УДК 537.874.6

ОБ ОСОБЕННОСТИ ПОЛЯ НА РЕБРЕ В РЕЗОНАНСНОЙ ОБЛАСТИ ОДНООСНОЙ ПЛАЗМЫ

В. В. Фисанов

При формулировке задач дифракции электромагнитных волн на объектах с ребрами в анизотропных средах следует проверять выполнение условия на ребре, согласно которому электромагнитная энергия, запасенная в любом конечном объеме, окружающем ребро, должна быть конечной. Условие на ребре соответствует требованию, чтобы ребро не излучало и не поглощало энергию [1], и поэтому служит критерием физической реализуемости моделей объектов с острым ребром. Известны примеры нарушения условия на ребре при наличии феррита [2–4] и плазмы [5], находящихся под воздействием магнитостатического поля, приложенного вдоль ребра. На возможность усиления особенности поля у ребра в одноосной среде (ось анизотропии направлена поперек ребра) указывалось в [6], позднее было отмечено нарушение условия на ребре, когда не равный единице компонент тензора относительной диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon}$ является отрицательным (так называемая резонансная область) [7]. Однако исследование этого явления в зависимости от изменения положения обеих граней клина относительно оси анизотропии не проводилось.

Пусть порождающее анизотропию бесконечно сильное постоянное магнитное поле приложено вдоль оси x, что совпадает с направлением $\varphi=0$ цилиндрической системы координат (r, φ, z). Ребро клина с идеально проводящими гранями $\varphi=\varphi_1$, φ_2 расположено на оси z. Область $\varphi_1<\varphi<\varphi_2$ заполнена плазмой, которая характеризуется тензором $\hat{\varepsilon} = \varepsilon\, \hat{x}\hat{x} + \hat{y}\hat{y} + \hat{z}\hat{z}$, где $\varepsilon=1-1/[\Omega^2(1-j\nu/\omega)]$; Ω является отношением частоты поля ω к плазменной частоте электронов, ν — частота столкновений. Зависимость от времени принята в виде $\exp(+j\omega t)$. Воздействию анизотропии подвержено двумерное электромагнитное поле, которое имеет единственную магнитную составляющую, удовлетворяющую волновому уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{\varepsilon}\,\frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_0^2\right) H_z = 0, \quad k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\,. \tag{1}$$

Решение уравнения (1) вблизи ребра имеет вид

$$H_z = r^{\tau} N^{\tau}(\varphi)\{a\cos[\tau\,\mathrm{arctg}(\sqrt{\varepsilon}\,\mathrm{tg}\,\varphi)] + b\sin[\tau\,\mathrm{arctg}(\sqrt{\varepsilon}\,\mathrm{tg}\,\varphi)] + O(r)\}, \tag{2}$$

где $N(\varphi) = \sqrt{\cos^2\varphi + \varepsilon\sin^2\varphi}$ является лучевым показателем преломления [8]. Из (2) и уравнений Максвелла следует, что нормальные к ребру составляющие электрического поля при $r\to 0$ изменяются как $r^{\tau-1}$ и являются сингулярными, если $0 \leqslant \mathrm{Re}\,\tau<1$. Величина τ определяется выражением [7, 8]

$$\tau = \pi/[\mathrm{arctg}\,w_2 - \mathrm{arctg}\,w_1], \tag{3}$$

где $w_i = \sqrt{\varepsilon}\,\mathrm{tg}\,\varphi_i$, $i=1, 2$. Для того чтобы однозначно определить τ в (3), используем связь обратных тригонометрических функций с логарифмом:

$$\mathrm{arctg}\,w_i = 0{,}5j\ln Z_i + m_i\pi, \quad Z_i = (1-jw_i)/(1+jw_i)\,, \tag{4}$$

причем $-\pi < \arg Z_i<\pi$, а $m_i=0$ для $-0{,}5\pi<\varphi_i<0{,}5\pi$, $m_i=1$ для $0{,}5\pi<\varphi_i<1{,}5\pi$, $m_i=2$ для $1{,}5\pi<\varphi_i<2{,}5\pi$. Это определение обеспечивает непрерывный переход к значению τ для изотропной среды ($\tau=\pi/\psi$, $\psi=\varphi_2-\varphi_1$) при $\omega\to\infty$ для всего интервала $0<\psi\leqslant 2\pi$.

Аналитическое продолжение решения (3) в резонансную область ($\varepsilon<0$) следует выполнять при конечных потерях в среде, устремляя их к нулю ($\nu\to 0$). Примем во внимание, что в резонансной области при малых потерях $\sqrt{\varepsilon} \approx \delta|\bar{\varepsilon}|^{-1/2} - j|\bar{\varepsilon}|^{1/2}$, где $\bar{\varepsilon}<0$ — значение ε в отсутствие потерь, $\delta=\nu/(2\omega\Omega^2)$ — малый положительный параметр. Так как волновое уравнение (1) в резонансной области является уравнением гиперболического типа, целесообразно ввести параметр $\alpha=\mathrm{arctg}(|\bar{\varepsilon}|^{-1/2})$, который определяет размер «освещенной» области $|\varphi|<\alpha$, $|\varphi-\alpha|<\pi$, где лучевой показатель преломления положительный [8]. Тогда при малых потерях функция Z_i приводится к выражению

$$Z_i = \sin(\alpha-\varphi_i)/\sin(\alpha+\varphi_i) - j\delta\sin^2\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\sin 2\varphi_i/\sin^2(\alpha+\varphi_i)\,,$$

откуда следует, что при $\delta\to 0$ оно принимает значение $Z_i=|v_i|\exp(jn_i\pi)$, где $v_i=\sin(\alpha-\varphi_i)/\sin(\alpha+\varphi_i)$, а $n_i=0$, если $v_i>0$; $n_i=1$, если $v_i<0$ и $\sin 2\varphi_i<0$; $n_i=-1$, если $v_i<0$ и $\sin 2\varphi_i>0$. После подстановки этого значения в (3) и (4) получается выражение

$$\tau = \pi/(0{,}5j\ln|v_2/v_1| + l\pi)\,, \tag{5}$$

которое является искомым аналитическим продолжением решения в резонансную область. Здесь $l=m_2-m_1+0{,}5(n_1-n_2)$.

Условие на ребре требует выполнения неравенства $\mathrm{Re}\,\tau > 0$. Из (5) следует, что если $l=0$, то $\mathrm{Re}\,\tau=0$ и условие на ребре не выполняется. Особенность поля с $\mathrm{Re}\,\tau=0$ естественно назвать аномальной, она достигается только в отсутствие потерь. Можно показать, что значение $l=0$ реализуется, лишь если $v_2/v_1>0$, откуда следует, что аномальная особенность поля достигается, когда клин целиком расположен либо в «освещенной», либо в «теневой» области пространства. В первом случае раскрыв клина находится в пределах $0<\psi<2\alpha$, во втором случае — в пределах $0<\psi<\pi-2\alpha$. Этот вывод согласуется с работой [7], где рассмотрен частный случай $\varphi_1=0$. Из (5) следует также, что при приближении граней клина к границам тени $\tau\to 0$. Когда $|v_2/v_1|=1$, мнимая часть τ обращается в нуль, а $\mathrm{Re}\,\tau=1/l$. Если $v_2/v_1=1$, что соответствует $\psi=\pi$ (плоскость) и $\psi=2\pi$ (полуплоскость), величина τ принимает такие же значения, как в изотропной среде. Аналогичное свойство отмечается и у гиротропных структур с невырожденным тензором [9, 10]. На рис. 1 дан пример расчета $\mathrm{Re}\,\tau$ (сплошная линия) и $\mathrm{Im}\,\tau$ (пунктирная линия) для случая $\alpha=20°$, $\varphi_1=80°$ в зависимости от угла раскрыва клина ψ. При $\psi=n\pi-\mathrm{arctg}\,|(\cos 2\alpha-\cos 2\varphi_1)/\sin 2\varphi_1|$, $n=1,2$ $\mathrm{Im}\,\tau=0$, а $\mathrm{Re}\,\tau$ имеет максимумы $\tau=2$ и $\tau=2/3$, которые соответствуют значениям τ для углов $\psi=0{,}5\pi$ и $\psi=1{,}5\pi$ в изотропной среде. Для сравнения на рис. 1 нанесена линия для τ в изотропной среде.

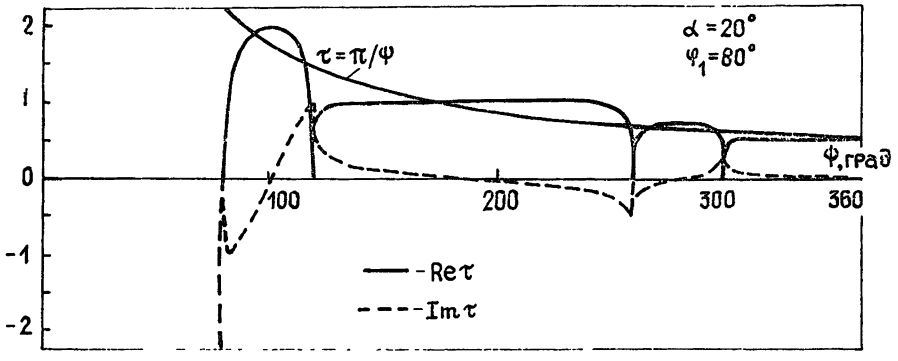

Рис. 1.

Будем характеризовать положение клина относительно оси анизотропии углом β между биссектрисой клина и этой осью. Значения углов раскрыва клина, для которых отмечается аномальная особенность поля на ребре, заключены в границах: $0<\psi<\min[2(\alpha+\beta),\ 2(\alpha-\beta)]$, $0<\psi<\min[2(\alpha+\beta-\pi),\ 2(\alpha-\beta+\pi)]$ — «освещенная область»; $0<\psi<\min[2(\beta-\alpha),2(\pi-\alpha-\beta)]$; $0<\psi<\min[2(\beta-\alpha-\pi),2(2\pi-\alpha-\beta)]$ — «теневая область». Отсюда видно, что область аномальной особенности поля образуется при любой ориентации клина относительно оси анизотропии за исключением случая расположения биссектрисы клина по границам тени ($\beta=\pm\alpha$, $\beta=\pi\pm\alpha$). Чтобы избежать физически некорректных результатов в задачах дифракции волн на объектах с ребрами в резонансной области одноосной плазмы в условиях образования аномальной особенности поля на ребре, достаточно учесть потери в среде.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хёнл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. — М.: Мир, 1964, с. 49.
2. Hurd R. A. — Canad. J. Phys., 1962, **40**, № 9, p. 1067.
3. Фисанов В. В. — Изв. вузов — Физика, 1984, **27**, № 5, с. 122.
4. Фисанов В. В. — Радиотехника и электроника, 1985, **30**, № 9, с. 1831.
5. Hurd R. A. — Canad. J. Phys., 1963, **41**, № 10, p. 1554.
6. Felsen L. B. — IEE Proc., 1964, **111**, № 3, p. 454.
7. Lee S. W., Mittra R. — Canad. J. Phys., 1968, **46**, № 2, p. 111.
8. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. — М.: Мир, 1978, **2**, гл. 7.
9. Hurd R. A., Przeździecki S. — J. Math. Phys., 1976, **17**, № 10, p. 1838.
10. Веселов Г. И., Платонов Н. И., Ачеев В. Е. В кн.: Труды IV Международной конференции по гиромагнитной электронике и электродинамике. — Яблонна: Польская АН, 1978, с. 48.

Сибирский физико-технический институт
при Томском университете

Поступила в редакцию
22 января 1985 г.,
после переработки
11 ноября 1985 г.