

УДК 535.7

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА ВОЗБУЖДЕНИЯ СПИРАЛЬНЫХ ВОЛН ЭЛЕКТРОННЫМ ПУЧКОМ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ И РАЗВИТИЕ СЛАБОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

А. Т. Богданов, М. В. Кузелев, А. А. Рухадзе

Рассмотрена нелинейная динамика возбуждения спиральной замедленной волны прямолинейным электронным пучком в постоянном внешнем магнитном поле в условиях аномального эффекта Доплера. Показано, что рост амплитуды волны стабилизируется из-за нелинейного сдвига частоты, а сама амплитуда оказывается периодической функцией времени. Исследовано также возбуждение широкого спектра спиральных волн, протекающее в режиме слабой турбулентности. Рассчитаны спектры слабой турбулентности и эффективность излучения спиральных волн электронным пучком.

1. Известно, что задача о распространении монохроматической спиральной волны, или геликона, в магнитоактивной холодной плазме допускает аналитическое решение при любой амплитуде волны [1]. Это связано с тем, что геликон не влияет на движение плазмы вдоль внешнего магнитного поля и не приводит тем самым к модуляции плотности плазмы. В случае пучковой плазмы геликон может стать неустойчивым в замедляющей системе.

Пусть моноэнергетический нейтрализованный электронный пучок распространяется со скоростью и вдоль внешнего магнитного поля B_0 , направленного по оси z . Предположим также, что все пространство заполнено изотропным однородным диэлектриком с проницаемостью $\epsilon_0 > 1$. В этом случае геликон описывается следующей системой уравнений относительно поперечных компонент скорости электронов $v_{\perp} = v_x + iv_y$ и поперечных компонент векторного потенциала $A_{\perp} = A_x + iA_y$ (предполагается, что все величины зависят только от координаты z):

$$\frac{\partial v_{\perp}}{\partial t} + u \frac{\partial v_{\perp}}{\partial z} + i\Omega_0 v_{\perp} = -\frac{e}{mc} \left(\frac{\partial A_{\perp}}{\partial t} + u \frac{\partial A_{\perp}}{\partial z} \right), \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 A_{\perp}}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 A_{\perp}}{\partial z^2} = \frac{4\pi e c}{\epsilon_0} n_b v_{\perp}.$$

Здесь $\Omega_0 = eB_0/mc$, $c_0^2 = c^2/\epsilon_0$, а n_b — плотность электронов пучка. Геликонное решение имеет вид

$$A_{\perp} = A_0 \exp(i\omega t - ikz), \quad (2)$$

где A_0 , ω и k — постоянные. Скорость v_{\perp} определяется выражением

$$v_{\perp} = -\frac{e}{mc} \left(\frac{\omega - ku}{\omega - ku + \Omega_0} \right) A_{\perp}, \quad (3)$$

а частота и волновое число связаны известным дисперсионным уравнением [1]

$$\omega^2 = k^2 c_0^2 + \frac{\omega_b^2 (\omega - ku)}{\omega - ku + \Omega_0}, \quad (4)$$

В котором $\omega_b = 4\pi e^2 n_b / \epsilon_0 m$. В случае $u < c_0$ уравнение (4) имеет только действительные относительно ω решения, а соотношения (1)–(4) верны для любых A_0 (релятивистские эффекты во внимание здесь не принимаются).

При $u > c_0$ геликон неустойчив. Действительно, в условиях аномального эффекта Доплера [1]

$$\omega = kc_0 + \delta\omega = ku - \Omega_0 + \delta\omega, \quad (5)$$

находим из (4) максимальный инкремент

$$\delta\omega = \pm i(\omega_b^2 \Omega_0 / 2kc_0)^{1/2}. \quad (6)$$

На первый взгляд существование неустойчивости представляется странным. Действительно, электрическое поле волны перпендикулярно невозмущенной скорости электронов, т. е. работа поля равна нулю. Дело, однако, в том, что соотношения (1)–(4) при комплексной частоте ω справедливы, только если $A_0 \rightarrow 0$. Для выяснения механизма неустойчивости и способа ее насыщения следует учесть нелинейные члены в уравнении продольного движения электронов, т. е. те члены, которые для устойчивого геликона тождественно равны нулю при любом A_0 .

Подставим в уравнение для продольной компоненты скорости электрона

$$\frac{dv_z}{dt} = \frac{e}{mc} \left(v_x \frac{\partial A_x}{\partial z} + v_y \frac{\partial A_y}{\partial z} \right), \quad v_z |_{t=0} = u, \quad (7)$$

соотношения (2) и (3) и в результате простых преобразований получим

$$\frac{dv_z}{dt} = -k\Omega_0 \left(\frac{e}{mc} \right)^2 \frac{|\delta\omega|}{(\text{Re } \omega - ku + \Omega_0)^2 + |\delta\omega|^2} |A_0|^2. \quad (8)$$

Из (8) видно, что пучок при развитии неустойчивости тормозится, причем без всякой модуляции. Последнее следует из того, что правая часть (8) не зависит от координаты z . Очевиден и механизм насыщения. Действительно, линия резонанса, согласно (8), имеет характерную лоренцевскую форму. Причем при $\omega_b \ll \Omega_0$ ширина линии мала. При торможении пучка резонанс $kc_0 = ku - \Omega_0$ нарушается и правая часть в (8) резко уменьшается. Следовательно, стабилизирующим фактором является нелинейный сдвиг частоты.

2. Для строгого рассмотрения задачи запишем систему нелинейных уравнений для поля, координат и скоростей электронов в гидродинамическом приближении, учитывая отсутствие модуляции пучка по продольной скорости и плотности:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 A_{\perp}}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 A_{\perp}}{\partial z^2} &= \frac{mc}{e} \omega_b^2 v_{\perp}, \\ \frac{\partial v_{\perp}}{\partial t} + v_z \frac{\partial v_{\perp}}{\partial z} + i\Omega_0 v_{\perp} &= -\frac{e}{mc} \left(\frac{\partial A_{\perp}}{\partial t} + v_z \frac{\partial A_{\perp}}{\partial z} \right), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\frac{dv_z}{dt} = \frac{1}{2} \frac{e}{mc} \left(v_{\perp}^* \frac{\partial A_{\perp}}{\partial z} + v_{\perp} \frac{\partial A_{\perp}^*}{\partial z} \right).$$

Дальнейшее решение ищем в виде

$$\begin{aligned} A_{\perp} &= A_0 \exp(i\omega t - ikz), \quad v_{\perp} = V_0 \exp(i\omega t - ikz), \\ \omega &= kc_0 = ku - \Omega_0, \quad v_z = u + \tilde{v}, \end{aligned} \quad (10)$$

где A_0 и V_0 — медленные комплексные амплитуды. Подстановка (10) в (9) приводит к следующим уравнениям:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -i \frac{\omega_b^2}{2\omega} V_0, \quad \frac{dV_0}{dt} - ik\tilde{v}(V_0 + \varepsilon) = i\Omega_0\varepsilon; \quad (11)$$

$$\frac{d\tilde{v}}{dt} = -\frac{1}{2} ik(V_0^*\varepsilon - V_0\varepsilon^*).$$

Здесь $\varepsilon = eA_0/mc$. При получении (11) считалось, что

$$v^2 = \omega_b^2/2\omega\Omega_0 \ll 1. \quad (12)$$

Условие (12) позволило пренебречь несущественным линейным сдвигом частоты (речь идет о малой действительной поправке к частоте, отброшенной также при получении (6)). Кроме того, следует подчеркнуть, что при $u < c_0$ $\omega = -\Omega_0 c_0/(c_0 - u) < 0$ (см. (5)). При этом первые два уравнения в (11) имеют решения вида V_0 , $\varepsilon \sim \exp(i\delta\omega t)$ с действительной $\delta\omega$, а правая часть третьего уравнения зануляется. Мы считаем поэтому, что $\omega > 0$, т. е. $u > c_0$.

Уравнения типа (11) были получены также в работе [2], но решения их приведены не были. Найдем эти решения, используя неравенство (12).

Если предположить $|\varepsilon| \ll |V_0|$, то второе уравнение системы (11) можно записать в виде

$$\frac{dV_0}{dt} - ik\tilde{v}V_0 = i\Omega_0\varepsilon. \quad (13)$$

Из этого уравнения и из первого уравнения (11) следует интеграл (включение поля считаем адиабатическим)

$$|\varepsilon|^2 = v^2 |V_0|^2, \quad (14)$$

подтверждающий исходное предположение. Используя еще один интеграл уравнений (11)

$$2(u - c_0)\tilde{v} = -|\varepsilon|^2/v^2 = -|V_0|^2, \quad (15)$$

запишем окончательно следующую систему:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -i \frac{\omega_b^2}{2\omega} V_0, \quad \frac{dV_0}{dt} + i \frac{k^2}{2\Omega_0} |V_0|^2 V_0 = i\Omega_0\varepsilon. \quad (16)$$

Наличие в полученных уравнениях кубической нелинейности соответствует нелинейному сдвигу частоты пучковой циклотронной волны ($\omega = ku - \Omega_0$), стабилизирующему неустойчивость.

Уравнения, совпадающие с точностью до обозначений с (16), были выведены в работе [3], посвященной резонансной распадной неустойчивости плотного пучка в замедляющей системе. Совпадение это не случайно: в обоих случаях речь идет об излучении в условиях аномального эффекта Доплера [4]. По аналогии с [3] решение (16) имеет вид

$$|V_0|^2 = 8(u - c_0)^2 v / ch \tau, \quad \tau = 2v\Omega_0 t. \quad (17)$$

Используя (15), оценим максимальную амплитуду электромагнитной волны

$$|\varepsilon|_{\max}^2 = 8(u - c_0)^2 v^3 \quad (18)$$

и относительную потерю импульса пучка (электронный КПД)

$$\text{КПД} = |\tilde{v}/u|_{\max} = 4v(1 - c_0 u^{-1}). \quad (19)$$

3. Рассмотрим теперь возбуждение широкого спектра спиральных волн. Для этого решение уравнений (9) представим в виде

$$A_{\perp} = \sum_s A_s \exp(i\omega_s t - ik_s z), \quad v_{\perp} = \sum_s V_s \exp(i\omega_s t - ik_s z), \quad (20)$$

где $\omega_s = k_s c_0$, а в резонансе с пучком в исходном состоянии находится мода с $s = 1$, т. е. $\omega_1 = k_1 c_0 = k_1 u - \Omega_0$. Кроме того, $k_s = sk_1$.

При торможении пучка мода с $s = 1$ выходит из полосы резонанса, зато следующая мода попадает в резонанс и так далее. В результате может возбудиться широкий спектр спиральных волн. Однако новых по сравнению с одномодовым решением (17) эффектов следует ожидать, если в полосу резонанса попадает сразу большое число мод, как это имеет место, например, при шумовой природе начального поля.

Подстановка (20) в первые два уравнения системы (9) дает

$$\frac{d\epsilon'_s}{dt} = -i \frac{\omega_b^2}{2\omega_s} V_s \left(\epsilon'_s = \frac{e}{mc} A_s \right), \quad (21)$$

$$\frac{dV_s}{dt} - i[(s-1)(u-c_0)k_1 + sk_1 \tilde{v}] V_s = i\Omega_0 \epsilon'_s,$$

а уравнение для \tilde{v} имеет вид

$$\frac{d\tilde{v}}{dt} = -\frac{1}{2} ik_1 \left[\sum_q V_q^* e^{-i\omega_q t + ik_q z} \sum_s s \epsilon'_s e^{i\omega_s t - ik_s z} - \text{к.с.} \right]. \quad (22)$$

Здесь правая часть уже зависит от продольной координаты z . Поэтому предположение об отсутствии модуляции пучка, вообще говоря, не справедливо. Однако, если начальные фазы волн распределены случайным образом и корреляции фаз в дальнейшем не возникает (отсутствие такой корреляции следует из уравнений (21)), то в правой части (22) однонаправленный вклад дают только диагональные члены, а все остальные в среднем компенсируют друг друга. Поэтому

$$\frac{d\tilde{v}}{dt} = -\frac{1}{2} ik_1 \sum_s s (\epsilon'_s V_s^* - \text{к.с.}). \quad (23)$$

Уравнение (23) с учетом (21) можно проинтегрировать, что дает

$$2(u-c_0)\tilde{v} = -\sum_s s |V_s|^2 = -\frac{1}{v^2} \sum_s s^2 (|\epsilon'_s|^2 - |\epsilon'_{0s}|^2). \quad (24)$$

Подставляя теперь (24) в (21), получим после замены $i\epsilon'_s \rightarrow \epsilon'_s$ следующие уравнения:

$$\frac{d\epsilon'_s}{dt} = \Omega_0 v^2 \frac{1}{s} V_s \left(v^2 = \frac{\omega_b^2}{2\omega_1 \Omega_0} \right), \quad \frac{dV_s}{dt} - i\Omega_0 s \Delta_s V_s = \Omega_0 \epsilon'_s, \quad (25)$$

в которых нелинейная расстройка Δ_s дается формулой

$$\Delta_s = \frac{s-1}{s} - \frac{1}{2(u-c_0)^2} \sum_q q |V_q|^2. \quad (26)$$

Уравнения (25) удобно записать в более симметричной форме. Для этого введем безразмерные амплитуды и время:

$$\epsilon_s = v^{-1} \frac{1}{(u-c_0) \sqrt{2}} \epsilon'_s, \quad P_s = \frac{1}{(u-c_0) \sqrt{2}} V_s, \quad \tau = \Omega_0 t. \quad (27)$$

В новых обозначениях уравнения (25) запишутся в виде

$$\frac{d\epsilon_s}{d\tau} = v \frac{1}{s} P_s, \quad \frac{dP_s}{d\tau} - is \left[\frac{s-1}{s} - \sum_q q |P_q|^2 \right] P_s = v \epsilon_s. \quad (28)$$

Система (28) и есть иско́мая система в приближении слабой турбулентности, причем величину

$$T = \sum_s s |P_s|^2 = \sum_s s^2 (|\epsilon_s|^2 - |\epsilon_{0s}|^2) \quad (29)$$

можно интерпретировать как «температуру» электронов пучка. Действительно, P_s — пропорциональны осцилляторной скорости электронов.

Оценим, используя уравнение (28), некоторые из параметров взаимодействия. Пусть, например, начальное возмущение задано в конечном спектральном интервале, т. е. $s \leq s_{\max}$, тогда максимальное значение «температуры» T определяется из равенства нулю нелинейной расстройки для $s = s_{\max}$ или

$$T_{\max} = 1 - s_{\max}^{-1}. \quad (30)$$

Используя далее левую часть формулы (19), а также формулы (24) и (30), получим выражение для КПД

$$\text{КПД} = \left| \frac{\tilde{v}}{u} \right|_{\max} = \left(1 - \frac{c_0}{u} \right) \left(1 - \frac{1}{s_{\max}} \right), \quad (31)$$

дающее значение существенно выше, чем (19). Отметим, что при возбуждении бесконечного спектра ($s_{\max} = \infty$) КПД, как это следует из (31), стремится к $1 - c_0/u$. Этот результат следовало ожидать, так как пучок может замедлиться не более чем до фазовой скорости c_0 .

Кроме того, формулы (30) и (31) предполагают малость параметра ν . Действительно, резонансное возбуждение s -ой моды происходит не только при $\Delta_s = 0$, а в полосе $|\Delta_s| < \nu s^{-3/2} / \sqrt{2}$. Данная ширина должна быть мала по сравнению с шириной всего спектра, но велика, как это уже отмечалось ранее, по сравнению с расстоянием h между линиями в спектре.

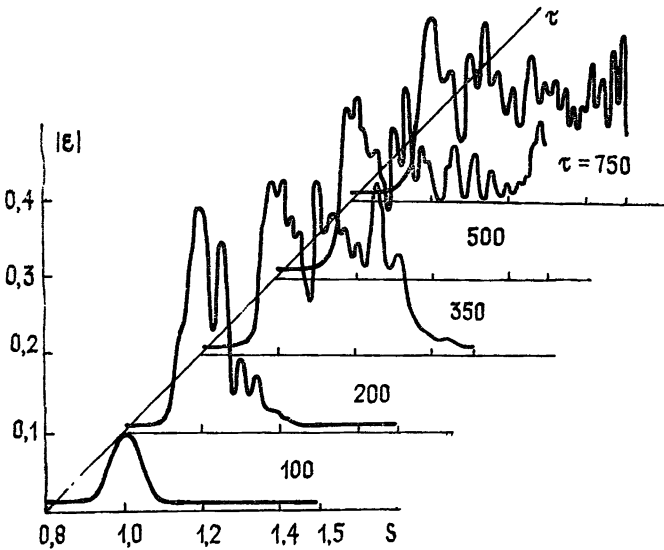


Рис. 1.

Определим спектральную плотность колебаний в пределе непрерывного спектра. В этом случае, как легко видеть из (29) и (30),

$$T = \int_1^s s' |P_{s'}|^2 ds' = \frac{s-1}{s}. \quad (32)$$

Дифференцируя (32) по s , для спектральной плотности имеем

$$|P_s|^2 = 1/s^3, \quad |\epsilon_s| = 1/s^2, \quad (33)$$

Приведенные оценки хорошо иллюстрируются результатами численного интегрирования (28), которое проводилось с целью исследования спектров слабой турбулентности и нагрева электронов для следующих значений параметров:

$$\nu = 0,03, \quad \epsilon_{0s} = 0,01, \quad s = 0,8 + nh,$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$ При $h=0,01$ для выбранного ν в полосу резонанса попадает около десяти мод одновременно, что вполне достаточно. Кроме того, положим сначала $n \leq 71$, т. е. $0,8 \leq s \leq 1,5$.

Динамика спектров представлена на рис. 1. Видно, что с течением времени спектр уширяется, а граница неустойчивости смещается в сторону больших s . К моменту $\tau = 500$ возбуждается весь спектр и его эволюция в основном заканчивается. Кроме

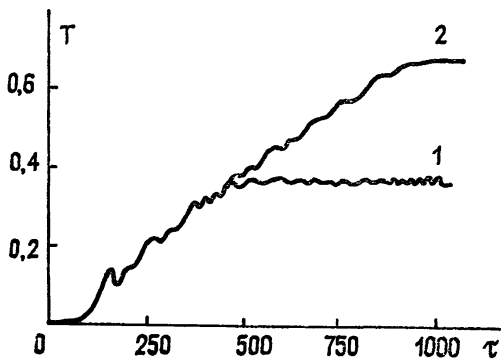


Рис. 2.

того, амплитуда каждой моды спектра после ее выхода из резонанса практически не изменяется со временем, что существенно отличается от обратимого решения (17). На рис. 2 изображена в зависимости от времени «температура» пучка T (кривая 1). «Температура»

растет до тех пор, пока не возбуждается весь спектр, после чего она практически не меняется.

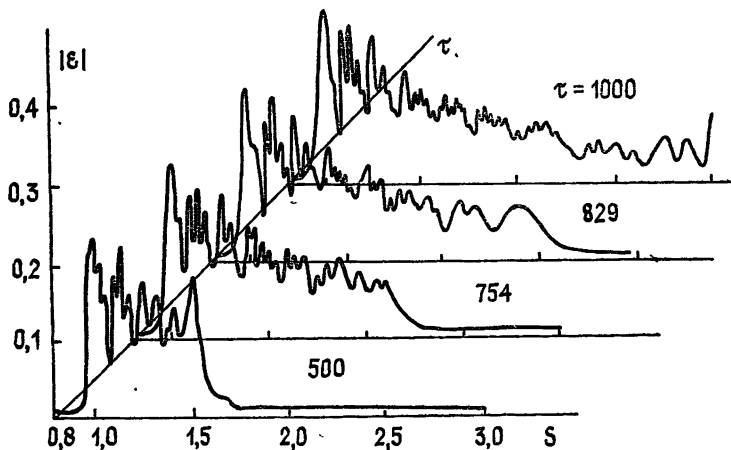


Рис. 3.

Аналогично описывается динамика и более широкого спектра. На рис. 2 (кривая 2) изображена «температура» для $n \leq 221$ ($0,8 \leq s \leq 3$). Она растет до больших значений, а после насыщения всего спектра опять выходит на постоянную, причем эта постоянная имеет значение, близкое к величине (30) для $s_{\max} = 3$. Динамика возбуждения широкого спектра представлена на рис. 3. Видно, что спектральная плотность спадает с ростом s . Отличие же от формулы (33) обусловлено дискретностью спектров, выбранных для численного счета.

ЛИТЕРАТУРА

1. Железняков В. В. — Изв. вузов — Радиофизика, 1959, 2, № 1, с. 14; 1960, 3, № 1, с. 57.
2. Красовицкий В. Б., Курилко В. И. — ЖЭТФ, 1965, 49, № 6, с. 1831.

3. Кузелев М. В., Панин В. А. — Изв. вузов — Физика, 1984, № 1, с. 31.
4. Незлин М. В. — УФН, 1976, 120, № 3, с. 481.

Московский государственный
университет

Поступила в редакцию
17 апреля 1985 г.

NONLINEAR DYNAMICS OF HELICAL WAVES EXCITATION BY AN ELECTRON BEAM IN A MAGNETIC FIELD UNDER WEAK TURBULENCE CONDITIONS

A. T. Bogdanov, M. V. Kuzelev, A. A. Rukhadze

A nonlinear mechanism of generation of a retarded helical wave by a straight-line electron beam in a static magnetic field has been considered. The wave amplitude increase is shown to be saturated by a nonlinear frequency shift. Wide-range spectrum excitation of helical waves under the condition of weak turbulence has been investigated. The weak turbulence spectrum and the efficiency of momentum transfer from the beam into the field have been evaluated.

АСТРОНОМИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, т. 63, вып. 5, 1986 г.

Андреянов В. В., Кардашев Н. С., Попов М. В., Рудаков В. А., Сагдеев Р. З., Слыш В. И., Царевский Г. С. «Радиоастрон» — радиоинтерферометр с базой Земля — Космос.

Описаны научные задачи, решаемые с помощью наземно-космического интерферометра с космическим радиотелескопом $\varnothing 10$ м на вытянутой орбите с высотой апогея 77 тыс. км и периодом обращения 24 ч, работающим совместно с наземными телескопами по принципу радиоинтерферометра со сверхдлинной базой. Угловое разрешение и чувствительность этого нового инструмента достаточны для получения фундаментальных сведений о тонкой структуре и физической природе радиоизлучающих областей, связанных с ближайшими окрестностями черных дыр, нейтронных звезд и областей звездообразования.

Авиньон М., Агринье Б., Акимов В. В. и др. Телескоп «Гамма-1» для гамма-астрономических наблюдений в области энергий 50 — 5000 мэВ.

Созданный в широкой кооперации телескоп «Гамма-1» предназначен для проведения исследований в новой и интенсивно развивающейся области — гамма-астрономии. Телескоп по основным характеристикам — чувствительности и угловому разрешению — превосходит приборы, использовавшиеся ранее на американском и европейском спутниках САС-2 и КОС-Б. Чувствительная площадь телескопа составляет 1400 см², угловое разрешение равно 1,2' при энергии 300 МэВ и менее 20' при введении в апертуру телескопа кодирующей маски. Диапазон энергий регистрируемых гамма-квантов — 50—500 МэВ, энергетическое разрешение меняется от 55% при 100 МэВ до 34% при 550 МэВ. Характеристики телескопа и его систем определялись как путем расчета методом Монте-Карло, так и при калибровках на ускорителях.

Шоломицкий Г. Б., Балебанов В. М., Громов В. Д., Маслов И. А., Никольский Ю. В., Петухов А. С., Прилуцкий О. Ф., Родин В. Г., Согласнова В. А., Хохлов М. З., Шапошников В. А. Субмиллиметровый охлаждаемый телескоп.

Субмиллиметровая спектродетекция дает уникальную возможность провести принципиально новые виды астрономических наблюдений — измерения полного содержания пыли в галактиках разных типов по Хабблу, определения пекулярных (радиальных) скоростей скоплений галактик относительно реликтового излучения и др. Кратко описан возможный вариант конструктивной реализации внеатмосферного субмиллиметрового телескопа с криогенным охлаждением.