ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXIX, № 12 РАДИОФИЗИКА 1986

УДК 621.371.25

УЧЕТ НЕЛИНЕЙНОСТИ В ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ РЕЗОНАНСЕ ЛУЧЕЙ В ПАРАБОЛИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ С ПЕРИОДИЧЕСКИ МЕНЯЮЩЕЙСЯ ШИРИНОЙ

С. С. Абдуллаев, Ю. А. Кравцов, Б. А. Ниязов, М. В. Тинин

Исследуется параметрический резонанс лучей в параболическом рефракционном волноводе с периодической неоднородностью. Анализируются особенности этого резонанса в зависимости от соотношения между амплитудой неоднородности и параметром нелинейности (определяемым скоростью изменения периода траектории с ее амплитудой). Отмечается отсутствие сильной резонансной раскачки лучей в условиях сильной нелинейности.

Известно [1, 2], что при наличии в рефракционном волноводе (например межслоевом ионосферном канале (ИВК)) неоднородности, периодически меняющейся вдоль волновода, возможен траекторный параметрический резонанс, приводящий к резкому усилению амплитуды волноводных лучей, что способствует выводу их из волновода и может оказаться существенным для решения проблемы ввода и вывода энергии из ИВК [3, 4].

Пренебрегая нелинейностью траекторных уравнений, можно, используя метод усреднения, показать [1, 2], что при изменении ширины волновода с частотой, вдвое меньшей частоты осцилляций траектории луча, имеет место экспоненциальный рост амплитуды траектории луча. Однако численные расчеты, результаты которых приведены в работах [1, 2], показывают, что этот рост ограничен. Здесь будет исследовано влияние нелинейности лучевых уравнений на траекторный параметрический резонанс.

В отличие от авторов работ [1, 2] мы проведем анализ двумерных траекторных уравнений в гамильтоновой форме

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial z}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{\partial H}{\partial p}, \tag{1}$$

где

$$H = H(p, z, x) = -[\varepsilon(z, x) - p^2]^{1/2} \tag{2}$$

— функция Гамильтона,

$$p = \frac{\sqrt{\varepsilon}\,\dot{z}}{[1 + (\dot{z})^2]^{1/2}}, \quad \dot{z} \equiv \frac{dz}{dx}. \tag{3}$$

Диэлектрическую проницаемость $\varepsilon(z, x)$ параболического волновода зададим в следующем виде:

$$\varepsilon(z, x) = \varepsilon_m - ((z - z_m)/d(x))^2, \tag{4}$$

где $d(x) = d_0 + d_1(x)$.

Введем канонические переменные действие — угол (I, ϑ):

$$I = (1/2\pi) \oint p(z)\,dz, \quad p(z) = [\varepsilon_0(z) - E^2]^{1/2},$$
$$E(I) = H_0(p, z), \quad \vartheta = \partial S/\partial I, \quad S(z, E) = \int^z p(z)\,dz, \tag{5}$$

где

$$\varepsilon_0=\varepsilon_m-((z-z_m)/d_0)^2, \qquad H_0=-[\varepsilon_0(z)-p^2]^{1/2} \tag{6}$$

— невозмущенная гамильтонова функция. Для модели среды (6) траектория луча $z(x)$ следующим образом выражается через переменные (I, ϑ):

$$z-z_m=a\sin\vartheta=\sqrt{2Id_0}\sin\vartheta.$$

Используя известную процедуру [5], перейдем от уравнений (1) к уравнениям для переменных I, ϑ. При условии

$$d_1(x)/d_0=\nu\sin\varkappa x, \qquad \nu\ll 1, \tag{7}$$

эти уравнения принимают вид

$$dI/dx=\nu 2I\omega(I)\sin 2\vartheta\sin\varkappa x; \tag{8}$$

$$d\vartheta/dx=\omega(I)-\nu(d/dI)(I\omega(I))\sin\varkappa x[1-\cos 2\vartheta], \tag{9}$$

где

$$\omega(I)=dH_0(I)/dI=1/\sqrt{\varepsilon_m d_0^2-2Id_0} \tag{10}$$

— частота осцилляций траектории луча в волноводе. Заметим, что при выводе (8), (9) помимо малости ν использовалось условие

$$\nu\alpha\ll 1, \tag{11}$$

где

$$\alpha=\frac{I}{\omega}\frac{d\omega}{dI}=\frac{I}{d_0|H_0(I)|^2} \tag{12}$$

— параметр нелинейности колебаний луча.

В окрестности траекторного параметрического резонанса, т. е. когда выполняется условие

$$2\omega(I)\approx\varkappa, \tag{13}$$

в уравнениях (8), (9) можно оставить только резонансные члены * и получить

$$dI/dx=\nu I\omega(I)\cos(2\vartheta-\varkappa x); \tag{14}$$

$$d\vartheta/dx=\omega(I)-\frac{\nu}{2}\frac{d}{dI}(I\omega(I))\sin(2\vartheta-\varkappa x). \tag{15}$$

Из (14) следует (см. также [1,2]), что поведение действия (соответственно амплитуды колебаний луча) зависит от начальной фазы луча ϑ_0. При $\cos 2\vartheta_0>0$ происходит возрастание амплитуды колебаний, а при $\cos 2\vartheta_0<0$ — амплитуда колебаний уменьшается. Если бы частота колебаний $\omega(I)$ не зависела от действия I (или от амплитуды колебаний a), то в зависимости от начальной фазы происходил бы непрерывный рост или уменьшение амплитуды резонансного луча (см. [1,2]), поскольку в этом случае фаза

$$\beta=2\vartheta-\varkappa x \tag{16}$$

была бы почти постоянной. Однако учет зависимости частоты $\omega(I)$ от действия I приводит к необходимости принимать во внимание характерное для нелинейного параметрического резонанса [6,7] нарушение изохронности колебаний. Это связано с тем, что при изменении частоты $\omega(I)$ происходит изменение фазы (16). При изменении β на π рост амплитуды колебаний сменяется его уменьшением или происходит обратное.

* Это эквивалентно применению в траекторных уравнениях процедуры усреднения [1,2].

Проведем анализ этого явления. Вначале сделаем качественные оценки роста действия I и амплитуды луча. Пусть при значении I, равном I_0, выполняется условие резонанса

$$2\omega(I_0)=\varkappa. \tag{17}$$

Положим $\vartheta=0$. Тогда, используя в качестве нулевого приближения результаты исследований линейного траекторного параметрического резонанса [1, 2], можно приближенно считать, что действие растет по закону

$$I(x)=I_0\exp(x/x_k), \qquad x_k=[\nu\omega(I_0)]^{-1}. \tag{18}$$

Пусть рост действия останавливается на расстоянии l, достигая максимального значения

$$I_{\max}=I_0\exp(\nu\omega(I_0)l). \tag{19}$$

С другой стороны, изменение фазы β на этом расстоянии должно составить $\pi/2$, т. е.

$$\Delta\beta\simeq2(d\omega/dI)\delta Il=\pi/2, \qquad \delta I=I_{\max}-I_0. \tag{20}$$

Из соотношений (19) и (20) получаем уравнение для l:

$$4\alpha\omega[\exp(\nu\omega l)-1]l=\pi. \tag{21}$$

Рассмотрим отдельно случаи.

1) Случай сильной нелинейности колебаний $\alpha\gg\nu$. Поскольку $\nu\ll1$, то для выполнения этого условия достаточно, чтобы резонансное действие I_0 было порядка ширины волновода d_0: $I_0\sim d_0(\varepsilon_m>2I_0/d_0)$. Из уравнения (21) в рассматриваемом случае получаем

$$l\simeq\left[\frac{\pi}{4\alpha\nu\omega^2}\right]^{1/2}, \qquad \frac{\delta I}{I_0}\simeq\nu\omega l=\left[\frac{\pi}{4}\frac{\nu}{\alpha}\right]^{1/2}. \tag{22}$$

Таким образом, в случае сильной нелинейности относительная раскачка амплитуды луча имеет порядок

$$\frac{\delta a}{d_0}=\delta\left(\frac{2I}{d_0}\right)^{1/2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{I_0}{d_0}\right)^{1/2}\frac{\delta I}{I_0}\simeq\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{\pi}{4}\frac{\nu}{\alpha}\right]^{1/2}\ll1. \tag{23}$$

2) Случай слабой нелинейности колебаний $\alpha\lesssim\nu$. Для выполнения этого условия необходимо, чтобы резонансное действие I_0 было порядка

$$I_0/d_0\lesssim\nu\ll1.$$

Из этого условия и условия резонанса (17) получаем значение пространственной частоты возмущений $\varkappa$, при котором выполняется условие слабой нелинейности:

$$2\omega(I_0)=\frac{2}{d_0\sqrt{\varepsilon_m-2I_0/d_0}}\simeq\frac{2}{d_0\sqrt{\varepsilon_m-\nu}}=\varkappa. \tag{24}$$

В рассматриваемом случае

$$l\simeq\frac{\pi}{4\omega\nu}, \qquad \frac{\delta I}{I_0}\simeq\exp(\pi\omega\nu/4\omega\nu)-1\sim1,$$
$$\frac{\delta a}{d_0}\simeq\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{I_0}{d_0}\right)^{1/2}\frac{\delta I}{I_0}\sim\left(\frac{\nu}{2}\right)^{1/2}. \tag{25}$$

Заметим, что приведенные оценки являются довольно грубыми. Однако они позволяют преобразовать систему (14), (15) к виду, допускающему более корректный анализ.

Действительно, с учетом этих оценок и условия (11) зависимость частоты ω от действия I можно аппроксимировать линейным выражением

$$\omega(I) \approx \omega_0 + \alpha[(I - I_0)/I_0], \qquad \omega_0 = \omega(I_0). \tag{26}$$

Поэтому с учетом малости параметра ν систему (14), (15) можно переписать:

$$dJ/dx = \nu J \omega_0 \cos\beta; \tag{27}$$

$$d\beta/dx = 2\Omega\omega_0 + 2\alpha\omega_0 J - \nu (d/dI)(I\omega(I))|_{I=I_0} \sin\beta, \tag{28}$$

где

$$J = I/I_0; \tag{29}$$

$$\Omega = (2\omega_0 - \varkappa - 2\alpha\omega_0)/2\omega_0. \tag{30}$$

Для нелинейной системы (27), (28) можно получить оба интеграла. В случае $\alpha < 1$ получаем следующее выражение для относительного действия J:

$$J = \frac{\nu}{2\alpha} \frac{J_2(J_1 - J_3) - J_3(J_1 - J_2)\,\mathrm{sn}^2(\varphi + \varphi_0, r)}{(J_1 - J_3) - (J_1 - J_2)\,\mathrm{sn}^2(\varphi + \varphi_0, r)}, \tag{31}$$

где $\mathrm{sn}(\varphi, r)$ — эллиптическая функция Якоби [8],

$$\varphi = (\nu\omega x/4)\sqrt{(J_1 - J_3)(J_2 - J_4)}, \tag{32}$$

$\varphi_0 = F(\lambda_0, r)$ — эллиптический интеграл первого рода [8],

$$\lambda_0 = \arcsin\sqrt{\frac{(J_1 - J_3)(1 - J_2)}{(J_1 - J_2)(1 - J_3)}}, \quad r = \sqrt{\frac{(J_1 - J_2)(J_3 - J_4)}{(J_1 - J_3)(J_2 - J_4)}},$$

$$J_{1,3} = \left(1 - \frac{2\Omega}{\nu}\right) \pm \sqrt{\left(1 - \frac{2\Omega}{\nu}\right)^2 - 4\frac{\alpha}{\nu} S_0},$$

$$J_{2,4} = -\left(1 + \frac{2\Omega}{\nu}\right) \pm \sqrt{\left(1 + \frac{2\Omega}{\nu}\right)^2 - 4\frac{\alpha}{\nu} S_0},$$

$$S_0 = \sin\beta_0 - \frac{2\Omega}{\nu} - \frac{\alpha}{\nu}, \quad \beta_0 = 2\vartheta_0.$$

Выражение (31) при $\nu/\alpha \to \infty$ переходит в соотношение, полученное в результате исследования линейного траекторного резонанса [1,2]. Конечность величины ν/α приводит к тому, что экспоненциальное изменение J сменяется периодическим. Амплитуда и частота этой периодической раскачки лучей зависят от расстройки Ω, начальной фазы β_0 и от отношения $\nu/2\alpha$. При конечном $\nu/2\alpha$ (т. е. в условиях слабой нелинейности) максимальное отклонение J, достигаемое на расстоянии порядка $l \sim 1/\nu\omega$, оказывается порядка $\nu/2\alpha \sim 1$, что согласуется с предыдущими оценками (25). В случае сильной нелинейности $\nu \ll 2\alpha$. Тогда $r \to 0$ и

$$J \equiv \frac{a^2}{a_0^2} \simeq 1 + \frac{\nu}{2\alpha}\left\{\sin\left[\beta_0 + 2\alpha\omega_0 x\sqrt{1 + \frac{2\Omega}{\alpha} - \frac{\nu}{\alpha}\sin\beta_0}\right] - \sin\beta_0\right\}. \tag{33}$$

Как видно из (33), в случае сильной нелинейности действие I колеблется возле уровня $I_0[1 - (\nu/2\alpha)\sin\beta_0]$ с амплитудой, пропорциональной $\nu/2\alpha$. Следовательно, в этом случае даже при выполнении условия резонанса (17) амплитуда волноводной траектории не испытывает экспоненциального роста. Такое поведение траектории луча, аналогичное поведению в случае слабой нелинейности вне области резонанса, объясняется тем, что в случае сильной нелинейности при изменении действия I частота меняется настолько быстро, что не успевает произойти значительного роста (или уменьшения) I.

В заключение отметим, что реально встречающиеся в природе зависимости диэлектрической проницаемости от вертикальной координаты z отличаются от модели (6), особенно вдали от оси волновода. В этом случае можно ожидать сильного проявления нелинейности колебаний луча вокруг оси волновода. При возмущении среды периодическими неоднородностями в резонанс будут вступать более высокие гармоники колебаний луча. При этом физическая картина явления будет сильно отличаться от рассмотренного здесь параболического волновода, где возможен всего лишь один параметрический резонанс. В частности, при перекрытии большого числа нелинейных резонансов возможно образование стохастического слоя, где движение лучей является случайным [9].

ЛИТЕРАТУРА

1. Афанасьев Н. Т., Свистунов К. В., Тинин М. В. Тезисы докладов VIII Всесоюзного симпозиума по дифракции и распространению волн. — М.: АН СССР, 1981, 3, с. 203.
2. Афанасьев Н. Т., Свистунов К. В., Тинин М. В. — Изв. вузов — Радиофизика, 1982, 25, № 2, с. 133.
3. Гуревич А. В., Цедилина Е. Е. Сверхдальнее распространение коротких радиоволн. — М.: Наука, 1979.
4. Кравцов Ю. А., Тинин М. В., Черкашин Ю. Н. — Геомагнетизм и аэрономия, 1979, 19, № 5, с. 769.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. — М.: Наука, 1973.
6. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1974.
7. Мигулин В. В., Медведев В. И., Мустель Е. Р. Основы теории колебаний. — М.: Наука, 1978.
8. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. — М.: Наука, 1978.
9. Абдуллаев С. С., Заславский Г. М. — ЖЭТФ, 1981, 80, № 2, с. 524.

Иркутский государственный университет

Поступила в редакцию 27 мая 1985 г.

ACCOUNT OF NONLINEARITY IN PARAMETRIC RESONANCE ON RAYS IN PARABOLIC WAVEGUIDE WITH PERIODIC CHANGING WIDTH

S. S. Abdullaev, Yu. A. Kravtsov, B. A. Nijazov, M. V. Tinin

Parametric resonance of rays in parabolic refraction waveguide with periodic inhomogeneity is investigated. Peculiarities of the resonance are analysed as a function of relation between amplitude of the inhomogeneity and nonlinearity parameter (determined by rate of change of trajectory period with its amplitude). Absence of strong resonance ray swinging under strong nonlinearity is noted.