

УДК 517.938;537.86:519

## ОБ ЭВОЛЮЦИИ СПЕКТРА МОЩНОСТИ ПРИ ПЕРЕХОДЕ К ХАОСУ ЧЕРЕЗ УДВОЕНИЯ ПЕРИОДА

А. С. Пиковский

Рассмотрено развитие спектра мощности при переходе к хаосу через удвоения периода для систем с различными свойствами симметрии по отношению к сдвигу времени. Выведен универсальный закон эволюции дискретных компонент спектра до точки перехода в системах с непрерывной симметрией. Показано, что в отсутствие непрерывной симметрии дискретные линии спектра при определенных значениях параметра приобретают лоренцевскую форму и их ширина растет с критическим индексом  $1/2$ . Обсуждена связь появления центрального пика в спектре с нарушением симметрии фазового пространства хаоса. Полученные результаты позволяют нарисовать полную картину эволюции спектра.

**Введение.** Переход к стохастичности вызывает в последнее время значительный интерес [1, 2]. Один из наиболее часто встречающихся сценариев такого перехода — возникновение хаоса в результате бифуркаций удвоения периода. Такой переход наблюдался во многих экспериментах [3–8]. Согласно теории, созданной Фейгенбаумом [9], бифуркации удвоения периода подчиняются универсальным количественным закономерностям. В рамках этой теории были найдены различные универсальные константы, описывающие эволюцию наблюдаемых величин. Особый интерес представляет расчет спектра мощности, поскольку его удобно измерять в эксперименте. Некоторые закономерности эволюции спектра мощности были найдены в работах [10–17].

В данной работе рассматривается ряд характеристик спектра, тесно связанных со свойствами симметрии динамической системы. Основную роль играет различие между двумя типами симметрии системы по отношению к сдвигу времени — непрерывной и дискретной. Системами с непрерывной симметрией мы будем называть автономные системы с непрерывным временем, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями или уравнениями в частных производных. Они инвариантны по отношению к сдвигу времени на любую величину. Системами с дискретной симметрией назовем неавтономные системы с периодической зависимостью от времени и дискретные отображения. Они инвариантны только по отношению к сдвигам времени на величины, кратные периоду (для отображений — кратные единице).

В некоторых отношениях различие между этими двумя типами симметрии несущественно. Например, в обоих случаях бифуркации удвоения периода подчиняются одному и тому же универсальному закону

$$r_c - r_n \sim \delta^{-n}, \quad \delta = 4,669\dots, \quad (1)$$

где  $r_n$  — бифуркационные,  $r_c$  — критические значения параметра. Эта универсальность обусловлена возможностью сведения к одномерному отображению. Для систем с непрерывной симметрией такое сведение осуществляется с помощью отображения последования: выбирается секущая в фазовом пространстве и отмечаются только точки пересечения траектории с ней. В случае дискретной симметрии отображение получается так называемым стробоскопическим методом — отмечаются значения переменных через период. Подчеркнем, что обратный переход от отображения к исходной системе не однозначен, поскольку для этого

требуется знать время движения траектории. Здесь сразу проявляется различие между типами симметрии. В случае дискретной симметрии время между двумя последовательными точками отображения фиксировано (равно периоду внешнего воздействия). Физически это означает, что удвоения периода проявляются только в амплитудной модуляции процесса, фазовая модуляция отсутствует. В случае непрерывной симметрии скорость движения траектории в общем случае непостоянна, что связано с неизохронностью колебаний. Физически это означает, что наряду с амплитудной модуляцией присутствует и фазовая.

Нагляднее всего различие в типе симметрии проявляется в спектре мощности. В частности, при хаотической амплитудной модуляции в спектре появляется широкополосная компонента, но сохраняются дискретные линии. В случае же хаотической фазовой модуляции спектр является чисто сплошным. Ранее рассматривалось поведение спектра до точки перехода к хаосу в системах с дискретной симметрией [10–15], а также уширение линии за точкой перехода в случае непрерывной симметрии [16, 17]. Для получения полной картины необходимо рассмотреть развитие спектра до точки перехода в системах с непрерывной симметрией, а также описать уширение линии в случае дискретной симметрии. Эти задачи решаются в данной работе. В разд. 1 выводится универсальный закон эволюции дискретных компонент спектра мощности до точки перехода к хаосу в системах с фазовой модуляцией. В разд. 2 рассматривается переход от дискретного спектра к сплошному для систем с дискретной симметрией. Показывается, что при определенных значениях параметра дискретные линии приобретают лоренцевскую форму и их ширина растет с критическим индексом  $1/2$ . В разд. 3 показывается, что при нарушении симметрии хаоса в спектре мощности появляется пик на нулевой частоте.

**1. Спектр до точки перехода к хаосу.** Спектр до точки перехода к хаосу состоит из дискретных компонент, число которых увеличивается при каждой бифуркации удвоения. В работах [10, 11] найдена универсальная закономерность этого процесса для случая чисто амплитудной модуляции (т. е. для систем с дискретной симметрией): суммарная интенсивность  $S_n$  появляющихся при  $n$ -й бифуркации спектральных компонент подчиняется вблизи критической точки закону подобия:

$$S_n \sim \beta^{-n}, \quad \beta = 10,48... \quad (2)$$

Константа  $\beta$  приближенно выражается через универсальную константу Фейгенбаума  $\alpha = 2,5029...$ :

$$\beta \simeq 2\alpha^4/(\alpha^2 + 1) = 10,8...$$

В этом разделе закон (2) обобщается на случай фазовой модуляции.

Как отмечалось выше, в системах с непрерывной симметрией возникает фазовая модуляция, связанная с неизохронностью колебаний. С точки зрения перехода к одномерному отображению последования это означает, что время движения траектории от одного пересечения секущей до другого зависит от точки пересечения. В общем случае амплитудной и фазовой модуляции процесс можно представить в виде

$$\ddot{f}(t) = A(t)g(\varphi(t)),$$

где  $g(\tau) = g(\tau + 2\pi)$  —  $2\pi$ -периодическая функция, определяющая форму колебаний,  $A(t)$  — амплитуда,  $\varphi(t)$  — фаза, скорость изменения которой определяется мгновенной частотой

$$\dot{\varphi} = \omega(t). \quad (3)$$

Будем считать, что и амплитудная и фазовая модуляция малы, т. е.  $A(t) = 1 + \varepsilon A^1(t)$ ,  $\omega(t) = 1 + \varepsilon \omega^1(t)$ ,  $\varepsilon \ll 1$  (заметим, что если это условие и не выполняется для исходного процесса, то оно заведомо справедливо для колебаний, возникших после нескольких первых удвоений,

так как при последовательных удвоениях степень модуляции уменьшается). Тогда в первом приближении по  $\varepsilon$

$$\bar{f}(t) = g(t + \varepsilon \int \omega^1(t) dt) + \varepsilon A^1(t) g(t),$$

т. е. амплитудную и фазовую модуляцию можно рассматривать независимо. Поскольку спектр при амплитудной модуляции рассматривался ранее [10, 11], ограничимся только процессом с чисто фазовой модуляцией:

$$f(t) = g(\varphi(t)). \quad (4)$$

Будем считать, что частота  $\omega$  примерно постоянна на каждом обороте траектории от одного пересечения секущей до другого (это достигается подходящим выбором функции  $g(\tau)$ ) и определяется точкой пересечения. Поэтому при удвоениях периода частота подчиняется рекуррентному уравнению

$$\omega_{i+1} = F(\omega_i) \quad (5)$$

и величины  $\omega_i$  обладают универсальными свойствами, выведенными Фейгенбаумом [15] для одномерных отображений. При бифуркациях удвоения периода происходит переход от  $N_n$ -оборотного цикла к  $N_{n+1}$ -оборотному, где  $N_n = 2^n$ . Обозначим период  $N_n$ -оборотного цикла через  $T_n$ . В силу введенного определения фазы

$$\varphi(T_n) - \varphi(0) = \int_0^{T_n} \omega(t) dt = N_n 2\pi. \quad (6)$$

Спектр процесса с периодом  $T_n$  состоит из гармоник на частотах  $2\pi k/T_n$ ,  $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . При переходе к циклу периода  $T_{n+1}$  прежние гармоники сохраняются и появляются новые на частотах  $2\pi l/T_{n+1}$ ,  $l = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$ . Таким образом, вновь появившиеся гармоники имеют нечетные номера. Любую  $T$ -периодическую функцию  $f(t)$  можно разделить на две части:

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t), \quad f_1(t) = (1/2)[f(t) + f(t+T/2)],$$

$$f_2(t) = (1/2)[f(t) - f(t+T/2)],$$

причем  $f_1$  содержит только четные гармоники, а  $f_2$  — только нечетные. Суммарная интенсивность нечетных гармоник  $S$  есть

$$S = (1/T) \int_0^T f_2^2(t) dt. \quad (7)$$

Наша задача состоит в вычислении закона убывания величины  $S$  при последовательных удвоениях периода. Прежде всего, преобразуем  $S$  к более удобному виду. Введем обозначение

$$\kappa(t) = \varphi(t+T/2) - \varphi(t) - \pi N, \quad (8)$$

поскольку вблизи критической точки вновь возникающий цикл мало отличается от предыдущего,  $|\kappa(t)| \ll 1$ . Тогда в первом приближении получим

$$S \simeq 1/4T \int_0^T [g'(\varphi(t))]^2 \kappa^2(t) dt \simeq h/T \int_0^T \kappa^2(t) dt, \quad (9)$$

где

$$h = (1/8\pi) \int_0^{2\pi} [g'(\tau)]^2 d\tau.$$

Подставляя (8) в (9) и используя (3), получим

$$S = h/T \int_0^T c^2(t) dt, \quad (10)$$

где

$$c(t) = \int_t^{t+T/2} d(\tau) d\tau, \quad d(t) = \omega(t) - \omega(t+T/2).$$

Отметим, что функция  $d(t)$  это как раз та часть функции  $\omega(t)$ , которая соответствует нечетным, вновь возникшим гармоникам.

Используем теперь, что процесс  $\omega(t)$  подчиняется универсальным закономерностям. В частности, Фейгенбаумом показано [15], что величины  $d_n(t)$  и  $d_{n+1}(t)$ , относящиеся соответственно к  $N_n$ -циклу и  $N_{n+1}$ -циклу, удовлетворяют соотношению

$$d_{n+1}(t) = d_n(t) \sigma(t/T_{n+1}), \quad (11)$$

где  $\sigma(x)$  — универсальная функция. С хорошей точностью  $\sigma$  можно аппроксимировать кусочно-линейной функцией [10, 15]:

$$\sigma(x) \simeq \begin{cases} \alpha^{-2}, & 0 \leq x < 1/4 \\ \alpha^{-1}, & 1/4 \leq x < 1/2 \end{cases}, \quad \sigma(x+1/2) = -\sigma(x). \quad (12)$$

Используя (11) и (12), нетрудно получить связь между величинами  $c_{n+1}(t)$  и  $c_n(t)$  (индекс  $n$  относится к  $N_n$ -циклу):

$$c_{n+1}(t) = \begin{cases} -(1/\alpha) c_n(0) + (1/\alpha^2) c_n(t), & 0 < t < T_{n+1}/4 \\ -(1/\alpha^2) c_n(0) + (1/\alpha) c_n(t), & T_{n+1}/4 < t < T_{n+1}/2 \end{cases}, \quad (13)$$

$$c_{n+1}(t + (T_{n+1}/2)) = -c_{n+1}(t).$$

Подставляя (13) в (10), сразу получим

$$S_{n+1} = ((\alpha^2 + 1)/2\alpha^4) (S_n + hV_n), \quad V_{n+1} = (\alpha - 1)^2 \alpha^{-4} V_n, \quad (14)$$

где  $V_n = c_n^2(0)$ . Уравнения (14) и являются искомым обобщением закона подобия для спектра на случай систем с фазовой модуляцией. Подставляя в линейное отображение (14) решение в виде  $S_n, V_n \sim q^n$ , находим собственные значения:

$$q_1^{-1} = \beta = \frac{2\alpha^4}{\alpha^2 + 1} = 10,8\dots, \quad q_2^{-1} = \gamma = \left( \frac{\alpha^2}{\alpha - 1} \right)^2. \quad (15)$$

Таким образом, общее решение (14), являющееся суперпозицией двух линейно независимых решений с постоянными  $q_1$  и  $q_2$ , выражается, в отличие от (2), через две универсальные константы:

$$S_n \sim S_{01} \beta^{-n} + S_{02} \gamma^{-n}. \quad (16)$$

Точное значение константы  $\gamma$ , полученное нами численно с использованием исходных соотношений (11), равно 21,02..., поскольку  $\gamma > \beta$  при больших  $n$  вкладом второго слагаемого в (16) можно пренебречь и (16) сводится к (2). Таким образом, закон убывания интенсивности вновь возникающих компонент спектра вблизи критической точки не зависит от типа симметрии системы. Подчеркнем, однако, что выведенное Фейгенбаумом [10] соотношение между отдельными спектральными компонентами справедливо только для систем с дискретной симметрией.

Универсальная константа  $\gamma$  была впервые получена в работе [17], где рассматривалось уширение спектральной линии за точкой перехода к хаосу в случае фазовой модуляции. Там было показано, что в «зеркальных» по отношению к  $r_n$  значениям параметра  $\bar{r}_n$ , удовлетворяющих закону Фейгенбаума  $r_n - r_c \sim \delta^{-n}$ , ширина линий  $\Delta_n$  меняется универсальным образом:

$$\Delta_n \sim (2\gamma)^{-n}. \quad (17)$$

Этот закон можно выразить и в форме критического индекса

$$\Delta \sim (r - r_c)^\rho, \quad \rho = (\log(2\gamma) / \log \delta) = 2,42 \dots \quad (18)$$

Приведем здесь простой вывод соотношений (17), (18). Как следует из (3), фаза  $\varphi$  есть интеграл от частоты  $\omega$ . Поэтому при хаотическом изменении  $\omega$  скорость диффузионного расплывания  $\varphi$  равна значению сплошного спектра процесса  $\omega(t)$  на нулевой частоте. В работе [14] для сплошной части спектра  $s(\nu)$  получен закон подобия

$$s_{n+1}(\nu) = \frac{1}{2} \left| \frac{1 - \exp(i\nu)\alpha^{-1}}{\alpha^2} \right|^2 s_n(\nu).$$

Для нулевой компоненты тогда имеем  $s_{n+1}(0) = (2\gamma)^{-1} s_n(0)$ . В свою очередь, ширина линии обратно пропорциональна скорости диффузионного расплывания фазы; отсюда сразу следует соотношение (17).

**2. Переход к сплошному спектру в системах с дискретной симметрией.** При дискретной симметрии спектр мощности даже в хаотическом режиме содержит наряду со сплошной компонентой  $\delta$ -пики. Переход от дискретного спектра к сплошному качественно состоит в следующем. При каждом удвоении при значениях параметра  $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$  появляются новые дискретные пики, так что в критической точке спектр дискретный, но бесконечно густой. Дискретные спектральные компоненты переходят в сплошной спектр при «зеркальных» значениях параметра  $\dots r_n \dots, r_2, r_1$  в порядке, обратном порядку их появления. Мы опишем только переход при  $r = r_1$ , все остальные переходы подобны ему. (Эти переходы иногда называют «слияниями полос» — band merging.)

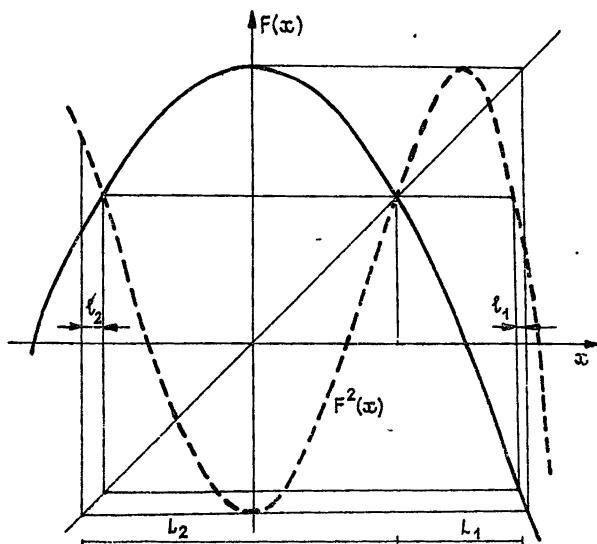


Рис. 1. Структура отображения вблизи точки исчезновения дискретного пика в спектре.

Для определенности будем говорить о дискретном отображении  $x_{i+1} = F(x_i)$ . При  $r < \bar{r}_1$  аттрактор состоит из двух интервалов  $L_1$  и  $L_2$ , причем  $F^2(L_1) = L_1$ ,  $F^2(L_2) = L_2$ . Соответственно в спектре имеется дискретный пик  $r_1$  частоте  $\omega = \pi$ . При  $r = \bar{r}_1$  интервалы  $L_1$  и  $L_2$  сливаются, и при  $r > \bar{r}_1$  существует один инвариантный интервал  $L = L_1 + L_2$ . При малом превышении порога  $r = \bar{r}_1$  точка  $x$  под действием  $F^2$  выходит из  $L_1$  ( $L_2$ ), только если она лежит в малом интервале  $l_1$  ( $l_2$ ) (см.

рис. 1). Таким образом, на месте инвариантных отрезков  $L_1$  и  $L_2$  возникают метастабильные хаотические множества [18]. Переход от странного аттрактора к метастабильному хаотическому множеству известен как кризис [19]. Особенностью данной ситуации является одновременный кризис двух симметричных аттракторов. Ряд статистических характеристик метастабильных хаотических множеств рассматривался в работах [18–20], однако, насколько нам известно, вычислений спектра мощности ранее не проводилось.

Время жизни в метастабильном хаотическом множестве подчиняется пуассоновскому распределению [18]. Вероятность выхода  $p$  из интервала  $L_1$  под действием  $F^2$  пропорциональна вероятности попадания в интервал  $l_1$ :

$$p = (\mu(l_1)/\mu(L_1)) \sim (r - \bar{r}_1)^{1/2}, \quad (19)$$

где  $\mu$  — инвариантная вероятностная мера. Вследствие симметрии вероятность выхода из интервала  $L_2$  также равна  $p$ , так как  $\mu(l_2) = \mu(l_1)$ ,  $\mu(L_2) = \mu(L_1)$ . Пуассоновский процесс полностью определяется величиной  $p$  и при больших  $k$

$$\begin{aligned} \text{prob}(x \in L_1, F^k(x) \in L_1) &= \text{prob}(x \in L_2, F^k(x) \in L_2) = \\ &= (1/2) (1 - (-1)^k \exp(-pk)). \end{aligned} \quad (20)$$

Основываясь на соотношениях (20), можно рассчитать форму спектрального пика на частоте  $\omega = \pi$ . Узкий пик в спектре определяется асимптотикой автокорреляционной функции  $R(j) = \langle x_i x_{i+j} \rangle - \langle x \rangle^2$  при больших  $j$ . Представим  $x_i$  в виде (аналогично [20])

$$x_i = u_i + y_i,$$

где

$$u_i = \begin{cases} U_1 = \int_{L_1} x d\mu, & \text{если } x_i \in L_1 \\ U_2 = \int_{L_2} x d\mu, & \text{если } x_i \in L_2 \end{cases} \quad (21)$$

Функция  $u_i$  описывает медленные переходы из одного метастабильного хаотического множества в другое, а  $y_i$  — мелкомасштабные хаотические движения. Поэтому при вычислении корреляционной функции при больших  $j$  следует учитывать только корреляционные свойства  $u_i$ . Используя (20), находим

$$R(j) = \langle u_i u_{i+j} \rangle - (U_1 + U_2)^2 = (-1)^j \exp(-pj) (U_1 - U_2)^2. \quad (22)$$

Выполняя преобразование Фурье, получаем спектр

$$S(\omega) = 2 \sum_{j=0}^{\infty} R(j) \cos \omega j = (U_1 - U_2)^2 \left[ 1 + \frac{\text{sh } p/2}{\text{ch } p/2 - \cos(\omega - \pi)} \right]. \quad (23)$$

При  $p \ll 1$  и  $\omega \approx \pi$  эта формула упрощается:

$$S(\omega) \simeq (U_1 - U_2)^2 \frac{p}{p^2 + (\omega - \pi)^2}. \quad (24)$$

Таким образом, при  $r \gtrsim \bar{r}_1$  дискретный пик трансформируется в лоренцевскую линию. Ширина этой линии  $\Delta\omega$  растет по закону

$$\Delta\omega \simeq p \sim (r - \bar{r}_1)^{1/2}, \quad (25)$$

а интенсивность остается постоянной. Полностью аналогично происходит уширение всех других дискретных пиков.

**3. Возникновение центрального пика в результате нарушения симметрии хаоса.** Рассмотренный в разд. 2 переход от дискретного спектра к сплошному можно интерпретировать как нарушение дискретной симметрии по отношению к сдвигу времени (см. ниже). Здесь мы покажем, что аналогичное явление в системах с симметрией фазового пространства приводит к появлению центрального пика. Многие динамические системы обладают той или иной группой симметрии фазового пространства. К этому типу относится, например, система Лоренца [21]. Простейшая система с симметрией фазового пространства — это периодически возбуждаемый нелинейный осциллятор

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + (dU(x)/dx) = \varepsilon \cos \omega t \quad (26)$$

с симметричным потенциалом  $U(x) = U(-x)$ . В подобных системах может существовать странный аттрактор, инвариантный относительно преобразования симметрии, либо набор симметричных странных аттракторов. Переход от одного типа поведения к другому естественно интерпретировать как нарушение симметрии [22].

Проще всего механизм нарушения симметрии хаоса можно понять на примере системы (26) с потенциалом  $U(x) = -x^2/2 + x^4/4$ . Этот случай исследовался ранее теоретически и экспериментально [23, 24]. При малых  $\varepsilon$  в каждой из двух ям потенциала происходят периодические колебания, которые при увеличении  $\varepsilon$  переходят в хаотические. При критическом значении  $\varepsilon_c$  размах хаотических колебаний увеличивается настолько, что становится возможным переход из одной ямы в другую (рис. 2). Таким образом,  $\varepsilon_c$  есть критическая точка нарушения симметрии хаоса.

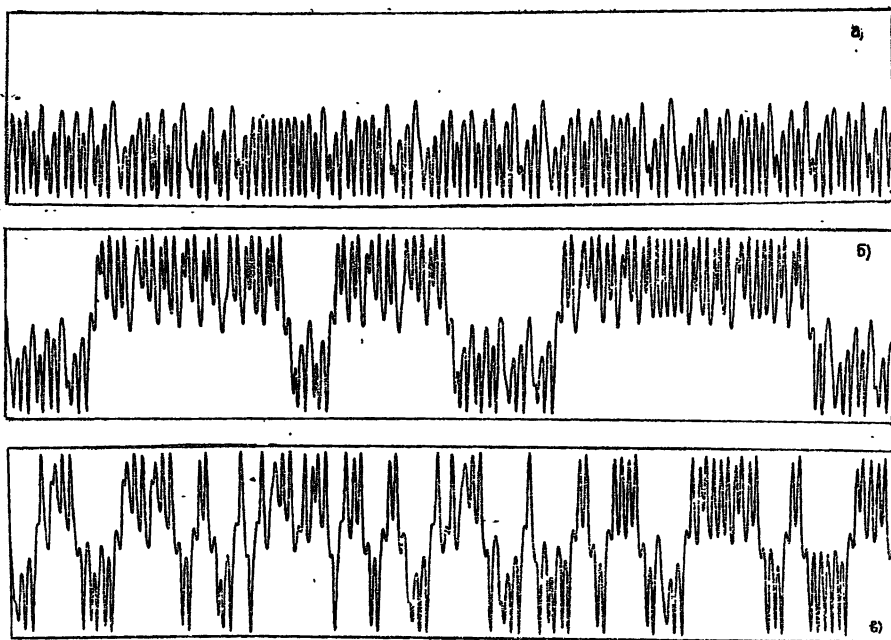


Рис. 2. Стохастические колебания в системе (26) при  $\gamma=0,5$ ;  $\omega=1$ ;  $\varepsilon=0,38$  (а);  $0,386$  (б);  $0,392$  (в). Критическое значение  $\varepsilon_c=0,383$ .

Точно так же, как в рассмотренном в разд. 2 случае, колебания в каждой из ям потенциала становятся метастабильными, а переход из одной ямы в другую описывается пуассоновским распределением вероятности. Аналогично представлению (21) колебания при  $\varepsilon \gtrsim \varepsilon_c$  можно представить в виде

$$x(t) = z(t) x_+(t), \quad (27)$$

где  $z(t) = \dot{1}$ , если частица находится в правой яме, и  $z(t) = -\dot{1}$ , если в левой;  $x_+(t)$  описывает мелкомасштабные хаотические колебания. Поскольку время корреляции  $x_+(t)$  мало по сравнению с характерным временем изменения  $z(t)$ , функции  $x_+(t)$  и  $z(t)$  можно считать независимыми. Тогда для корреляционной функции получим

$$R(\tau) = \langle x(t) x(t+\tau) \rangle = 2P(\tau)\eta^2 + r(\tau), \quad (28)$$

где  $\eta = \langle x_+(t) \rangle$ ,  $r(\tau) = \langle x_+(t) x_+(t+\tau) \rangle - \eta^2$  — корреляционная функция мелкомасштабных колебаний,  $P(\tau) = \langle z(t) z(t+\tau) \rangle$ . Поскольку  $z(t)$  — пуассоновский телеграфный случайный процесс с постоянной времени  $\tau_0$ , то  $P(\tau) = \exp(-\tau/\tau_0)$ , откуда следует  $R(\tau) = \eta^2 \exp(-\tau/\tau_0) + r(\tau)$ . В результате получаем спектр

$$S(\omega) = 2 \int_0^{\infty} R(\tau) \cos \omega \tau d\tau = s(\omega) + \frac{\eta^2 \tau_0}{1 + \tau_0^2 \omega^2}, \quad (29)$$

где  $s(\omega)$  — спектр мелкомасштабных метастабильных колебаний. Таким образом, при нарушении симметрии хаоса появляется лоренцевский пик на нулевой частоте. Ширина пика ( $\Delta\omega \sim \tau_0^{-1}$ ) пропорциональна вероятности выхода из метастабильного множества. При  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_c$  обычно  $\tau_0 \sim (\varepsilon - \varepsilon_c)^{-\nu}$ , т. е. пик переходит в  $\delta$ -функцию. Показатель  $\nu$  равен  $1/2$  для системы (26), но он не универсален и может иметь другие значения (например, в системе Лоренца). Аналогичное нарушение симметрии хаоса имеет место и для симметричных отображений типа  $x_{i+1} = ax_i - x_i^3$ .

В этой статье мы показали, что свойства спектра мощности при удвоениях периода определяются типом симметрии системы по отношению к сдвигу времени. Общая картина состоит в следующем.

а) Дискретная симметрия — неавтономные системы с периодической зависимостью от времени и дискретные отображения. При последовательных удвоениях периода возникают новые дискретные пики, их суммарная интенсивность подчиняется закону (2). За критической точкой перехода к хаосу спектр состоит из дискретных пиков и сплошной компоненты. Дискретные линии начинают уширяться по закону (25) во вполне определенных бифуркационных точках (точках «слияния полос»). Поскольку при этом уширении интенсивность линий сохраняется, суммарная интенсивность сплошного спектра также подчиняется закону (2). Заметим, что весь процесс перехода к хаосу может быть описан как последовательность нарушений симметрии. В самом деле, переход от неподвижной точки к 2-циклу есть нарушение симметрии по отношению к сдвигу времени (аналогичное фазовому переходу в антиферромагнетике). Переход от 2-цикла к 4-циклу есть также нарушение симметрии и т. д. Квазипериодический режим, существующий в критической точке, может таким образом интерпретироваться как состояние с максимально нарушенной симметрией (он не инвариантен по отношению к любым сдвигам времени). За критической точкой происходит «зеркальная» последовательность «восстановлений» симметрии — переходов от странного аттрактора, состоящего из  $2^{n+1}$  частей, к странному аттрактору, состоящему из  $2^n$  частей. При аналогичном «восстановлении» симметрии фазового пространства возникает лоренцевский центральный пик в спектре (29).

б) Непрерывная симметрия — автономные системы с непрерывным временем. До точки перехода суммарная интенсивность возникающих дискретных компонент подчиняется закону (16). Уширение начинается непосредственно за критической точкой и подчиняется универсальному закону (18). Однако линии остаются довольно узкими вплоть до более быстрого их уширения при «слиянии полос».



## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Eckmann J. P. — Rev. Mod. Phys., 1981, 53, № 4, p. 643.
2. Вул Е. Б., Синай Я. Г., Ханин К. М. — УМН, 1984, 39, № 3, с. 3.
3. Анищенко В. С., Астахов В. В. — Радиотехника и электроника, 1983, 29, № 6, с. 1109.
4. Анисимова и др. — Письма в ЖЭТФ, 1983, 37, № 8, с. 387.
5. Gibbs H. M. et al. — Phys. Rev. Lett., 1981, 46, № 7, p. 474.
6. Giglio M., Musazzzi S., Perini U. — Phys. Rev. Lett., 1981, 47, № 4, p. 243.
7. Testa J., Perez J., Jeffries C. — Phys. Rev. Lett., 1982, 48, № 11, p. 714.
8. Simoyi R. H., Wolf A., Swinney H. L. — Phys. Rev. Lett., 1982, 49, № 4, p. 245.
9. Feigenbaum M. J. — J. Stat. Phys., 1978, 19, № 1, p. 25.
10. Feigenbaum M. J. — Phys. Lett. A, 1979, 74, № 5, p. 345.
11. Nauenberg M., Rudnick J. — Phys. Rev. B, 1981, 24, № 2, p. 493.
12. Huberman B. A., Zisook A. B. — Phys. Rev. Lett., 1981, 46, № 10, p. 626.
13. Thomae S., Grossmann S. — Phys. Lett. A, 1981, 83, № 5, 181.
14. Wolf A., Swift J. — Phys. Lett. A, 1981, 83, № 5, p. 184.
15. Feigenbaum M. J. — Comm. Math. Phys., 1980, 77, № 1, p. 65.
16. Farmer J. D. — Phys. Rev. Lett., 1981, 47, № 3, p. 179.
17. Пиковский А. С. — Изв. вузов — Радиофизика, 1982, 25, № 7, с. 846.
18. Yorke J. A., Yorke E. D. — J. Stat. Phys., 1979, 21, № 3, p. 263.
19. Grebogi C., Ott E., Yorke J. A. — Phys. Rev. Lett., 1982, 48, № 22, p. 1507.
20. Fujisaka H., Grossmann S. — Zeit. Physik B, 1982, 48, № 3, p. 261.
21. Lorenz E. N. — J. Atmos. Sci., 1963, 20, № 3, p. 130.
22. Қалафати Ю. Д., Малахов Б. А. — Письма в ЖЭТФ, 1983, 37, № 10, с. 486.
23. Holmes P. — Phil. Trans. Roy. Soc. London, 1979, A-292, № 4, p. 419.
24. Moon F. C., Holmes P. — J. Sound Vibr., 1979, 65, № 2, p. 275.

Институт прикладной физики  
АН СССР

Поступила в редакцию  
4 июля 1985 г.

### ON THE EVOLUTION OF POWER SPECTRUM AT THE TRANSITION TO CHAOS THROUGH PERIOD DOUBLINGS

*A. S. Pikovskij*

Evolution of power spectrum at the transition to chaos through period doublings is considered for the systems with different symmetry type of the time shift. The universal law for discrete spectral lines is obtained in the case of continuous symmetry. It is shown that in the absence of continuous symmetry discrete spectral lines at the certain parameter values become of Lorentz shape and their width grows with the critical index  $1/2$ . The appearance of central peak as the result of phase space symmetry breaking is discussed. The results obtained allows one to give the complete picture of spectrum evolution.