n_2(x, y, t_1)} = H_{t_0}(x, y)$ .

Нас будут интересовать такие конфигурации поля  $H_{t_0}(x, y)$ , которые невозможно перевести непрерывной деформацией в пространственно однородные. Подобные конфигурации определяются наличием у поля  $H_{t_0}(x, y)$  особых точек (где это поле не определено), «сепаратрис» и т. д., которые соответствуют элементарным структурам в виде спиралей, вихрей, игл и пр. [3, 12]. Бифуркациям — превращениям одних структур в другие — отвечает изменение топологии линий уровня  $H_{t_0}(x, y)$ , определяемое системой (1) при изменении параметра (либо времени). Найдем также изменения, используя в качестве параметра величину диффузии  $e$ .