

УДК 538.566

## ОБ ОТРАЖЕНИИ ОДНОМЕРНОГО ВОЛНОВОГО ПОЛЯ ОТ ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ФЛУКТУАЦИЯМИ ПРОВОДИМОСТИ

Н. Н. Зернов

Построена функция распределения модуля коэффициента отражения плоской волны от одномерного полупространства с флуктуациями проводимости. Эта функция использована при анализе влияния флуктуаций проводимости ионосферы на модуль коэффициента отражения волны с частотой, принадлежащей диапазону десятков килогерц.

Многочисленные исследования распространения волн в одномерной случайно-неоднородной среде [1-8] посвящены рассмотрению той ситуации, когда флуктуации испытывает вещественная часть диэлектрической проницаемости среды  $\epsilon$ . Между тем, в ряде случаев флуктуирующей является в основном проводимость среды. Так, на достаточно низких частотах относительная комплексная диэлектрическая проницаемость ионосферной плазмы без учета влияния магнитного поля Земли может быть представлена в виде

$$\epsilon'_m = 1 + i(e^2 N(z) / \epsilon_0 m \omega v(z)), \quad (1)$$

где  $e$  и  $m$  — заряд и масса электрона соответственно,  $\epsilon_0$  — диэлектрическая проницаемость вакуума,  $\omega$  — круговая частота поля,  $N(z)$  и  $v(z)$  — высотные распределения концентрации электронов и числа соударений электронов с другими частицами в ионосфере. В соответствии с (1) простейшей моделью ионосферной плазмы в области низких частот является полупространство с диэлектрической проницаемостью, задаваемой формулой

$$\epsilon'_m = 1 + i\alpha + i\tilde{\alpha}(z), \quad (2)$$

где  $\alpha$  — постоянная величина, порядок которой будет установлен ниже, а  $\tilde{\alpha}(z)$  — случайная добавка с нулевым средним значением, характеризующая флуктуации проводимости ионосферы по высоте.

Известно [2, 4, 8], что при рассмотрении задачи отражения в приближении диффузионного марковского процесса отыскание функции распределения коэффициента отражения от поглощающего полупространства с флуктуациями эквивалентно построению стационарного решения уравнения Эйнштейна — Фоккера (УЭФ) для слоя с поглощением конечной толщины. Поэтому мы построим УЭФ для слоя конечной толщины с диэлектрической проницаемостью (2), а затем найдем его стационарное решение.

Будем рассматривать плоскую волну горизонтальной поляризации, распространяющуюся под углом  $\vartheta$  с нормалью к слою с флуктуациями проводимости по высоте. Тогда функция  $w(z)$ , связанная с полем  $E(x, z)$  соотношением  $E(x, z) = w(z) \exp(ikx \sin \vartheta)$ , определится из уравнения

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + k^2 [\cos^2 \vartheta + i\alpha + i\tilde{\alpha}(z)] w = 0, \quad (3)$$

$k$  — волновое число вакуума. Вне слоя толщиной  $L$  с координатами границ  $(-L, 0)$   $\alpha = 0$ ,  $\tilde{\alpha}(z) = 0$ .

Пусть на слой со стороны положительных значений  $z$  падает плоская волна единичной амплитуды  $\exp(-ikz \cos \theta)$ . Следуя [8], представим решение уравнения (3) в слое в виде

$$w(z) = A(z) \exp(-ikqz) + B(z) \exp(ikqz),$$

$q = \sqrt{\cos^2 \theta + i\alpha}$ , связав две новые неизвестные функции  $A(z)$ ,  $B(z)$  дополнительным условием

$$A'(z) \exp(-ikqz) + B'(z) \exp(ikqz) = 0.$$

Тогда для  $R(z) = B(z)A^{-1}(z) \exp(2ikqz)$  получим уравнение Риккати

$$\frac{dR}{dz} = 2(i\kappa - \gamma)R + \frac{i\gamma - \kappa}{2|q|^2} \tilde{\alpha}(z) (1+R)^2, \quad (4)$$

$kq = \kappa + i\gamma$ . Удовлетворив условиям непрерывности касательных составляющих электрического и магнитного полей при  $z = -L$ , которые для рассматриваемого здесь поля горизонтальной поляризации сводятся к непрерывности  $w(z)$  и ее производной при  $z = -L$ , получим начальное условие для уравнения (4):

$$R(-L) = (q - \cos \theta) / (q + \cos \theta). \quad (5)$$

Коэффициент отражения  $r(0)$  поля, отраженного от слоя  $r(0) \times \exp(ikz \cos \theta)$ , определяется из аналогичных граничных условий при  $z = 0$  и выражается через значение  $R(0)$  соотношением

$$r(0) = \frac{\cos \theta - q + (\cos \theta + q)R(0)}{\cos \theta + q + (\cos \theta - q)R(0)}. \quad (6)$$

Введя вместо комплексной функции  $R(z)$  две вещественные функции  $u(z)$  и  $\varphi(z)$  соотношением

$$R(z) = (u - 1)^{1/2} (u + 1)^{-1/2} \exp[i\varphi(z)], \quad (7)$$

перейдем от (4) к системе двух вещественных уравнений:

$$du/dz = -2\gamma(u^2 - 1) - 2\tilde{a}b(u^2 - 1) - 2\tilde{\alpha}(bu \cos \theta - a \sin \theta) \sqrt{u^2 - 1}, \quad (8)$$

$$\frac{d\varphi}{dz} = 2\kappa + 2\tilde{\alpha}a + 2\tilde{\alpha} \frac{au \cos \theta + b \sin \theta}{\sqrt{u^2 - 1}}.$$

Здесь  $a = 2^{-1}|q|^{-2}\gamma$ ,  $b = 2^{-1}|q|^{-2}\kappa$ . Отвечающее системе (8) в приближении дельта-коррелированного марковского случайного процесса замкнутое УЭФ оказывается слишком сложным, и решить его не представляется возможным. Однако вместо полного УЭФ может быть написано укороченное уравнение, следующее из точного в результате усреднения [8] по периоду быстрых изменений  $\varphi(z)$ . Усредненное уравнение для рассматриваемой здесь системы имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(z, u)}{\partial z} = & 2\gamma \frac{\partial}{\partial u} [(u^2 - 1)P] + 4\sigma^2 l b^2 \frac{\partial}{\partial u} \left[ (u^2 - 1) \frac{\partial}{\partial u} (u^2 - 1) P \right] + \\ & + 2\sigma^2 l b^2 \frac{\partial}{\partial u} \left[ (u^2 - 1) \frac{\partial}{\partial u} (u^2 P) \right] + 2\sigma^2 l a^2 \frac{\partial}{\partial u} \left[ (u^2 - 1) \frac{\partial P}{\partial u} \right] \end{aligned} \quad (9)$$

и справедливо при условиях

$$\gamma \ll \kappa, \quad b\sigma \ll \kappa. \quad (10)$$

В уравнении (9)  $\sigma^2$  — дисперсия  $\tilde{\alpha}(z)$ ,  $l$  — ее эффективный радиус корреляции. Искомая функция  $P(z, u)$  является плотностью вероятности распределения значений  $u$ . Формально (9) переходит в аналогичное

уравнение для поглощающего слоя с флуктуациями вещественной части диэлектрической проницаемости [8] при  $b=0$ .

Как уже говорилось выше, отражению от полупространства отвечает функция распределения  $P_\infty(u)$ , представляющая собой стационарное решение уравнения (9). Такое решение, удовлетворяющее еще дополнительному условию отсутствия потока плотности вероятности через границы, может быть найдено [9] и имеет вид

$$P_\infty(u) = N(u+p)^{n-1}(u-p)^{-n-1}. \quad (11)$$

Здесь  $p = (3\kappa^2)^{-1/2}(2\kappa^2 - \gamma^2)^{1/2}$ ,  $n = 2 \cdot 3^{-1/2} \gamma |q|^4 \sigma^{-2} l^{-1} \kappa^{-1} (2\kappa^2 - \gamma^2)^{-1/2}$ , а нормировочный множитель  $N$  определяется из условия  $N \int_1^\infty (u+p)^{n-1}(u-p)^{-n-1} du = 1$  и равен  $N = 2pn \left[ \left( \frac{1+p}{1-p} \right)^n - 1 \right]^{-1}$ . С учетом неравенств (10), дающих для параметров задачи соотношения

$$\alpha/2 \ll \cos^2 \vartheta, \quad \sigma/2 \ll \cos^2 \vartheta \quad (10')$$

(здесь второе неравенство автоматически выполняется, если имеет место первое, поскольку флуктуации проводимости не могут превосходить саму проводимость), лишь при выполнении которых имеет смысл само уравнение (9), а следовательно, и его решение (11), параметры функции распределения  $p$  и  $n$  можно приближенно представить как

$$p \simeq \sqrt{0,66}, \quad n \simeq (\alpha \cos \vartheta) / \sqrt{6} \sigma^2 kl.$$

Тогда функция распределения (11) окончательно запишется в виде

$$P_\infty(u) = \frac{1,6n}{9^n - 1} \frac{(u + 0,8)^{n-1}}{(u - 0,8)^{n+1}}. \quad (12)$$

Выражение (12) характеризует распределение величины  $u$  из (7) на уровне  $z=0$  при отражении от поглощающего полупространства с флуктуациями проводимости. Все физические параметры задачи — частота поля, косинус угла падения волны на границу раздела, поглощение в слое, дисперсия флуктуаций и их радиус корреляции — входят в (12) в виде произведения и образуют единственный эффективный параметр распределения  $n$ . С ростом  $n$  распределение делается все более «узким» и при  $n \rightarrow \infty$  дает  $\langle |R(0)| \rangle_\infty = 0$ , что соответствует предельному переходу  $\sigma^2 \rightarrow 0$ .

С помощью (12) могут быть вычислены все одноточечные моменты величины  $|R(0)|$  из (7). Коэффициент отражения  $r(0)$  выражается через  $R(0)$  формулой (6), которая с учетом неравенств (10), (10') дает

$$r(0) = -(i\alpha/4 \cos^2 \vartheta) + R(0). \quad (13)$$

Здесь первое слагаемое — детерминированное число,  $R(0)$  — комплексная случайная величина. Поскольку имеется функция распределения лишь  $|R(0)|$ , нет возможности дать полное статистическое описание  $r(0)$ . Однако с помощью (12) можно оценить статистические характеристики  $|r(0)|$ . Так, из (13) для  $\langle |r(0)| \rangle$  вытекают неравенства

$$\frac{\alpha}{4 \cos^2 \vartheta} - \langle |R(0)| \rangle \leq \langle |r(0)| \rangle \leq \frac{\alpha}{4 \cos^2 \vartheta} + \langle |R(0)| \rangle. \quad (14)$$

В соответствии с (13), (14) первый момент

$$\langle |R(0)| \rangle = \frac{1,6n}{9^n - 1} \int_1^\infty \sqrt{\frac{u-1}{u+1}} \frac{(u+0,8)^{n-1}}{(u-0,8)^{n+1}} du \quad (15)$$

дает оценку величины смещения  $\langle |r(0)| \rangle$  по отношению к модулю коэффициента отражения от полупространства без флуктуаций  $(\alpha/4 \cos^2 \vartheta)$  «смещения среднего».

Среднеквадратичное отклонение  $|r(0)| - \sigma_r$  оценим с помощью второго момента

$$\langle |R(0)|^2 \rangle = \frac{1,6n}{9^n - 1} \int_1^{\infty} \frac{u-1}{u+1} \frac{(u+0,8)^{n-1}}{(u-0,8)^{n+1}} du \quad (16)$$

величиной

$$\sigma_R = [\langle |R(0)|^2 \rangle - \langle |R(0)| \rangle^2]^{1/2}. \quad (17)$$

Результаты численного расчета моментов (15), (16) как функций эффективного параметра распределения  $n$  приведены на рис. 1, 2. Можно показать, что при больших  $n$  величины (15), (16) асимптотически ведут себя как  $O(n^{-1/2})$  и  $O(n^{-1})$  соответственно, причем коэффициенты главных членов разложений проще всего определить из сравнения с численными расчетами. Начиная со значений  $n$  порядка десяти, кривые 1 и 2 могут быть аппроксимированы функциями  $0,276 n^{-1/2}$  и  $0,105 n^{-1}$ . Такие медленные зависимости от  $n$  при больших  $n$  дают основание ожидать, что статистические характеристики коэффициента отражения будут весьма мало меняться при изменении физических параметров задачи в широком интервале значений, если этот интервал целиком лежит в области больших значений параметра распределения  $n$ .

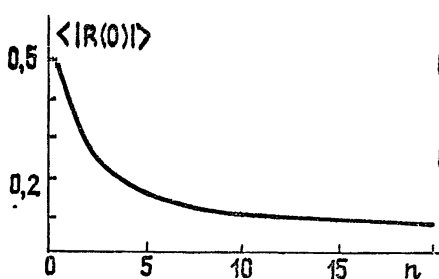


Рис. 1.

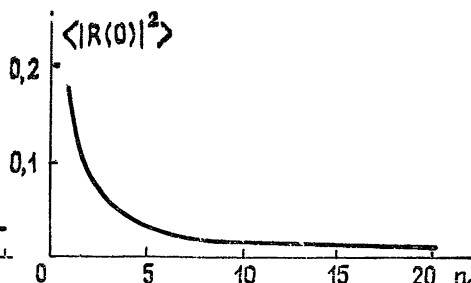


Рис. 2.

Теперь используем рассмотренную здесь задачу в качестве модельной при описании отражения от ионосферы электромагнитного поля диапазона десятков килогерц. На этих частотах без учета влияния магнитного поля Земли диэлектрическая проницаемость ионосферы имеет вид (1). Чтобы найти эффективное значение  $\alpha$  в модели однородной ионосферы (2), воспользуемся известным выражением для модуля коэффициента отражения волны горизонтальной поляризации от экспоненциального слоя [10]:

$$|R_{\text{exp}}| = \exp\left(-\frac{\pi k \cos \vartheta}{d}\right), \quad \rho = \rho_H \exp[d(z - z_H)],$$

$\rho_H$  — значение проводимости в начале ионосферы  $z_H$ ,  $d = 0,3 \text{ км}^{-1}$ . Сравним  $|R_{\text{exp}}|$  с абсолютной величиной коэффициента отражения от однородного полупространства с  $\alpha \ll 1$ :

$$|R_{\text{одн}}| = \alpha/4 \cos^2 \vartheta.$$

В результате для эффективного значения  $\alpha$  в (2) получим

$$\alpha = 4 \cos^2 \vartheta \exp(-\pi k \cos \vartheta/d). \quad (18)$$

На частотах в десятки килогерц определенное по формуле (18) значение  $\alpha$  действительно является величиной, много меньшей единицы, поэтому при не слишком больших углах падения на ионосферу неравенства (10') выполняются, и статистические характеристики коэффициента отражения от ионосферы с учетом флуктуаций проводимости в модели однородной ионосферы (2) могут быть описаны формулами (14) — (17).

Перейдем к получению численных оценок. Прежде всего укажем, что характерные горизонтальные масштабы неоднородностей нижней ионосферы составляют сотни и более километров [10], поэтому рассмотренная здесь плоскостная модель пригодна для описания отражений на коротких односкачковых трассах, для которых величина зоны Френеля не превосходит указанных размеров. Выполним расчеты, например, для частоты 20 кГц. При нормальном падении на ионосферу модуль коэффициента отражения в отсутствии флуктуаций имеет значение

$$|r_0(0)| = \exp(-\pi k/d) = \exp(-0,2f \text{ кГц}) \approx 15 \cdot 10^{-3}, \quad (19)$$

а значение  $\alpha$  согласно (18) равно  $60 \cdot 10^{-3}$ . Учитывая, что вертикальный масштаб турбулентности в ионосфере не превосходит 5—7 км [10], примем  $\sqrt{6} kl = 1$ . Тогда при  $\sigma = 0,1\alpha$   $n = 1700$  и  $\langle |R(0)| \rangle = 7,0 \cdot 10^{-3}$ ,  $\sigma_R = 3,6 \cdot 10^{-3}$ , а в случае  $\sigma = 0,01\alpha$  —  $n = 16 \cdot 10^4$  и  $\langle |R(0)| \rangle = 7,0 \cdot 10^{-4}$ ,  $\sigma_R = 3,6 \cdot 10^{-4}$ . То есть относительные флуктуации проводимости порядка 10% приводят к «смещению среднего» порядка 50% и разбросу модуля коэффициента отражения от 14% до 50%. Флуктуации проводимости в 1% дают «смещение среднего» в 5% и разброс 2—3%. Эти цифры согласуются с данными по стандартному отклонению модуля коэффициента отражения от ионосферы в диапазоне десятка килогерц, приводимыми в [11, 12]. В соответствии с этими данными в нашей модели значение  $\sigma = 0,1\alpha$  отвечает ночной, а  $\sigma = 0,01\alpha$  — дневной ионосфере.

Рассмотрим зависимость «смещения среднего» и разброса от угла падения волны на ионосферу. Величина  $|r_0(0)|$  экспоненциально растет с уменьшением косинуса угла падения, достигая при  $\phi = 30^\circ$  значения в  $6 \cdot 10^{-2}$ . При этом величины  $\langle |R(0)| \rangle$  и  $\sigma_R$  слабо меняются с изменением угла (при  $\phi = 30^\circ$  и  $\sigma = 0,1\alpha_{\text{норм}}$   $n = 2400$ ,  $\langle |R(0)| \rangle = 6 \cdot 10^{-3}$ ,  $\sigma_R = 3 \cdot 10^{-3}$ ), поэтому относительные значения «смещения среднего» и разброса заметно уменьшаются (соответственно от 50% и 14—50% при нормальном падении до 10% и 4,5—6% при  $\phi = 30^\circ$ ).

Наконец, обсудим возможности решения обратной задачи в смысле восстановления параметров выбранной модели ионосферы, например параметра  $d$  в экспоненциальной модели. Вычисленное на основании измерений разброс абсолютной величины коэффициента отражения экспериментальное значение  $\sigma_R$  позволяет по кривой рис. 2 определить эффективный параметр распределения  $n$ . По найденному  $n$  с помощью кривой рис. 1 определяется «смещение среднего»  $\langle |R(0)| \rangle$ , которое вместе с экспериментальным значением  $\langle |r(0)| \rangle$  дает в соответствии с (14), (19) интервал значений  $d$  в экспоненциальной модели. Что касается свойств флуктуаций проводимости, то по найденному значению  $n$  однозначно восстанавливается величина  $\sigma^2 kl$ , и для дальнейшего разделения  $\sigma^2$  и  $kl$  необходимо привлекать дополнительные соображения, выходящие за рамки рассмотренной здесь задачи.

В заключение выражаю благодарность В. Э. Герму за помощь в расчетах.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Рыжов Ю. А. — Изв. вузов — Радиофизика, 1973, 16, № 8, с. 1240.
2. Абрамович Б. С., Дятлов А. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1975, 18, № 8, с. 1222.
3. Кляцкин В. И., Татарский В. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1977, 20, № 7, с. 1040.
4. Бреховских В. Л., Татарский В. И. — Изв. АН СССР, Сер. Физика атмосферы и океана, 1977, 13, с. 144.
5. Кляцкин В. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1979, 22, № 2, с. 180.
6. Кляцкин В. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1979, 22, № 5, с. 591.
7. Кляцкин В. И., Бабкин Г. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1980, 23, № 3, с. 432.
8. Кляцкин В. И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. — М.: Наука, 1980, с. 336.
9. Зернов Н. Н. Тезисы докладов XIV Всесоюзной конференции по распространению радиоволн. Ч. 2. — М.: Наука, 1984, с. 148.

10. Флуктуации сверхдлинных радиоволн в волноводе Земля — ионосфера / Под ред. Блюха П. В. — М.: Наука, 1984, с. 143.
11. Gossard E. E. — Radio Science, 1970, 5, № 1, p. 7.
12. Pressey D. G., Ashwell G. E., Hargreaves J. — Proc. IEE, 1961, B-108, № 38, p. 214.

Ленинградский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
6 мая 1985 г.,  
после переработки  
22 октября 1985 г.

## ON THE REFLECTION OF ONE-DIMENSIONAL WAVE FIELD BY HALF-SPACE WITH CONDUCTIVITY FLUCTUATIONS

*N. N. Zernov*

The stationary solution of Einstein — Fokker equation for the case of reflection of horizontally polarized plane wave by half-space with one-dimensional conductivity fluctuations is obtained. In this solution the mean value of reflection coefficient and it's dispersion in the case of electromagnetic field reflection from the ionosphere at frequencies about 10 kHz is investigated.

---

### И Н Ф О Р М А Ц И Я

АСТРОНОМИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, т. 63, вып. 5, 1986 г.

Аннотации статей, представляющих интерес для читателей «Радиофизики»

**Кардашев Н. С.** Космологическая модель с отрицательным  $\Lambda$ -членом и струнами бесконечной длины.

Показано, что решение уравнений Фридмана при отрицательной плотности вакуума и с учетом плотности струн, уходящих за горизонт (бесконечных струн), одинаково для пространств отрицательной, нулевой и положительной кривизны. Это связано с тем, что в уравнении член, отражающий кривизну пространства, и член, описывающий струны, имеют одинаковую структуру. Данная модель удовлетворяет значениям параметра торможения  $g_0=0,5$ , параметра расширения  $H_0=50$  км/с · Мпс и дает возраст от начала расширения Вселенной  $\sim 16$  млрд лет. Модель также предсказывает остановку в расширении и последующее сжатие Вселенной. Для плоского пространства и современной плотности нерелятивистской материи  $5 \cdot 10^{-31}$  г/см<sup>3</sup> модель дает плотность вакуума  $2 \cdot 10^{-30}$  г/см<sup>3</sup>, плотность струн  $6 \cdot 10^{-30}$  г/см<sup>3</sup>, момент остановки наступит через 43 млрд лет после начала расширения. Обсуждаются другие особенности модели и возможности проверки ее наблюдениями.

**Кардашев Н. С.** Космологическое собственное движение.

Показано, что движение Солнечной системы относительно реликтового фонового радиоизлучения позволяет предсказать для будущих наблюдений величину регулярного собственного движения всех внегалактических объектов. Массовое измерение этого эффекта с помощью космических радиointерферометров позволит, по-видимому, определить основные параметры космологической модели.